2017 年 5 月 2 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A1 （MTH.B405）講義資料 4

お知らせ

- 連休のため，本日の課題提出はありません．
- 講義ノートなどの誤りの指摘は，場所を明記してください．この資料に記述されているような書き方でおねがいします．
- 「講議」という字を書かれた方が少なくとも 2 名．恥ずかしいのでやめて下さい．

前回までの訂正

- 講義中の板書，陰関数定理に関するところで $dF_{\mathrm{P}} \neq \mathbf{0}$ と書くべくところを $dF_{\mathrm{P}} = \mathbf{0}$ と書いていたそうです．
- 講義中の板書で $\operatorname{Im} d\nu \ni \nu^{\perp}$ と書いたそうです．$\operatorname{Im} d\nu \subset \nu^{\perp}$ の誤りです．
- 講義ノート 10 ページ，6 行目：$W \subset \operatorname{Ker}\Psi \Rightarrow W^{\perp} \subset \operatorname{Ker}\Psi$
- 講義ノート 25 ページ，下から 7 行目：
$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})\colon C^{\infty}(N) \ni \varphi \longmapsto \boldsymbol{v}(f \circ \varphi) \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})\colon C^{\infty}(N) \ni \varphi \longmapsto \boldsymbol{v}(\varphi \circ f) \in \mathbb{R}$$
注：φ は「点 $f(\mathrm{P})$ の開近傍で定義された」などの条件はいらないか」というご質問がありました．ここでは「$C^{\infty}(N)$ (N 全体で定義された)」を条件としています．実際には $\varphi = \psi$ が $f(\mathrm{P})$ の近傍で成立するならば $\boldsymbol{v}(\varphi \circ f) = \boldsymbol{v}(\psi \circ f)$ がわかるので，「$f(\mathrm{P})$ の近傍で定義された」としても（どちらでも）よいです．
- 講義ノート 25 ページ，脚注 1：diddferentiable ⇒ differentiable
- 講義ノート 26 ページ，9 行目：
$$\left[(df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, (df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right] Df(\mathrm{P})$$
$$\Rightarrow \quad \left[(df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, (df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right] Df(\mathrm{P}).$$
- 講義ノート 28 ページ，下から 4 行目：
興味がるのは $s = 0$ (ユークリッド空間)，$s = 1$ (ローレンツ・ミンコフスキー空間)
⇒ 興味があるのは $t = 0$ (ユークリッド空間)，$t = 1$ (ローレンツ・ミンコフスキー空間)
- 講義ノート 29 ページ 8 行目：「不定値」は「負定値」の誤りでは，というご質問がありましたが「不定値」で正しいのです．「時間的」という語から負定値のような気もしますが，講義中に少々言い訳したように接空間の計量が不定値であるときに「時間的」という習慣があります．ちなみに，3 次元以上のローレンツ・ミンコフスキー空間の超曲面の接空間に誘導される計量が負定値になることはありません．
- 講義ノート 31 ページ 9 行目：
$\mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}M$ のベクトル $\nu(\mathrm{P})$ で，TPM に直交し，⇒ $\mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t$ のベクトル $\nu(\mathrm{P})$ で，$T_{\mathrm{P}}M$ に直交し，
- 講義ノート 31 ページ 12 行目：系 3.15 より次がわかる ⇒ 命題 3.16 より次がわかる
- 講義ノート 32 ページ 2 行目：$0 = d_X \langle \nu, \nu \rangle = 2 \langle d\nu(X), \nu \rangle$. ⇒ $0 = d_{\boldsymbol{v}} \langle \nu, \nu \rangle = 2 \langle d\nu(\boldsymbol{v}), \nu \rangle$.
- 講義ノート 32 ページ 3 行目：$T_{\mathrm{P}}M \in \nu(\mathrm{P})^{\perp} \Rightarrow T_{\mathrm{P}}M = \nu(\mathrm{P})^{\perp}$
- 講義ノート 32 ページ一番下：
$$W([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = \bigl(V(\boldsymbol{v}_1), \dots, \boldsymbol{v}_n\bigr) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{W}.$$
$$\Rightarrow \quad W([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = \bigl(V(\boldsymbol{v}_1), \dots, W\boldsymbol{v}_n\bigr) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{W}.$$

