2018 年 1 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 6

お知らせ

- 今回は中間試験お予告をします（しました）．欠席されたかたは講義 web，OCW をご覧ください．
- 次回 1 月 25 日が最終回となります．恒例の授業評価アンケートを実施しますのでご協力願います．

前回までの訂正

- テキスト 84 ページ，4 行目：xy 平面 ⇒ 半径 1 の円柱面
- 水の三重点は 4°C ではなく 0.01°C です．ご指摘ありがとうございました．
- 講義資料 5，下から 5 行目：曲線の長さ ⇒ 曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ の長さ
- 講義資料 5，下から 4 行目：L ⇒ $\mathcal{L}$

授業に関する御意見

- 定期試験に持ち込める「何を書いてもいい紙」に書きたい内容が多いので，3Q のときの 2 倍以上書けるスペースが欲しいです．　**山田のコメント：** 整理の都合上 2 倍にはできません．なるべく増やすようにしましょう．
- Gauss の方程式を覚えられる人は天才!　**山田のコメント：** 山田は特殊な場合以外は覚えていません．たとえば，$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$ なら $K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})$ とか．
- 英語の筆記体は解読できるのですが，たまに漢字が解読不可能です．　**山田のコメント：** ごめんなさい．
- 青色チョークは少し見にくいかもです．　**山田のコメント：** そうですね．あまり使わないようにします．
- 4°C の公式サイトによると 4°C は氷が貼った水の中で唯一魚が生息できる「安息の場」であり，きびしい環境にあっての潤いを意味するようです．　**山田のコメント：** Thanks
- 教科書 §9 以降が難しい気がする．　**山田のコメント：** そうかもしれません．
- 難しくなったなと感じました．　**山田のコメント：** ですよね．大学まで来て簡単なことばかりやるのはもったいないですね．
- 難しくなってきたので復習しないとついていけなくなりそうです．　**山田のコメント：** 復習してください．
- あけましておめでとうございます．　**山田のコメント：** おめでとうございます．
- もうだいぶ遅いですが，明けましておめでとうございます．今年もよろしくお願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ．

質問と回答

質問 1： ガウス曲率が第一基本量を用いて表せるということは，幾何学的なイメージとしてどのように解釈すればよいのでしょうか．　**お答え：**教科書 112 ページ参照．

質問 2： 教科書 p. 112（上から 5 行目），「曲面を空間からとり出すことはできないだろうか．この場合，曲面の外側の世界という概念は存在しなくなるから，第一基本形式のみが意味をもつ. . .」という所の意味はよくわからないので，説明していただけないでしょうか．　**お答え：**今回の講義で少しやります．

質問 3： ガウス曲率を第 1 基本量のみで表す式を「ガウス方程式」，またガウス曲率がガウス方程式で表されることを「驚異の定理」ということですか．また「驚異」とは第 1 基本量のみで表されるのが驚くべきことということですか．　**お答え：**前半：「ガウス方程式」を驚異の定理といいます．後半：そうらしいです．

質問 4： 驚異の定理って何が驚異なのでしょうか?　**お答え：**ねぇ．

質問 5： Gauss 曲率が第一基本量とその偏導関数のみからきまるというのが驚異の定理でしたが，平均曲率も同様に，第一基本量とその偏導関数からきまるということはないのでしょうか?

お答え： ありません．$p(u, v) = (u, v, 0)$，$q(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ は同じ第一基本量を持つが，平均曲率は異なる．

質問 6： ガウス曲率は E, F, G で定まるのですが，平均曲率は E, F, G のみで定まりますか？ **お答え：**いいえ．

質問 7： 講義の最後で扱った「正確な地図が作れないこと」の証明がわかりませんでした．もう一度説明していただきたいです．“$ds^2 = du^2 + dv^2$ という座標が一般にとれない” とはどういうことでしょうか．

お答え： 前半：テキスト 111 ページの下から 2 行目から．後半：そういうこと．すなわち，どのように頑張って座標変換をしても，第一基本形式をご質問のような形にすることはできない．

質問 8： 測地線はパラメータに依存するとのことでしたが，では幾何学的な意味はないのでしょうか?

お答え： 「曲線」の幾何学的性質とは言えないが，. 区間から曲面への写像としては，「パラメータが弧長に比例する」ことは幾何学的な性質とみなせるので，写像の性質としての幾何学的な意味はある，という考え方をします．

質問 9： 注意 5.6 (2) で “曲面上の 2 点を結ぶ測地線が存在しない場合がある” とありますが，有限個の測地線によって任意の 2 点を結ぶことができないような曲面はありますか？（任意の曲面 S でその任意の点 $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in S$ に対して点列 $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n$ で，A から P_1，P_1 から P_2，…，P_n から B としてそれぞれを測地線で結ぶことができる点列が存在しますか？ **お答え：**曲面が連結（曲面の場合，連結性から自動的に弧状連結性が従う）ならば存在します．リーマン多様体の凸近傍の存在を用います（講義の範囲を少しだけ越えますが)．

