2018 年 1 月 25 日 (2018 年 1 月 25 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 7

お知らせ

- 授業評価アンケートにご協力ください．科目コードは $\boxed{\text{MTH.B212}}$.
- 今回の提出課題はありません.
- 1 月 18 日に配布した「定期試験予告」の日付が誤っていました．（誤）1 月 18 日 ⇒（正）2 月 1 日.
なお，この修正は講義中に 10 回程お伝えしておりますので，「誤り修正ポイント」には加えません.

前回までの訂正

- 閉曲面の全曲率の定義がどこにもなかったそうです：$\displaystyle\int_S K\,dA$（$dA=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$，$E$, F, G はパラメータ (u,v) に関する第一基本量).
- 教科書 112 ページ 10 行目：$\mathbb{R}^3$ の有界閉集合 ⇒ $\mathbb{R}^3$ の境界をもたない有界閉集合（正誤表参照）
- 講義資料 6, 1 ページ，お知らせの 1 行目：定期試験お予告 ⇒ 定期試験の予告
- 講義資料 6, 1 ページ，前回までの訂正の 3, 4 項：講義資料 5，下から ⇒ 講義資料 5，3 ページ，下から
- 講義資料 6，4 ページ (6.1) 式：

$$\int_\Omega f(u,v)\,dA := \int_\Omega f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \quad\Rightarrow\quad \int_\Omega f(u,v)\,dA := \iint_\Omega f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

- 講義資料 6，4 ページ 13 行目，右辺の積分の下：$\mathit{\Delta ABC}$ ⇒ $\triangle\mathrm{ABC}$
- 定期試験予告，下から 2 行目：試験の 2 月 8 日 ⇒ 2 月 8 日

授業に関する御意見

- 定期試験の際に，計算用紙として白紙の紙が一枚追加で欲しいと思ったのですが，それは難しいのでしょうか.
  山田のコメント： 実際やったことがあるのですが，ほとんど利用されておらず，利用した人も，答案用紙の裏面を使っていなかったりしたので，やめました．答案用紙の裏面だけでは不足でしょうか.
- 曲面の全曲率の定義が，講義資料にも教科書にものっていなかったので，どちらかには載せて欲しかったです． **山田のコメント：** ごめんなさい.
- 擬球の式を何回も見たので覚えてしまいました． **山田のコメント：** me, too.
- 閉曲線 $\gamma(s)$（$0 \leqq s \leqq l$）.. における $\int_0^l \kappa(s)\,ds = 2\pi\times(\gamma(s)$ の回転数) と閉曲面 S についてのガウス・ボンネの式 $\int_S K\,dA = 2\pi\times(S$ のオイラー数) が似ていて感動した．何か関係があるのでしょうか...?
  山田のコメント： 平面曲線の全曲率は「外的」な量なので，少し気分が違いますが，テキスト §13 で紹介した証明では，§3 の定理 3.2（平面単純閉曲線の回転数は ±1）を使っていますね.
- 今度からドーナツを切り分ける時は，測地線に沿って丁寧に切ろうと思います.
  山田のコメント： どうぞ．しかし，ドーナツは切り分けないで食べるのが普通ではないでしょうか.
- 今回の課題 (6-3) は直接計算しようとしたところ，かなり計算のしにくい値が出てきてしまい，Wolfram Alpha に頼ることになってしまいました.（手計算ができるという意味で）正統な方法があれば知りたいです.
  山田のコメント： (u,v) 平面上の第一基本形式をもちいて内積を計算すれば...と思ったのですが，そうやっていますね．手計算は（ぎりぎり）無理ではないと思います.
- なぜ測地線という名を付けるだろう．“地” を “測る” 曲線ですかね.
  山田のコメント： はい．最短線であるということから，距離を測ることに関係がありますね.
- クリストッフェルの記号が全然覚えられないです．テストに出ないことを祈ります.