- 講義ノート 34 ページ 3 行目：
$$Q_c := q_c^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_t \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = c\} \quad\Rightarrow\quad Q_c := q_c^{-1}(\{0\}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_t \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = c\}$$
- 講義ノート 35 ページ，下から 7 行目：$T_{f(\mathrm{P})}M \Rightarrow T_{f(\mathrm{P})}f(M)$
- 講義ノート 36 ページ 4 行目：命題 III-3 ⇒ 命題 3.32

授業に関する御意見

- ガウスの驚きの定理は $\mathbb{R}^3$ の中での（超）曲面でしか一般に成り立たないということを認識して，$\mathbb{R}^3_0$ は人々にとってあたり前の空間だがかなり特殊だということを再確認しました．
  山田のコメント： 今回説明しますが，$\mathbb{R}^3_1$ でもガウスの驚異の定理は成立します．次元が高いとまずい，ということなんです．
- 命題 3.16 の証明中で，内積の符号と勾配ベクトルの符号がうまく打ち消し合っていて，よくできているなと感心しました．
  山田のコメント： そのように作ったので
- 以前から手許にある「一般相対性理論」（須藤靖著）をパラパラめくっています．特殊相対性理論は最初に簡単に触れられているだけなのですが，数学記号がとても簡略化されており，Σ が省略されていたりして多少おどろきです．物理系の方にとってはそれでも意味を理解するのには問題ないものなんだなぁと．
  山田のコメント： “アインシュタインの総和規約” といって，アインシュタイン以来の伝統芸です．微分幾何でもよく使います．慣れると便利なんですけどね．
- 来週の授業のためにしっかり復習しようと思います． **山田のコメント：** Take it easy!

質問と回答

質問： 定義 3.13 で「非退化であるとは空間的または時間的であること」としていますが，「M が空間的であるまたは M は時間的である」という意味ですか？つまり「$\forall \mathrm{P} \in M$ に対し P は空間的または時間的である」ではないということですか? M が連結であれば同値になると思いますが.

お答え： ご質問の最初の意味のつもり．曲面上の，異なる因果特性をもつ点がでてこないように，ここの定義では M の連結性を仮定しています.

質問： P 27 の「点 P が時間的である」の定義について，$n = 2$ のときを考えると $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が空間的であるとき $T_{\mathrm{P}}M$ の内積の符号は $(0, 1)$ で負定値（不定値でない）ので，講議ノート（原文ママ：講義ノートのこと？）の定義に従えば点 P は時間的でないことになる．これだと Prop. 3.17 が成立していないことになる．なので，時間的（空間的）の定義を符号で定めた方がよいと思われます.

お答え： おっしゃるとおりと思います．一応，外の空間の次元を 3 次元以上にしておきましょう.

質問： $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面 M について，法線ベクトルはそれぞれ 2 本とれると思うのですが，ワインガルテン作用素などを考える場合に，どちらの法線ベクトルを扱うなどの決まりはあるのでしょうか．どちらについて考えても同じものが出てくるのでしょうか？

お答え： 単位法線ベクトルを取り替えるとワインガルテン作用素が符号を変えるので，たとえば平均曲率も符号を変えます．もし多様体 M に「向き」が定められているなら，それにしたがって単位法線ベクトルの選び方を指定することができますが，ここでは「単位法線ベクトルを一つ固定したとき」という議論をすることにします.

質問： P33 定義 3.24 W_{P} は $n\times$ 行列ですか? $(n+1) \times (n+1)$ 行列ではないですか? $H(\mathrm{P}) = \frac{1}{n+1} \operatorname{tr} W_{\mathrm{P}}$ では?

お答え： 違います．W_{P} は n 次元ベクトル空間 $T_{\mathrm{P}}M$ の線形変換だから，その表現行列は $n \times n$ にしかなりません.

質問： III-1 (1) で「Q_c が退化超曲面となる」と言う意味は「Q_c は退化点をもつ超曲面となる」という理解であっていますか?

お答え： その通りですが，この場合，結論として，部分多様体となるような全ての点が退化点になってしまいます.

質問： ミンコフスキー空間，あるいはその内部における曲率概念は物理的意味などがあるのでしょうか.

お答え： ミンコフスキー空間自体の曲率は 0.「内部」の意味がわからない．わざわざ「曲率概念」といって「曲率」と言わないのはなぜ？などの疑問が生じますね．ローレンツ多様体の曲率には意味がある，というのは一般相対論の教えるところではありますが.

質問： 補題 3.20 の証明が正直よく分からなかったです.

お答え： どのへんが？とりあえず講義でやってみましょう.