2017 年 5 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A1（MTH.B405）講義資料 6

前回までの訂正

- 講義ノート 43 ページ，11 行目：$\mathit{II}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \Rightarrow \mathit{II}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$
- 講義ノート 44 ページ，下から 2 行目：$\Gamma_{ij}^{j} \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k}$
- 講義ノート 46 ページ，最後：であ．る ⇒ である．
- 講義ノート 52 ページ，下から 2 行目：$\nabla_{\partial/\partial u} f_v = \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{21}^2 f_v \Rightarrow \nabla_{\partial/\partial u} f_v = \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v$
（一般に $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ なので間違いというわけではない）
- 講義ノート 53 ページ，式 (5.3)：

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= \left(X_1\frac{\partial Y_1}{\partial u} - Y_1\frac{\partial X_1}{\partial u} + X_2\frac{\partial Y_1}{\partial u} - -Y_2\frac{\partial X_1}{\partial u}\right) f_u \\ &\quad + \left(X_1\frac{\partial Y_2}{\partial u} - Y_1\frac{\partial X_2}{\partial u} + X_2\frac{\partial Y_2}{\partial u} - -Y_2\frac{\partial X_2}{\partial u}\right) f_v = [X,Y]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= \left(X_1\frac{\partial Y_1}{\partial u} - Y_1\frac{\partial X_1}{\partial u} + X_2\frac{\partial Y_1}{\partial v} - Y_2\frac{\partial X_1}{\partial v}\right) f_u \\ &\quad + \left(X_1\frac{\partial Y_2}{\partial u} - Y_1\frac{\partial X_2}{\partial u} + X_2\frac{\partial Y_2}{\partial v} - Y_2\frac{\partial X_2}{\partial v}\right) f_v = [X,Y]\end{aligned}$$

- 講義ノート 55 ページ，5–6 行目：
行列 G は正定値な対称行列である．とくに $\det g > 0$ が成り立っている．そこで，g の逆行列を
⇒ 行列 $\widehat{I}$ は正定値な対称行列である．とくに $\det \widehat{I} > 0$ が成り立っている．そこで，$\widehat{I}$ の逆行列を
- 講義ノート 56 ページ，2 行目：$\hat{W} := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{\mathit{II}} \Rightarrow \hat{W} = \widehat{I}^{-1}\,\widehat{\mathit{II}}$
- 講義ノート 56 ページ，式 (5.12)：

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g_{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

- 講義ノート 57 ページ，脚注 7：$\langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, T\rangle \Rightarrow \langle \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, T\rangle$

授業に関する御意見

- 内的・外的の説明の例で，船や展望台の話をしていたのが分かりやすくて．面白かったです．物理的にはできませんが，北極と南極とメキシコあたりを頂点とした測地三角形を考えれば，内角の和は誤差の範囲を超えて π より大きくなる気がします（地球の半径も知らないのでイメージですが...）
  山田のコメント： 地球の半径のおおよその値は常識として知っておきましょう．メートルが定義された経緯（18 世紀，フランス）から明らかだと思うんですが．ちなみに，北極と南極を選んでしまうと，この 2 点を結ぶ大円が無数にあるのでちょとまずいですね．
- 地球上で長さや面積，角度をはかれば地球が球面であることがわかると知って少し感動しました． **山田のコメント：** ね．
- ローレンツ空間の性質を，手を動かして考えることが「ありがたい」です．この「ありがたい」は {「おもしろい」＋「苦しい」＋「少しわかった」＋「難しい」＋「ありがたい」} ／5 くらいの気持ちですが，ぴったりとはまる日本語がないので「ありがたい」に代表してもらいました． **山田のコメント：** なるほど
- 幾何の授業が火・金曜日なので提出日が金曜日ですと嬉しいです．または mail での提出は可能でしたら．
  山田のコメント： 整理の都合上，金曜日はちょっと避けたいですが，どうしてもというのであればお昼くらいまでに提出してください．メイルでの提出はフォーマット・提出形式を厳密に守って頂けるという条件で認めます．
  - フォーマット：提出用紙と同じ形式で pdf （すなわち A4 版 2 ページ分の pdf)．手書きのものを scan でよい．なお，学籍番号，氏名などのメタ情報を書く欄はオリジナルから動かさない．

– メイルでの提出の場合，PDF の添付ファイルにて，ファイル名：ASCII 文字（いわゆる半角）で `17M*****-20170516.pdf`．多バイト文字（いわゆる全角文字など）は使わない．メイルの subject は「17M*****-幾何学特論 A1 レポート」，メイル本文には学籍番号，氏名を明記．

