2017 年 4 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A1 （MTH.B405）講義資料 2

お知らせ

- 「授業欠席のため指定の提出用紙がない」という理由で適当な紙での課題提出がありました．整理の都合上，用紙は指定のものにしてください．次回からは受け付けません．欠席されたとしても，用紙は講義 web ページでダウンロードできます（まずは探すべきだと思います）.

前回までの訂正

- 擬ユークリッド空間の符号 (s,t) の文字の使い方が講義と講義資料で逆になっていたようです.
- 講義ノート 4 ページ，下から 2 行目：V の表現行列 ⇒ q の表現行列
- 講義ノート 5 ページ 11 行目；5 ページ下から 5 行目；6 ページ下から 6 行目：
  非退化双線形形式 ⇒ 非退化対称双線形形式
- 講義ノート 6 ページ，6 行目：$vectx$ ⇒ $\boldsymbol{x}$
- 講義ノート 6 ページ，2, 3, 4, 11 行目の不等号が逆向き.
- 講義ノート 7 ページ，2 行目の $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n_s$ では，というご指摘がありましたが違います．それでは $\mathbb{R}^n_s$ という未定義の記号をいきなり使ってしまったことになりますね.
  講義ノート 7 ページ，2 行目：このような内積が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを符号 ... ⇒ このような内積が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを $\mathbb{R}^n_s$ と書き，符号 ...
- 講義ノート 8 ページ，下から 3 行目：$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{0}$ の等号は $\neq$，とのご指摘がありましたが，ご指摘が誤りです.
- 講義ノート 9 ページ，下から 5 行目：$\dim W \cap \dim W^\perp$ ⇒ $W \cap W^\perp$ (2 箇所)
- 講義ノート 11 ページ，下から 5 行目：R^n_t ⇒ $\mathbb{R}^n_t$

授業に関する御意見

- ノート p. 8 のベクトルの因果特性の用語が気に成ます．ただ，そう呼ばれているのか，でもきっと意味があって名付けられた用語なんだろうなと思いつつ.　**山田のコメント：** 相対性理論の用語の流用です.
- 非退化な内積が当該空間にどのような特徴を与えるのか，今後ご説明いただけると思うので，非常に楽しみです.
  山田のコメント： ちょっとだけ
- 板書も日本語にして頂いた方が個人的には嬉しいです.　**山田のコメント：** なぜ？
- 講義資料が見やすく分かりやすく驚きました.　**山田のコメント：** そうですかねぇ？
- 大変丁寧な講義展開で，内容も興味ふかいと感じましたが，自身の学科の講義との兼ね合いで残念ながら出席できなさそうです．今後は山田先生の HP から資料のみで勉強させて頂くかと思います．一つ悔やまれるのは $\mathrm{O}(2,1)$ のまとめ方についていまひとつスマートなものを思いつけなかったことです.　**山田のコメント：** 残念．$\mathrm{O}(2,1)$ は双曲線関数を用いると綺麗に書けます.
- シラバスの内容を初日の朝に知ったのですが，おもしろそうな話題でわくわくしています．/これからの授業が楽しみです.
  山田のコメント： あまり期待しないでください.

質問と回答

質問： 擬ユークリッド空間にはどのような位相を入れるのでしょうか.

お答え： $\mathbb{R}^n_s$ は集合としては $\mathbb{R}^n$ なので $\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相を入れる何か気持ち悪いのですが，$\mathbb{R}^n$ の「ユークリッド位相は線形写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続とする最弱の位相」なので，実は内積を使わずに定義することができます.

質問： 不定値計量をもつ内積空間のうち，ユークリッドベクトル空間（符号 $(n,0)$） とミンコフスキーベクトル空間（符号 $(n-1,1)$）は名前がついていますが，他に名前のついている空間はあるのか，また，この代表的な 2 空間がたくさん特別に性質をもっているのか気になりました．$\mathbb{R}^3$ の中で考えると，符号は $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$ なので，上の 2 つの空間が代表されているのであって，もっと次元が高い場合はさらに特別な空間があるのでは? と疑問に思いました．

お答え： 符号数 $(n,0)$ はユークリッド幾何学が成り立つ空間なので特別．$(n-1,1)$ は相対性理論の舞台なので特別．その他に (m,m) のときを neutral というようです．$\mathbb{C}^m$ の要素 $\boldsymbol{z}={}^t(z_1,\dots,z_m)$ に対して，$\langle \boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle=\mathrm{Re}(z_1^2+\dots+z_m^2)$ と定めると，これは $\mathbb{R}^{2m}=\mathbb{C}^m$ の（実）2 次形式を与えますが，この符号は (m,m) です．

質問： プリントの擬ユークリッドベクトル空間のところで $n \geqq 2$ となっていますが，$n=1$ の時は考えませんか?

