2017 年 5 月 30 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A1 （MTH.B405）講義資料 8

お知らせ

- 今回で幾何学特論 A1 の講義は終了です．ご聴講ありがとうございました．幾何学特論 B1 は 6 月 13 日（火）開講，6 月 27 日（火）休講予定です．詳細は近日中に講義 web ページに掲載予定：
`http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/geom-b/`
- 成績は提出物の得点の合計（本日返却する答案の右上に青字で示します）の 5 倍と 100 のうち大きくない方とします．誤記などのクレイムは 6 月 6 日までに電子メイルにて申し出てください．それ以降は受け付けません．

前回の補足

- 問題 VII-1: $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の等長変換全体の集合 G が群の公理を直接満たすことを示すという方針なら (1) 合成が G の演算を与えていること，すなわち G が合成について閉じていること，(2) 単位元の存在 (3) 逆元の存在 (4) 結合法則 を示す必要があります．別の方法として，G が多様体 M から自分自身への全単射全体の集合 $\widetilde{G}$（これは写像の合成に関して群となる）の部分集合だとみなして，G が $\widetilde{G}$ の部分群となることを示す，すなわち $f, g \in G$ に対して $g^{-1} \circ f \in G$ を示す．

前回までの訂正

- 講義ノート 75 ページ，下から 5 行目：$0 \quad (j = k) \Rightarrow 0 \quad (j \neq k)$
- 講義ノート 75 ページ，下から 2 行目：J を×と ⇒ J をかけると
- 講義ノート 76 ページ，6 行目，行列 A の成分表示の右上：$a_{1n} \Rightarrow a_{0n}$
- 講義ノート 76 ページ，8 行目の sgn の定義式の一番下：$(x = 0) \Rightarrow 0 \qquad (x = 0)$
- 講義ノート 79 ページ，1 行目：$H^n(k) \Rightarrow H^n(-k)$
- 講義ノート 79 ページ，19 行目：補題?? ⇒ 補題 7.13
- 講義ノート 81 ページ，一番下：$(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow (x^1, \dots, x^n)$ (2 箇所)
- 講義ノート 82 ページ，2 行目：$S^n) \setminus \{S\} \Rightarrow S^n \setminus \{S\}$
- 講義ノート 82 ページ，3, 4 行目：$\S^n \Rightarrow S^n$ （2 箇所）
- 講義ノート 82 ページ，8 行目：$(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow (x^1, \dots, x^n)$

授業に関する御意見

- 物理選考の方と数学をしていると，定義や仮定に対する attitude が数学科のそれとは異なっていたりして「はっ」とすることがあります．「はっ」は概念から現実に近づく気付きのような気持ちで，とても positive なものです．
  山田のコメント： ときどき言葉が通じないんですよね．
- 球面や双曲空間の等長変換全体が線型写像全体に一致するのは面白いと思った．
  山田のコメント： 線型写像「全体」ではありません．
- リーマン幾何学は楽しいけど難しいです．　**山田のコメント：** ですか?
- 最後の 1 回も頑張ります．/第 2 クォーターもがんばります．　**山田のコメント：** me,too
- リー群の勉強のするモチベーションが高まりました!　**山田のコメント：** 「リー群の勉強をする」か「リー群を勉強する」．
- 卒業研究のセミナーなどで，リー群やリー代数の言葉がしばしば出てきます．あまり困るようなことはないのですが，全く学んだこのとのないものを扱うので，たまに不安になります．リー群やリー代数の例が豊かで解説が丁寧な本を教えて下さい．
  山田のコメント： 山田もあまりチェックしていませんが (1) 佐武一郎「リー群の話」(日本評論社)：行列のなす群に話を限っている．理論の概要をとりあえず見るにはよいと思います．(2) 伊勢幹夫・竹内勝「リー群論」（岩波）古いですが．

質問と回答

質問： $\mathbb{H}^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=-1\}/\{\pm\mathrm{Id}\}$ を hyperbolic space, $d\mathbb{S}^n=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=1\}/\{\pm\mathrm{Id}\}$ を de Sitter space とよぶようですが，構成方法はたいして変わらないのにどうして $d\mathbb{S}^n$ だけ名前が変わるのでしょうか．$\mathbb{H}^n$ は二枚を一枚に重ねただけだからでしょうか．

お答え： $\mathbb{H}^n$ はこの講義の $H^n=H^n(-1)$ のことですね．なお，山田はド・ジッター空間というときには $\{\pm\mathrm{Id}\}$ では割りません．双曲空間はリーマン多様体，ド・ジッター空間はローレンツ多様体と，もともと考えるべき構造が違うので名前が違うのは当然（もちろん時代背景も違う）．

質問： $\mathbb{R}^n$, $S^n(k)$, $H^n(-k)$ の等長変換が授業で扱ったものに限るのは，当たり前のように見えて，証明に測地線を使うのは少し大掛かりに思えてきます．測地線を利用しないでは証明できないんでしょうか? 等長変換が線形変換だということが示せれば行列の形で書けそうですが．

