

2017年5月23日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A1 (MTH.B405) 講義資料 7

お知らせ

- 5月30日は「補講日」で最終回の授業を行います。提出物はありません。提出物は今回が最終です。

前回までの訂正

- 講義ノート 38 ページ, 下から 6 行目: $ddv(\mathbf{x})dv(\mathbf{y}) \Rightarrow Gdv(\mathbf{x})dv(\mathbf{y})$
- 講義ノート 63 ページ, 8 行目: $S^2(k) \Rightarrow S^n(k)$
- 講義ノート 63 ページ, 15 行目: $x_0 > 0 \Rightarrow x^0 > 0$
- 講義ノート 63 ページ, 16 行目: 式 (??) \Rightarrow 式 (6.3)
- 講義ノート 63 ページ, 一番下: $(\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}S^n(k) = \mathbf{x}^\perp) \Rightarrow (\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}H^n(k) = \mathbf{x}^\perp)$
- 講義ノート 65 ページ, 下から 6 行目: $2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \cdot \rangle \Rightarrow 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$
- 講義ノート 66 ページ, 9 行目: $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ が γ と一次従属 $\Rightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ が $\dot{\gamma}$ と一次従属

授業に関する御意見

- 第 2 クォーターの授業も楽しみになってきました。山田のコメント: よろしく。あまり期待し過ぎないようにね。
- 問題の計算が大変でした。山田のコメント: ですよ。
- 物理の知識は大学入試以降増えていないので勉強しようと思いました。山田のコメント: それもいいかも。
- アインシュタインの和の規約が便利そうであることが理解できました。山田のコメント: 慣れると便利なんですけどね。
- ホテルの例で「完備である」とは、空調設備が整っているとか、アメニティが整っていることのように思える(冷暖房完備とパンフレットに書いてあることが多い)。ぎっしり詰まっているというイメージだと、冷暖房が人の入るスペースなくたくさん設置されている想像になってしまいます。山田のコメント: 今回の喩え話は「完備」の説明ではなく complete の説明ですね。
- 測地線の完備性が元々の意味のものと合致したのが面白かったです。山田のコメント: 証明を調べてみるといいですね。

質問と回答

質問: ローレンツ・ミンコフスキー空間の部分集合 $H^n(k)$ がリーマン多様体になるのは、 \mathbb{R}_1^{n+1} で不定次元 (原文ママ, 計量の負の符号のことか) が 1 次元あって、超平面 (原文ママ, 超曲面のことか) では不定次元を 1 次元落としているので、そこで条件付きで正定値の内積ができてから、という理解で正しいでしょうか。すると \mathbb{R}_k^{n+1} ($k \geq 2$) の超平面はリーマン多様体にならないという理解で正しいでしょうか。

お答え: 正しい。正確には \mathbb{R}_k^{n+1} の超曲面 M の点 P における接空間は n 次元のベクトル空間で、それが \mathbb{R}_k^{n+1} の非退化部分空間ならば、内積の接空間の制限の符号は (n, k) または $(n, k-1)$ 。したがって、超曲面がリーマン多様体になりうるのは $k \leq 1$ のときのみ。ただし、 \mathbb{R}_n^{n+1} の超曲面で、内積の符号が $(0, -n)$ となるものを考えると、計量が負定値になるので、計量の符号を反転させればリーマン多様体と見なすことができます。

質問: 講義ノート 70P に 5 行目に (原文ママ: 70 ページの 5 行目のこと?) 「 γ の像 $\gamma(\mathbb{R})$ は球面 S^n と原点をとおり $\{p, v\}$ で張られる平面との共通部分である」とあります。そして $\gamma(\mathbb{R})$ 上の 2 点 $\gamma(a), \gamma(b)$ ($a < b$) 間の球面上の距離は $[a, b]$ 上の γ の長さで与えられます。 H^n 上の曲線 γ についても同様のことが言えるのでしょうか。つまり「 γ の像 $\gamma(\mathbb{R})$ は H^n と原点を通り $\{p, v\}$ で張られる平面との共通部分である」ならば 2 点 $\gamma(a), \gamma(b)$ の間の H^n 上の距離は $[a, b]$ 上の γ の長さで与えられるのでしょうか。(p, v は例 6.14 または 6.15 で用いられているものとして)。

お答え: (1) H^n 上の、点 p における大きさ 1 の接ベクトル v に対して、点 p で速度 v をもつ測地線は $\gamma(t) =$

$(\cosh t)p + (\sinh t)v$ とかけます。すなわち、 $\gamma(t)$ は $\{p, v\}$ ではられる平面 $\Pi_{p,v}$ にのっています。とくに $\gamma(\mathbb{R})$ は、 $\Pi_{p,v} \cap H^n$ と一致することは容易に示せます。一般に v が単位ベクトルでないときも、 $v \neq 0$ のときは $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}^{1/2} (> 0)$ とおいて $\gamma(t) = (\cosh |v|t)p + (\sinh |v|t) \frac{v}{|v|}$ が測地線となるので同じことがわかる。測地線は、出発点と初速度によって決まってしまうから (定理 6.10) 双曲空間のすべての測地線は、原点をとる平面と双曲空間との共通部分となることがわかる。(2) とくに、相異なる 2 点 $P, Q \in H^n$ はただ一つ存在する。実際、 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ は一次独立だから、 O, P, Q を含む平面はただ一つ存在する。 P と Q を通る測地線は、この平面と H^n の共通部分でなければならない。(3) 双曲空間は完備だから、2 点を結ぶ測地線で、長さが 2 点間の距離を与えるものが存在する (事実 6.12)。2 点を通る測地線はただ一つなのでそれは (2) で与えたものにほかならない。