質問と回答

質問： 断面曲率は，非退化二次元部分空間の全体から実数への写像でしたが，断体曲率？的な，3 次元版のものはないのでしょうか． **お答え：**内的な量にならないと思います．どうやって定義したらよいかな．

質問： リーマン幾何は内的な量を扱う幾何ということでしょうか？リーマン幾何に，外的な量は出てきますか？

お答え： リーマン多様体を「別な空間の部分多様体」と考えない，という意味で内的な量で記述される幾何学的性質を調べるのがリーマン幾何学．そのリーマン多様体の性質を調べるのに，さらにその多様体の部分多様体を考えることがあって，そいういうものの外的な量はよく現れる．たとえば，測地球面の平均曲率．

質問： 断面曲率は $\mathbb{R}^3$ の曲面の場合のガウス曲率の，リーマン多様体への一般化ということでよいのでしょうか？

お答え： よいです．

質問： $\mathbb{R}^n$ の領域の座標の添字を上付きにすることには，どのような意味があるのですか？習慣に従うこと以上の意味があるのならば，是非知りたいです．

お答え： 技術的には「アインシュタインの和の規約」が使いやすい．「アインシュタインの和の規約」とは「上付きの添字と下付きの添字に同じ文字が現れたら，和の記号がなくても総和をとる」というルール．相対性理論の論文に使われたので，そう言われる．たとえば，行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と書くと，逆行列である，という条件は

$$\sum_k g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \qquad \text{は} \qquad g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$$

のように書ける．たいしたことはないように見えるが，膨大なテンソル計算をするときは結構便利．数学的には，上付き添字はテンソルの反変成分，下付き添字は共変成分を表す．ここでは深入りしない．

質問： 講義ノート V， 52 ページの定義 5.2 において X の Y 方向の共変微分の定義に従って

$$\frac{\nabla}{\partial u} = \nabla_{\partial/\partial u}X, \qquad \frac{\nabla}{\partial v} = \nabla_{\partial/\partial u}Y$$

とありますが，$\nabla_{\partial/\partial u}$ はどのような意味をもつ記号なのでしょうか．（以下略）

お答え： $\nabla_{\partial/\partial u}$ は，多様体の接ベクトル $\partial/\partial u$ 方向の共変微分を表します．とくに，uv 平面上の領域 U の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込み f の像を部分多様体とみなして，uv 平面上の点 P おける $\mathbb{R}^2$ の接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^2$ を $T_{f(\mathrm{P})}f(U)$ と同一視すると，次の関係が成り立ちます：

$$\frac{\partial}{\partial u} \leftrightarrow f_u, \qquad \frac{\partial}{\partial v} \leftrightarrow f_v.$$

質問： 擬リーマン多様体上でも，Levi-Civita 接続は存在するのでしょうか?

お答え： Levi-Civita 接続の存在定理の証明を良く見て下さい．計量の非退化性を使いますが，正定値性はどこにも使われていません．したがって，擬リーマン多様体上でも同じ性質をもつ接続が一意的に存在します．

質問： $S^1(r)$ のガウス曲率は $1/r$，$S^2(r)$ のガウス曲率は $1/r^2$，と思うのですが，$S^n(r)$ のガウス曲率は $1/r^n$ でよいのでしょうか?

お答え： $S^n(r)$ は「半径 r の球面」のことですね．まず「ガウス曲率」という語は 2 次元リーマン多様体（ローレンツ多様体）に対してしか使いません．この講義では，第 IV 回でみたように，曲面に対して外的曲率（ガウス・クロネッカー曲率；ワインガルテン作用素の行列式）とガウス曲率（2 次元リーマン多様体の断面曲率）を区別して扱っています．高次元の超曲面では，ワインガルテン作用素の行列式（これをガウス・クロネッカー曲率という）は一般に内的ではありません．もし，ご質問のガウス曲率の意味が「ガウス・クロネッカー曲率」の意味であれば，だいたい正しいのですが，奇数次元の場合は単位法線ベクトルのとり方により，符号が変わることがあります．

質問： $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^{n+1}$：埋め込み と $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^{n+1}_1$：埋め込みを考えたとき，すなわち，$f$ による超平面（原文ママ：超曲面のことか）が $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれている場合と，$\mathbb{R}^{n+1}_1$ に埋め込まれている場合では，夫々の断面曲率等各種曲率にはどのような関係があるのでしょうか?

お答え： $\mathbb{R}^{n+1}$ と $\mathbb{R}^{n+1}_1$ に作用する等長変換群が異なるので，外の空間の等長変換で不変な量は，互いに関係がないはずです．