質問 10： $\hat\gamma$ が曲面上の測地線であるとは $[\hat\gamma'']^T = \mathbf{0}$ と定義されますが，これは曲面上を曲面にそって一定方向に等速運動する点の軌跡というイメージでよろしいですか？ **お答え：**イメージだからよろしいも何もないのですが，まあよいのではないでしょうか．うるさいことをいうと「一定方向」って何でしょうね．

質問 11： 曲面上の測地線は，法線方向の力を受けないので，2 点間の最短距離（曲面上で）を与えているというイメージでよいですか． **お答え：**法線方向ではなく接方向の力ではないでしょうか．接方向に加速しないということと最短線の間の関係は，あなたが「イメージ」できるような自明なことでしょうか．

質問 12： 問題 5-1 は準測地線であることを示せばよいというのは分かりましたが，$[\hat\gamma(t)]^T = \mathbf{0}$，すなわち $\ddot u - 2\dot u\dot v \tanh v = 0$, $\ddot v + \operatorname{sech} v \operatorname{csch} v(\dot u^2 + \dot v^2) = 0$ となるためにはパラメータをどう取ればよいのですか?

お答え： 弧長にとればよい．準測地線はパラメータを弧長にとりなおせば測地線となります．

質問 13： 5-1 のパラメータを「適切にとれば」のところでよくわからなくなりました．問 5.3 にのっとってやろうとしたけど，2 回微分があまりにめんどうな気がしてやめました． **お答え：**そうですか．

質問 14： 問題 5-1 を考えたのですが，測地線の方程式が $\ddot u - 2\dot u\dot v \tanh v = 0$ と $\ddot v + \frac{\operatorname{sech}^2 v}{\tanh v}(\dot u^2 + \dot v^2) = 0$ になりました．$u^2 + \cosh^2 v = a^2$ を両辺 t で微分していって得られる式 $u\dot u + \cosh v \sinh v \dot v = 0$ と $\dot u^2 + u\ddot u + (\cosh^2 v + \sinh^2 v)\dot v^2 + \cosh v \sinh v \ddot v^2 = 0$ を用いて測地線の方程式が成立していることを示すのかと思いましたが，示せずに断念．問 5-3 の結果を使おうとも考えたのですが，$\dddot{\hat\gamma}$ の式があまりに複雑で，この先 $\hat\nu(t) \cdot (\ddot{\hat\gamma}(t) \times \dot{\hat\gamma}(t))$ を計算し，$u^2 + \cosh^2 v = a^2$ およびこれを両辺 t で微分していって得られる式をもちいながら $\hat\nu(t) \cdot (\ddot{\hat\gamma}(t) \times \dot{\hat\gamma}(t)) = 0$ を示すのはかなり大変だと判断し，こちらも断念してしまいました．どのようにすればよかったのでしょうか．
お答え：かなり大変な計算をすればよいのだと思います．やってみましょう．

質問 15： 少し前の授業で $K = 0$ の曲面について扱いましたが，$K = 0$ の曲面の正確な地図は作ることができますか.

お答え： 教科書 §15 の補題 15.2，および付録 B-4.

質問 16： 試験の時に $[\boldsymbol{x}]^N = (\boldsymbol{x} \cdot \nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$，$[\boldsymbol{x}]^T = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$ を証明なしで直接使えますか?

お答え： なにも指示されていなければ使えます．証明してほしい場合はそのような誘導をします．

質問 17： 教科書 p. 95 命題 9.2 証明．法曲率 κ_n を求める際に uv 平面における曲線の初速度ベクトルを用いているのですが，なぜ初速度ベクトルなのでしょうか．$\kappa_n(s) := \gamma''(s) \cdot \nu$ だから $s = 0$ における法曲率を求めていることになっているように思えます． **お答え：**確かに少し説明不足ですね．講義資料 5 の質問 10 参照.

質問 18： 教科書の最後の方のページの参考文献は全て読まれているのですか．だとしたら驚異的です.

お答え： いいえ．引用をしている箇所についてはチェックしていますが.

質問 19： $\mathcal{L}$ が Ł と出力されていたのを，マクロの設定を間違えたとおっしゃっていましたが，どういう設定をしていたのですか？ **お答え：**もともと `\L` は Ł と定義されています．そこで `\renewcommand{\L}{\mathcal{L}}` という設定をしていましたが，`hyperref.sty` を読み込むと，その定義がさらに上書きされてしまうようなのです．すなわち「マクロの設定」というよりは「マクロを読み込む順番の設定」といった方が正しいかも知れません.

質問 20： 講義では「$\mathbb{R}^3$ で $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ はコンパクトだから有界閉集合で...」とつづいてそこから最大値・最小値が存在するという説明へとつながっていったと思うのですが，S はそもそも有界閉集合であることはコンパクトなどを考えずとも明らかだと思うのですがいかがですか． **お答え：**講義では球面ではなく円周 S^1 に関する議論を行ったはず．伝わっていませんか?