質問：リーマン多様体 M 上の曲線 $\gamma(t)$ の長さを定義するために、 M の接空間の計量を用いていることに、少し不思議な感じがします。 $L(\gamma)$ の値はあくまでも M の接空間に関する値であり、 M に関する値ではないように思えるのですが、如何ですか？ もっとも、先生が説明して下さったように、「距離 = 速さ × 時間」ということを当然と思えば、とくに問題ないとは思いますが。

お答え：多様体の接空間は「多様体の線形近似」。多様体は無限に小さい部分では接空間と同じものとみなせるので、無限に小さい長さは接空間上の長さのみなせる。そのような無限小を足しあせて目に見える量にする技が「積分」。

質問：VI-1 で求められているものが (1) 例 6.14 の形で $1/\sqrt{k}$ の半径を考慮したものなのか、(2) 微分方程式の解のようなものなのかよくわかりません。自分としては (1) しか考えられないのですが。

お答え：講義では (2) で測地線を求めてはいません。講義ノートにある球面の測地線の議論を真似すれば結構です。

質問：球面及び双曲空間の測地線の式 (例 6.14, 例 6.15) はどのように導き出すのですか？

お答え：加速度は法線方向を向いているから測地線であることは自明。球面の場合は「大円」ということは常識として知っているはずなので、そのパラメータ表示を作ればよい。それを真似れば双曲空間の測地線の式はすぐわかる。

質問：授業の途中に、直線を一般化したのが測地線という話がありましたが、ユークリッド空間では 2 点を結ぶ直線 (の一部) が距離になっていますが、一般には 2 点を結ぶ測地線の長さの最小値が距離になっています (山田注：完備ならばそうですね)。これはユークリッド空間では任意の 2 点を結ぶ測地線は一本しか存在しないということになると思いますが、ユークリッド空間以外にも (ユークリッド空間とは等長的でない) 任意の 2 点間を結ぶ測地線は 1 本となる曲面は存在しますか。お答え：双曲空間がまさにそれ。

質問：球面の測地線は大円 (great circle) の一部であります。一葉双曲面や二葉双曲面の測地線はどうなのでしょう。

お答え：どんな計量を入れるかによって違う。 \mathbb{R}_1^{n+1} の超曲面 Q_c としての二葉双曲面なら、例 6.15。

質問：準測地線は初めて聞きましたが、準測地線の方がパラメータのとり方によらないので、一般的に見えそうですが、測地線がパラメータのとり方によることを逆に理用 (原文ママ：利用) して、測地線の定義域の一意性から完備を定義するのは面白いなと思いました。お答え：ですよね。

質問：リーマン多様体の完備性の定義と、ベクトル場の完備性の定義が似ていると感じたのですが、なにか関連性はあるのでしょうか。お答え：測地流とよばれる接束 TM 上のベクトル場の完備性がリーマン多様体の完備性と同値。

質問：リーマン多様体 (あるいはリーマン多様体) の定義くらいしかリーマン幾何において仕事をしていないという話がありますが、今回の資料の事実 6.4 の他にリーマンがリーマン幾何学においてやった仕事とは何かありますでしょうか。お答え：「リーマン多様体の定義くらいしか」というわけではなく、測地線や曲率の概念を考えています。有名な教授就任講演を良く読んで見ると、そのような概念が作られていることがわかります。ガウスの曲面論からここまでくるのって凄いいことだと思いませんか？

質問：完備なリーマン計量は C^∞ コンパクト開位相について稠密に存在すると聞きました。そういう意味で、リーマン多様体が完備であるおちう条件は「よくある」条件だと思います。そこで質問ですが、断面曲率が一定であるという条件は、上にくらべてどの程度「よくある」条件ですか？ 同じように近似するのは難しそうです。また事実 6.18 を見る限り、とても強い条件のような気がします。

お答え：完備性は「どこまで行っても果てしない」という条件だから、計量をちょっと動かしたくらいでは崩れない条件。一方、断面曲率一定という条件は「等式」で与えられています。このような性質は、計量をちょっと変えたと壊れてしまいます。すなわち、断面曲率が一定であるという条件は、たいてい満たされません。

質問：相対性理論によると物体が光速に近づくと質量が重くなるという話を聞いたことがあります。 \mathbb{R}^3 しか身近なものがないので、どういうことかイメージするのが難しいです。お答え：何を聞いているのでしょうか？

質問：問題 VI-1 の解説をお願いします。 $S^n(k)$ の測地線が $\gamma(t) = (1/\sqrt{k})(\cos tp + \sin tv)$ ではおかしいですね。(以下略) お答え：なんでおかしいと思ったのでしょうか。