2017 年 4 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A1 （MTH.B405）講義資料 3

前回までの訂正

- 講義ノート 13 ページ，1 行目：$(n-s,s) \Rightarrow (n-t,t)$
- 講義ノート 13 ページ，4,6,12,14 行目：$\mathbb{R}^n_s \Rightarrow \mathbb{R}^n_t$
- 講義ノート 13 ページ，5 行目：擬ユークリ g ッド空間 ⇒ 擬ユークリッド空間
- 講義ノート 13 ページ，8 行目：負でない数 s $(0 \leqq s \leqq n)$ ⇒ 負でない整数 t $(0 \leqq t \leqq n)$
- 講義ノート 13 ページ，11 行目，12 行目：$J_{n-s,s} \Rightarrow J_{n-t,t}$
- 講義ノート 13 ページ，15 行目：$\mathrm{O}(n,s) \Rightarrow \mathrm{O}(n,t)$.
- 講義ノート 13 ページ，(2.4) 式（括弧を付ける）：

$$\begin{cases} A_{11} : t\times t \text{ 型}; & A_{12} : t \times n-t \text{ 型} \\ A_{21} : n-t\times t \text{ 型}; & A_{22} : n-t\times n-t \text{ 型} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{11} : t\times t \text{ 型}; & A_{12} : t \times (n-t) \text{ 型} \\ A_{21} : (n-t)\times t \text{ 型}; & A_{22} : (n-t)\times (n-t) \text{ 型} \end{cases}$$

- 講義ノート 16 ページ，8 行目：結露が ⇒ 結論が
- 講義ノート 16 ページ，下から 8 行目：$\mathbb{R}^n_s \Rightarrow \mathbb{R}^n_t$.
- 講義ノート 19 ページ，2 行目：

$$^t\left(-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\right) \Rightarrow {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

- 講義ノート 19 ページ，下から 6 行目（全体にマイナスをつける）：

$$^t\left(-\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 & w_2 \end{vmatrix}\right)$$
$$\Rightarrow {}^t\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 & w_2 \end{vmatrix}\right)$$

- 講義ノート 20 ページ，下から 6 行目から 4 行（“:=” を挿入）：

$$C_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \leqq 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\},$$
$$C^+_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \leqq 0, v_0 > 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\},$$
$$C^-_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \leqq 0, v_0 < 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\}$$

- 講義ノート 20 ページ，6 行目：$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \Rightarrow \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w})$
- 講義ノート 24 ページ，問題 II-2 の $\mathrm{SO}_+(n,t)$ の式：

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n,t) \,\middle|\, \det A = 1, \quad \det A_{11} \geqq 1 \right\}$$

授業に関する御意見

- 特殊相対論を扱ったのは初めてでした．１回の授業の説明でしたが相対論に興味を持ちました．
- 特殊相対性理論にとても興味が湧きました．

  山田のコメント： 何か解説本を読んで見るとよいですね．

- 物理的な意味がわかると面白いです． **山田のコメント：** 山田もよくわかっていませんが．
- 相対性理論のところで，時間の単位をメートルにすることの例えでおっしゃっていた一杯のお茶の単位の話がとてもわかりやすかったです．
  山田のコメント： 出処は，青野修「間違いだらけの物理概念」丸善，1993（なので一次資料にあたったわけではない）．もともと雑誌「パリティ」の連載だったはず．面白い話ですよね．
- 線型代数を発展させてきた数学者達ってすごいなと思います． **山田のコメント：** ですよね．
- 先週は異なる用紙を提出してしまいご迷惑をおかけしました．
  山田のコメント： こちらこそ，手数の最適化にご協力いただきありがとうございます．

質問と回答

質問： 3 次の（山田注：3 次元のことか？）ミンコフスキー・ベクトル空間のベクトル積は $\mathbb{R}^3$ のベクトル積と異なって，第 0 成分の符号を変えていますが，4 次の場合は違う符号の付け方をしていました．どういうことなんでしょうか．

お答え： いくつか訂正しましたのでご確認ください．そのうえで，4 次元の場合は $\boldsymbol{t} = {}^t(t_0, t_1, t_2, t_3)$ を用意して正方行列 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{t})$ を考えます．この行列式の t_0, t_1, t_2, t_3 の余因子をとって，最初の成分にマイナスをつけたものが講義ノートの式です．このようにおくと $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ とローレンツ直交するベクトルが得られることは，余因子展開の公式からわかります．

質問： 物理寄りのテキスト（物理学専門の方による数学解説テキスト）を見ますと，負の符号が行列の右側下方になっています．本講義で左側上方に置いているのと逆なのですが，この違いはなぜ発生しているのですか? たとえば，ローレンツ変換の行列（山田注：ローレンツ内積の定義にでてくる行列のことか）は $\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$ となっています．講義でも触れられていたように思いますが，理由をご教示ください．

お答え： 山田の手元の物理の本では $(-, +, +, +)$ か $(+, -, -, -)$（内積の符号がまるっきり逆）を使っているものが多いようです．文脈によるようなのですが，この講義では，山田が日常的に使っている符号にしています．

質問： Riemann metric に対しては自然に断面曲率が定義されますが，計量に非退化性を仮定しなくとも断面曲率は定義される（うまく定義できる）のでしょうか?

お答え： 非退化性の仮定は必要ですが，正値性を仮定する必要はありません．この講義で（informal に）説明しますが，もしリーマン幾何学をご存知なら『計量が正値でなくても，非退化ならば曲率テンソルは定義できる．断面曲率は，接空間の「非退化 2 次元部分空間」に対して定義できる』．

質問： 特殊相対論と一般相対論の数学的な違いは何ですか？

質問： 一般相対性理論は数学的にはどういうことなのでしょうか？

お答え： ユークリッド空間の幾何と，球面や双曲空間など曲がった空間の幾何との関係と同じです．特殊相対性理論は平坦なローレンツ多様体（ローレンツ・ミンコフスキー空間）の，一般相対性理論は「曲がった」ローレンツ多様体の幾何学ということができます．

質問： 相対性の「法則が Lorentz 変換で不変」の “法則” とは数学的には何を指しているのでしょうか．

お答え： たとえば「方程式」がローレンツ変換で不変．マックスウェルの方程式はローレンツ変換で不変なので，そこから導かれる電磁気学の法則は相対性原理を満たしている．

質問： アフィン空間とは，リー群 $\mathbb{R}^n$ の等質空間のことですか．

お答え： はい．ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の「原点を特別視しない」と思ったもの，といってもよいと思います．

質問： Prop. 1.20 の証明がよくわかりません．時間があれば解説して頂けると有難いのですが．

お答え： 講義の最初にやってみましょう．