お答え： そのことは自明ではないと思います．ユークリッド空間の場合は測地線をもち出さなくても（直線ですから）線形性は示せますが，球面などの場合はどうでしょうね．

質問： 擬直交空間 $\mathrm{O}(n,t)$ が多様体になるということで，位相を入れるのだろうと思いますが，どのような位相を入れるのでしょうか．(n 次正方行列の集合 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視し，相対位相を入れるのではないかと予想していますが.） **お答え：**そう言いませんでしたっけ．

質問： TM は多様体ですが，$p\in M, T_pM$ は多様体であってますか? また，M がリーマン計量 g をもつとき，T_pM の位相と T_pM の内積から導かれる位相は一致しますか? （そもそも TM の元 $v,w\in T_pM$ を分類する開集合がどんなのか，今一（山田注：いまいちのこと？）わかっていません）

お答え： T_pM は線形空間だから基底をとれば $\mathbb{R}^n$ と同一視できるので，多様体の構造が入る（基底のとり方によらない)．特にリーマン計量に関して正規直交基をとれば，計量を含めて $\mathbb{R}^n$ と同一視できるので，後半もあきらか．

質問： 一般のリーマン多様体の等長変換群を求めることは可能なのでしょうか?

お答え： 講義でコメントしたように，一般にリーマン多様体の等長変換群は自明な群です．特別な「対称性」があるときに非自明な等長変換群をもつわけで，そのときの等長変換群の決定は，対称性をフルにつかう必要があります．

質問： P. 25 の「微分写像」は「接写像」とも呼ばれ同義でしょうか．何か区別されて使われることがありますか?

お答え： 同義です．

質問： P. 25 $df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})$ の像 $\boldsymbol{v}(\varphi\circ f)$ は $\mathbb{R}$ になっているので汎関数に見えます．「$\boldsymbol{v}(\varphi\circ f)$」の実体はどのようなものを表わしているのでしょうか．例えば，補題 3.2 の例では $df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})\boxed{=}\boldsymbol{v}(f\circ\gamma)=\frac{d}{dt}|_{t=0}(f\circ\gamma)(t)=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(\gamma(t))$ で正しいですか?

お答え： 正しくありません．多様体 M の点 P における接ベクトルとは，線形写像 $\boldsymbol{v}: C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ で $\boldsymbol{v}(fg)=f(\mathrm{P})\boldsymbol{v}(g)+\boldsymbol{v}(f)g(\mathrm{P})$ を満たすものでした（これが定義だったことを多様体論の教科書で確認せよ)．ご質問の $df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})$ は $T_{f(\mathrm{P})}N$ の要素であるべきなので，$C^\infty(N)$ に対して実数を対応させる規則を決めればよい，それが 25 ページ 9 行目の式．$\varphi\circ f$ は M 上の関数なので $\boldsymbol{v}\in T_{\mathrm{P}}M$ を作用させることができますが，$f\circ\gamma$ は $\mathbb{R}$ 上の関数なので，$\boldsymbol{v}$ は作用できませんね．したがって枠で囲った等号の右側は意味がありません．

質問： $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ の等長変換群というのは一般的にはどのような記号で表しますか?

お答え： $\mathrm{Isom}(M)$．等長変換群の単位元を含む連結成分のことを $\mathrm{Isom}_0(M)$ と書くことが多いようです．

質問： 例 7.18/7.19 の ds^2 が何故このように表されるのか，よくわかりません．解説して頂けると有難いのですが．

お答え： 例 7.18 では $f(u^1,\dots,u^n):=\pi_N^{-1}(u^1,\dots,u^n)$ を求める．誘導計量は $ds^2=\sum_{i,j=1}^n\langle f_i,f_j\rangle\,du^i\,du^j$ となる．ただし $f_i=\partial f/\partial u^i$．

質問： 超曲面と超平面が頭の中で同一概念になっていましたが，言葉も使い分けられていたのですね．「余次元が 1」という単語を数学のいろいろな分野で見かけます．「超平面」は「超曲面」の中の特殊なものという理解で正しいでしょうか． **お答え：**正しいです．

質問： 等長変換 g について $g(x_0)=x_0$，$dg_(x_0)=\mathrm{id}\Rightarrow g=\mathrm{id}$ はリーマン計量が完備でなくても多様体が連結であれば成り立つ気がします．$M_0=\{g(x)=x\}$，$M_1=\{g(x)\neq x\}$ とすると $M=M_0\amalg M_1$ で，M_1： open, $x_0\in M_0$ なので，M_0： open ならよいのですが，正則近傍をとればこれも正しいと思います．

お答え： たしかに各点 $x\in M_0$ の正則近傍は M_0 に入りますね．この講義での説明では，一点からでる測地線を考えればすむ，という議論をしたかったので，完備性を用いました．