山田のコメント： 必要なら書いておきます．これは記号が悪いので，$E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$ と書けば，

$$\varGamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_1\end{pmatrix}\right)$$

と覚えやすい式になります．ただし $(u, v) = (u^1, u^2)$.

- 試験がんばります． **山田のコメント：** どうぞ

質問と回答

質問 1： 教科書 p106 上から 6〜7 行目,

$$\int_0^l \left.\frac{\partial}{\partial w}\right|_{w=0} \sqrt{\gamma_w'(s)\cdot\gamma_w'(s)}\, ds = \int_0^l \gamma_0'(s)\cdot\left(\left.\frac{\partial}{\partial w}\right|_{w=0}\gamma'(s)\right)\frac{ds}{|\gamma_0'(s)|}$$

となっているのですが，右辺の ds の分母 $|\gamma_0'(s)|$ はどこから来ているのかよく分かりません.

お答え： 零点をもたないベクトル値関数 $\boldsymbol{v}(w)$ に対して,

$$|\boldsymbol{v}|' = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}' = \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})'}{2\sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}} = \frac{2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'}{2|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{v}|}$$

質問 2： $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ と定義するのは $|p_u \times p_v| = \sqrt{EG - F^2}$ が成り立つということですか.

お答え： はい．面積を計算するときの積分の「中身」ですね.

質問 3： Moving frame は p_u と p_v が常に直行していなければ定義できないのですか.

お答え： p_u, p_v にグラム・シュミットの直交化を施せばよいので，p_u, p_v 自身が直交する必要はありません．教科書 141 ページ参照.

質問 4： 双曲平面がよく分からなかったのですが，曲面を平面の一部に対応させて拡張したもの，という認識でよろしいのでしょうか.

お答え： 普通はそう考えないように思います．教科書 118 ページのように天下り的に定義するのが普通です.

質問 5： 教科書では，向き付可能な曲面でガウス・ボンネの定理が成立すると書いてありますが，向き付可能でない場合，ガウス・ボンネの定理は成立しますか.

お答え： はい．教科書 150 ページ，脚注 10 を参照.

質問 6： 問題 6-1 に関して，ガウス曲率が負であるような曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ 2 つの測地線分に囲まれた部分（境界を含む）は「線分（原文ママ：円板？）と同相なもの」「$\mathbb{R}^2$ における開円板の補集合と同相なもの」以外にあるでしょうか.

お答え： たとえば g 人のりの浮袋の「穴」の部分をはさんで 2 つの測地線をとるとどうなるでしょう.

質問 7： 問題 6-1 について．$K < 0$ であるような曲面上の 2 点 P, Q を通る 2 本の測地線分が円板と同相な領域を囲んでいるとすると，この領域 S は（有界閉集合である）円板と同相なので，有界閉集合．すなわち S は閉曲面．よってガウス・ボンネの定理より $\int_S K\, dA = 2\pi\chi(S)$ (1) である．$K < 0$ より (1) の左辺は負である．しかし (1) の右辺が負でないことから矛盾を導こうとしたのですが，$\chi(S)$ を求めようとすると，$\chi(S)$ の種数は S の "穴" の数を考えて 0 なので，$\chi(S) = 2 - 0 \times 2 = 2$ と思ったのですが，S が正方形のとき（これは円板と同相）$\chi(S) = 4 - 4 + 1$ となり $\chi(S)$ は 1 か 2 かわからなくなってしまいました．どちらにしろ，(1) の右辺は正となり，矛盾は示せますが，すると今度は「測地線」という条件を使っていないので，問題 6-1 の命題は「測地線」の条件を外しても成り立つことになりますが，それはイメージ的にはさすがにおかしいと思います．様々な矛盾が発生しているので，なにかおおきな勘違いをしていると思うのですが，どこが間違っているのでしょうか.