質問 21： 特にないです． **お答え：**me, too.

6 ガウス・ボンネの定理

■ガウス・ワインガルテンの方程式． パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν，第一，第二基本量をそれぞれ $E, F, G; L, M, N$ とする．このとき，各点 (u,v) に対して $\{p_u, p_v, \nu\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える（正規直交とは限らない）．とくに $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は各 (u,v) に対して 3 次正則行列を与える．この $\mathcal{F}$ を曲面の**ガウス枠**ということにする．

命題 6.1 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** 上の状況で

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda$$

が成り立つ．ただし

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

Γ_{jk}^i はクリストッフェルの記号（テキスト 108 ページ，式 (10.6)），$A = (A_j^i)$ はワインガルテン行列（テキスト 82 ページ，式 (8.4)) である．

証明. テキスト 108 ページ (10.7) 式（ガウスの公式）とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）からすぐにわかる． □

系 6.2. 命題 6.1 の状況で,

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

が成り立つ．

証明. $\mathcal{F}$ が正則行列に値をとる関数であることと，$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ から従う． □

注意 6.3. 曲面 $p(u,v)$ が与えられれば，第一基本量，第二基本量が定まる．逆に，与えられた関数 E, F, G, L, M, N に対してそれらを第一，第二基本量にもつ曲面を求めることを考えよう．命題 6.1 の Ω, Λ は第一基本量，第二基本量から定まることに注意して，与えられた E, F, G, L, M, N に対して形式的に Ω, Λ を作り，命題 6.1 の $\mathcal{F}$ に関する偏微分方程式を解けばよいだろう．このような $\mathcal{F}$ が存在するための必要条件が系 6.2 である．実は (u,v) が動く範囲が単連結領域であれば，この条件は十分条件にもなっていていて，対応する曲面が存在することがわかる（曲面論の基本定理；テキスト 179 ページ， 定理 16.2)．

注意 6.4. 曲面論の基本定理から，第一・第二基本形式が曲面を定めるが，「第一基本形式・ガウス曲率・平均曲率」の組では曲面が定まらないことがある．これらの量を保ちながら変形できるような曲面を Bonnet 曲面とよぶ．

2018 年 1 月 18 日

問 6.5. 実数 α に対して

$$p_\alpha(r,\theta) = \left(r\cos(\theta+\alpha) + \frac{\cos(\theta-\alpha)}{r}, r\sin(\theta+\alpha) + \frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}, 2\cos\alpha\log r - 2\theta\sin\alpha\right)$$

と定めると，p_α の第一基本量，平均曲率は α によらないことを確かめなさい．（注：第一基本量が α によらないことと，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）から，ガウス曲率が α によらないことは明らか）．

■面積要素と曲面上の関数の積分． パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ $\bigl((u,v)\in D\bigr)$

$$dA := \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

を曲面上の**面積要素**という．(u,v) の関数 $f(u,v)$ に対して

$$\int_\Omega f(u,v)\,dA := \int_\Omega f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{6.1}$$

と定める．ただし Ω は D の領域で，$\overline{\Omega}$ がコンパクトなものとする．

問 6.6. 積分の定義 (6.1) が曲面のパラメータのとり方によらないことを確かめなさい．

■ガウス・ボンネの定理 曲面上の測地線で囲まれた単連結領域 ΔABC 上で

$$\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi + \int_{\Delta ABC} K\,dA$$

が成り立つ（テキスト 110 ページ，定理 10.6）．さらに，閉曲面 S のオイラー数（テキスト 112 ページ）を $\chi(S)$ とおくと

$$\int_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ（テキスト 112 ページ，定理 10.7）．

問題

6-1 ガウス曲率が負であるような曲面上の 2 点 P, Q を通る測地線が 2 本あるとする．このとき，この 2 つの測地線分は円板と同相な領域を囲まないことを示しなさい．

6-2 回転トーラス（テキスト 69 ページ，問題 6-1）の全曲率を求め，それがオイラー数の 2π 倍になっていることを確かめなさい

6-3 曲面 $p(u,v) = \bigl(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v - \tanh v\bigr)$ $(v>0)$ を考える．uv 平面上の曲線

$$u^2 + \cosh^2 v = 2, \quad (u+1)^2 + \cosh^2 v = 4, \quad u = 0$$

に対応する曲面上の曲線は準測地線を与えるが，これらで囲まれる三角形に関してガウス・ボンネの定理が成り立つことを確かめなさい．

6-4 陰関数

$$\bigl((x-2)^2+y^2-1\bigr)\bigl((x+2)^2+y^2-1\bigr)\bigl(x^2+y^2-4^2\bigr)+z^2=0$$

で与えられる図形 S はなめらかな閉曲面を与える．この曲面のオイラー数を求め，ガウス・ボンネの定理が成り立つことを確かめなさい．