2018 年 2 月 1 日 10 時 45 分 ~12 時 15 分 (2018.02.02. Ver 3.)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白・裏面・~~所定の計算用紙~~を使用してください（採点の対象ではない）.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. 問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **2 月 8 日**の授業の際に返却いたします. 当日出席しなかった方は, それ以降**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします.
- 採点に関する疑問・クレイムなどは **2018 年 2 月 24 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください. 上記期日以降は, たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません. ご了承下さい. また, 返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A [70 点]

次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{16}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a**, **b** をつけた部分の理由を答えなさい[1].

$\mathbb{R}^2$ の領域 $D := \{(u,v) \mid -\pi < u < \pi\}$ で定義された $\mathbb{R}^3$ に値をとる 2 変数関数

$$p(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \qquad (-\pi < u < \pi, v \in \mathbb{R})$$

は$_{\mathbf{a}}$曲面の正則なパラメータ表示を与えている. ここで $\nu(u,v) = \boxed{1}$ とおけば, ν は p の単位法線ベクトル場で, p の第一基本形式 ds^2, 第二基本形式 $I\!I$ は次のように書ける：

$$\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \boxed{2}\,du^2 + 2\boxed{3}\,du\,dv + \boxed{4}\,dv^2 \\ I\!I &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \boxed{5}\,du^2 + 2\boxed{6}\,du\,dv + \boxed{7}\,dv^2. \end{aligned}$$

これらから, p のガウス曲率 K, 平均曲率 H は各々 $K = \boxed{8}$, $H = \boxed{9}$ となる.
領域 D の部分閉領域

$$D_{\varepsilon,M} := \{(u,v) \mid -\pi + \varepsilon \leqq u \leqq \pi - \varepsilon, -M \leqq v \leqq M\} \qquad \Big(\varepsilon \in (0,\pi), \quad M \in (0,+\infty)\Big)$$

に対応する曲面の部分の面積 $\alpha(\varepsilon, M)$ は, 面積要素 $dA = \boxed{10}\,du\,dv$ を用いて

$$\alpha(\varepsilon,M) := \iint_{D_{\varepsilon,M}} dA = \boxed{11}, \qquad \lim_{\varepsilon \searrow 0, M \to +\infty} \alpha(\varepsilon,M) = \boxed{12}$$

となる[2]. また, $D_{\varepsilon,M}$ の全曲率（全ガウス曲率）$\kappa(\varepsilon,M)$ は次を満たす：

$$\kappa(\varepsilon,M) := \iint_{D_{\varepsilon,M}} K\,dA = \boxed{13}, \qquad \lim_{\varepsilon \searrow 0, M \to +\infty} \kappa(\varepsilon,M) = \boxed{14}.$$

領域 D 上の曲線 $\gamma(t) = (0,t)$ に対応する曲面上の曲線 $\hat\gamma(t) = p \circ \gamma(t)$ の加速度ベクトルは, $\ddot{\hat\gamma}(t) = \boxed{15} + \boxed{16}$ と, 点 $\hat\gamma(t)$ において曲面に接するベクトル $\boxed{15}$ と法線方向のベクトル $\boxed{16}$ の和に分解できる. とくに $\hat\gamma(t)$ は曲面上の$_{\mathbf{b}}$準測地線になる.

裏面に続く

[1] 空欄に入れる式は, 一般的な定義式ではなく, (u,v), ε, M, t などの具体的な式である.
[2] $\varepsilon \searrow 0$ は ε を正の方から 0 に近づける, すなわち右極限を表す.

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔問題 2〕

問題 B [20 点] 関数 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-1$ に対して，

$$S:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,z)=0\}\subset\mathbb{R}^3$$

は $\mathbb{R}^3$ のなめらかな曲面をあたえる．

(1) S 上の点 (a,b,c) における S のガウス曲率を a, b, c を用いて表しなさい．

(2) S 上のガウス曲率が 0 となるような点はどのような図形か．

問題 C [10 点] $\mathbb{R}^2$ の領域 D 上で定義された写像 $p\colon D\to\mathbb{R}^3$ が曲面の正則なパラメータ表示を与えているとする．このとき，p の単位法線ベクトル場 ν を原点を始点とするベクトルとみなせば，D から球面 $S^2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,|\, |\boldsymbol{x}|=1\}\subset\mathbb{R}^3$ への写像と考えることができる．これを p のガウス写像という．領域 D の部分閉領域 Ω 上でガウス写像が 1 対 1 となるとき，ν による Ω の像の面積を p の第一基本量，第二基本量を用いて[3] 表しなさい．

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

[3]第一基本量，第二基本量から定まるガウス曲率や平均曲率も用いてよい．

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 各 5 点; ただし 2–4/5–7 はそれぞれまとめて 5 点ずつ

a の理由

$p_u = \cosh v(-\sin u, \cos u, 0)$, $p_v = (\sinh v\cos u, \sinh v\sin u, 1)$ だから