お答え： まず，閉曲面の定義：訂正の項目参照．境界がある場合は考えていません．境界のない閉曲面では「穴」の数でオイラー数が決まりますが，境界がある場合は，境界のオイラー数が影響します．結論からいうと円板のオイラー数は 1.

質問 8： 擬球は追跡線の回転体（原文ママ：回転面）であり，それはトランペットのような形が上下逆に対称的になっているものと認識していいですか（下図（略）のような）．この図で考えると，擬球上の測地線を伸ばすとその測地線はある点から上下対称になりますか．そうなれば 2 本の測地線で囲めてしまうのですが．正則でない（特異点）ところを考えているから無意味であると言われるだけですかね.

お答え： 問題 6-1 の件ですね．特異点から測地線を伸ばすのはいろいろと微妙な議論があるのですが，この例の場合は対称移動をすれば伸ばすことができてしまいますね．問題 6-1 は，内部の領域でガウス・ボンネの定理を適用するのだから，領域全体でガウス曲率と面積要素が定義されていなければなりませんが，ご質問の状況はそうなっていません．実は「特異点」の部分の「曲率」を考える必要があって（特異曲率：Saji-Umehara-Yamada, 2009）ガウス・ボンネの定理を拡張することでご指摘の状況を解釈することができます（梅原・佐治・山田「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何」丸善出版 2017）．

質問 9： 教科書では，ガウス・ボンネの定理の $\iint_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$ から $\chi(S)$ が不変であると結論されていると思いますが，ガウス・ボンネの定理を使わずに証明することは可能でしょうか．

お答え： むしろ，ガウス・ボンネに頼らない方が普通．オイラー数が位相不変量であることは，適切な位相幾何学の入門書を参照せよ．たとえば，教科書の文献リスト [25]，[18]．

質問 10： 教科書 p115, l2 の，穴が g 個ある閉曲面のオイラー数の式「$\chi(S) = 2-2g$」(10.12) はどのように導けるのですか? **お答え：**あっています．

質問 11： トーラスのオイラー数調べてたら，頂点 1 つ，辺 3 つ，面 2 つで分割できることをしり，地味にびっくりした．

お答え： そうですか．

質問 12： $\int_S K\,dA$ と $\iint_S K\,dA$ はどちらの書き方でもただしいですか?

お答え： はい．dA という「面積要素」で積分する，というつもりのときは 1 本で書くことが多く，$du\,dv$ と書いて「重積分」と思うときには 2 本で書くことが多いような気がします．

7 その他

■曲面論の基本定理 教科書付録 B-9.

- 第一基本量，第二基本量で曲面は定まる．
- 曲面が存在するための基本量の条件
  - ガウス方程式（驚異の定理）
  - コダッチ方程式

■測地線に関すること

問 7.1. 平面上の 2 点を結ぶ線分は 2 点を結ぶ曲線のうち最短の長さをもつ．逆に平面上の 2 点を結ぶ最短の曲線は 2 点を結ぶ線分である．

- 曲面上の二点を結ぶ曲線のうち長さが最小のものは，準測地線（すなわち，パラメータを弧長にとりなおすと測地線）である．
- 曲面上の点 P を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線はただ一つ存在する．

■ガウス曲率

- ガウス曲率が恒等的に 1 である曲面は局所的には単位球面の一部分と長さをたもつ対応をもつ．
- ガウス曲率が恒等的に 0 である曲面は局所的には平面の一部分と長さをたもつ対応をもつ．
- ガウス曲率が恒等的に -1 である曲面は局所的には双曲平面の一部分と長さをたもつ対応をもつ．

■平均曲率

- あたえられた空間曲線を境界にもつ曲面のうち面積が最小となるものは，平均曲率が恒等的に 0 となる曲面（極小曲面）である．
- 与えられた体積 V の領域を囲む閉曲面のうち面積が最小なものは平均曲率が一定となる．

2018 年 1 月 25 日 (2018 年 1 月 25 日訂正)