お答え： $n=1$ のときは，符号数は $(1,0)$ か $(0,1)$ ですが，$(0,1)$ のときは内積全体の符号を逆にすれば $(1,0)$ の場合に帰着できるので，とくに擬ユークリッド空間を考える必要がありません．

質問： 今回の講義の最後のあたりで「連結成分が 4 つ存在し，それらを隔てているものが光速の壁に相当する」といったことをおっしゃっていましたが，これは，我々の世界とは別にあと 3 つ違う世界が存在することが相対論的に予測されているということでしょうか． **お答え：**ちょっと違います．今回少しだけ説明します．

質問： 退化してしまう双線形形式を内積（のようなもの）とする線形空間（内積空間の退化部分空間でもいいです）を考えるとき任意の元との内積が零で，自身は零でない元というのは，幾何的に考えるときどのようなベクトルとなるのでしょうか． **お答え：**「幾何的」の語で何を求めているかよくわかりませんが，今回少しだけ説明します．

質問： 定義 1.19 の空間的，時間的，光的と呼ばれる由来はありますか?

お答え： 日本語が変．「呼ばれる」の主語がありません．これらの用語は相対性理論からの借用．今回少し説明します．

質問： 今回扱った双線形形式が，この授業で扱うユークリッド空間や擬ユークリッド空間の超曲面の微分幾何学を考察する以外にどのような場面で現れるのでしょうか．また，無限次（原文ママ；無限次元のことか？）のベクトル空間における双線形形式がどのような場面で応用されるのでしょうか．

お答え： 前半：今回少し説明するがそれだけではない．「整数環は数学のどのような場面に現れるのでしょうか」と同じレベルの質問．いくら答えても答えきれないし，それを求めはいないはず．後半：ヒルベルト空間はご存知？

質問： Hilbert 空間を定義する「内積」は (1) 双線形性 (2) エルミート性（実では対称性）(3) 正値性と非退化性，により定義されますが，これからこの講義で扱う「内積」は負値を含めて考えることと理解しました．内積の概念を拡大する場合に (3) から非退化性を残している理由は何かありますか? たとえば非退化性があるので扱いやすくなるとか，逆に非退化性をはずしてしまうと論理の組み立てがうまくいかなくなるとか．逆に (3) の非退化性をはずして正値性のみとした内積の概念の拡大もありうるのでしょうか．

お答え： 補足すると「不定値を含む」．負値 2 次形式は全体の符号を変えれば正値にできるので正値内積と本質的に違いはない．正の符号と負の符号が混在するような内積がここで考えるもの．対象を有限次元に限っているので符号の議論が容易にできることに注意してください．非退化性をはずすと，写像 $\boldsymbol{x}\mapsto\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$ が核をもつ可能性があり，たとえば「直交直和分解」などに影響を与えます．もちろん退化した 2 次形式を扱うこともありますが，ここでは簡単な「非退化 2 次形式」のみをあつかうことにします．ちなみに正値 2 次形式は自動的に非退化です．

質問： どのような歴史的背景があって，線形代数で学んだような内積の定義がうまれ，また非退化な内積へと一般化されたのでしょうか． **お答え：**その順序は自明でしょうか．様々な場面で具体的な 2 次形式が現れ，それらから抽象的な性質が抽出されたと考えるべきではないでしょうか．

質問： Riemann metric (原文ママ：Riemannian metric と言うべきか)，pseudo Riemann metric が R^n の（この講義における）内積として定まりますが，これは index の符号によって定めているので，自然に感じます．もっとある意味不自然な $\mathbb{R}^n$ の内積としてはどのようなものがあるのでしょうか．

お答え： ご質問の意味がわかりません．$\mathbb{R}^n$ の内積（すなわち非退化な双線形対称形式）は正則な n 次対称行列全体と同一視されますよね．とくに正規直交基をとれば $J_{s,t}$ で定まる内積と思えます．

質問： 双線形形式を定義することは，今まで学んだ線形代数に対し，どのような変化をもたらすのか？

お答え： なにも変化しない．

質問： シンプレクティック幾何の話題に触れていただけたりしますでしょうか． **お答え：**いいえ．

質問： 次は本講義とは直接関係ないことなので，ついでの時にでもお教えいただければ有難いと思っています．『(M,g): リーマン多様体，∇: (M,g) の Levi-Civita 接続，$\dim M \geqq 2$ とします．このとき次の証明を教えて下さい．(1) $\nabla_k X_i=\nabla_k(g_{ij}X^j)=g_{ij}\nabla_k X^j$. (2) Ricci identity: $(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)X^k=R_{ij}{}^k{}_l X^l$』

お答え： 微分形式 $X_i dx^i$ の共変微分の定義と g が ∇-平行であること，曲率テンソルの定義式から．