$p_u\times p_v = \cosh v(\cos u, \sin u, -\sinh v)$,　　したがって　　$|p_u\times p_v|^2 = \cosh^4 v \geqq 1.$

すなわち，各 $(u,v)\in D$ において p_u と p_v は一次独立.

p_u と p_v の第三成分を比較して，一方は 0，他方は 0 でないことから一次独立，
という結論を出した方 1 名（不正解）．$p_u = \mathbf{0}$ という可能性を除外しなければ
ならない

$1 + \sinh^2 v = \cosh^2 v$ ですね．気づいていない方多数

1	$(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, -\tanh v)$
2	$\cosh^2 v$
3	0
4	$\cosh^2 v$
5	-1
6	0
7	1
8	$\dfrac{-1}{\cosh^4 v}$
9	0
10	$\cosh^2 v$
11	$2(\pi-\varepsilon)\left(M + \frac{1}{2}\sinh 2M\right)$
12	$+\infty$
13	$-4(\pi-\varepsilon)\tanh M$
14	-4π
15	$\tanh t(\sinh t, 0, 1)$
16	$(\operatorname{sech} t, 0, -\tanh t)$

b の理由

$\dot{\hat{\gamma}}(t) = (\sinh t, 0, 1)$ は $\left[\ddot{\hat{\gamma}}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ と平行である．

13, 14：Ver.1 ではマイナスが抜けていました．ご指摘ありがとうございました

13: $\tanh x$ は奇関数だから，$\tanh(-M) - \tanh M = -2\tanh M$．気づいていない人多数（不正解ではない）

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 各 10 点

(1)

$\operatorname{grad} F = 3(x^2, y^2, z^2)$ は S 上で零ベクトルにならないので，S はなめらかな曲面になる．とくに $z \neq 0$ となる点の近くでは S は $z = z(x, y)$ とグラフ表示できる．このとき，$x^3+y^3+z(x,y)^3-1=0$ を微分して

$$z^2 z_x + x^2 = 0, \qquad z^2 z_y + y^2 = 0 \qquad \text{なので} \qquad 1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{1}{z^4}(x^4+y^4+z^4).$$

さらにこれらを x, y で微分すれば

$$z^2 z_{xx} + 2z(z_x)^2 + 2x = 0, \qquad z^2 z_{xy} + 2z z_x z_y = 0, \qquad z^2 z_{yy} + 2z(z_y^2) + 2y = 0$$

すなわち $z^2 z_{xx} = -2(z(z_x)^2 + x)$, $z^2 z_{xy} = -2z z_x z_y$, $z^2 z_{yy} = -2(z(z_y)^2 + y)$ なので，このへんまで 5 点

$$\begin{aligned} z^4(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) &= 4(yz(z_x)^2 + xz(z_y)^2 + xy) = 4\left(yz\frac{x^4}{z^4} + xz\frac{y^4}{z^4} + xy\right) \\ &= \frac{4xy}{z^3}(x^3+y^3+z^3) = \frac{4xy}{z^3}. \end{aligned}$$

したがって，ガウス曲率は $K = \dfrac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2} = \dfrac{4xyz}{(x^4+y^4+z^4)^2}$.

とくに $(x, y, z) = (a, b, c)$ では

$$K = \frac{4abc}{(a^4+b^4+c^4)^2}.$$

(2)

ガウス曲率が 0 となる点は x, y, z 座標のうち少なくとも 1 つは 0 となる点である．したがって，

$$(xy \text{ 平面上の曲線 } x^3+y^3=1) \cup (yz \text{ 平面上の曲線 } y^3+z^3=1) \cup (zx \text{ 平面上の曲線 } z^3+x^3=1)$$

という，3 つの座標平面上の曲線の和集合である．

$(x^3+y^3=1) \cup (y^3+z^3=1) \cup (z^3+x^3=1)$ では不正解．“xy-平面上” か “$z=0$” のような条件が必要．

図を描いているが，誤っているものは（図の誤り自体は）原点していない．

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 10 点

ワインガルテンの公式から

$$\nu_u = -A_1^1 p_u - A_1^2 p_v, \qquad \nu_v = -A_2^1 p_u - A_2^2 p_v \qquad A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし E, F, G, L, M, N は p の第一・第二基本量である．したがって，

$$\nu_u \times \nu_v = (A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2) p_u \times p_v = K p_u \times p_v \qquad (K \text{ はガウス曲率})$$

となるので，$\nu\colon D \to \mathbb{R}^3$ による Ω の像の面積は

$$\iint_\Omega |\nu_u \times \nu_v|\, du\, dv = \iint_\Omega |K|\, |p_u \times p_v|\, du\, dv = \iint_\Omega |K|\, dA \qquad dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

となる．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．何を書いても怒りません．何を書いても怒りません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 4 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1，解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，~~解答用紙 5，~~持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	