I. 不定値計量

■ 線形代数の復習　この節では，簡単のために，実数を成分とする n 次正方行列のことを単に正方行列ということにする．正方行列 A に対してその転置行列を ${}^tA$，単位行列を I（次数を特定したいときは I_n）と書く [1]．

- 正方行列 P が**直交行列**であるとは，${}^tPP = P{}^tP = I$ が成り立つことである．
- 正方行列 A が（実）**対称行列**であるとは，${}^tA = A$ が成り立つことである．
- 実対称行列の固有値は実数で，一つの固有値の固有空間の次元はその重複度と一致する．
- 実対称行列は直交行列によって対角化できる．すなわち，実対称行列 A に対して直交行列 P で
$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
となるものが存在する．ここで $\operatorname{diag}(\dots)$ は "$\dots$" を対角成分にもつ対角行列を表す．とくに $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ は A の固有値をその重複度の数ずつ並べたものである．

以下，V を実数体 $\mathbb{R}$ を係数とする n 次元線形空間とする．

■ 双線形形式と 2 次形式

定義 1.1. 線形空間 V 上の**双線形形式** [2] とは，写像 $q\colon V \times V \to \mathbb{R}$ で次を満たすものである：

- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して写像 $q(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon V \to \mathbb{R}$ および $q(\cdot, \boldsymbol{x})\colon V \to \mathbb{R}$ が線形（双線形性）．
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成り立つ（対称性）．

双線形形式 q に附随する **2 次形式**とは $\tilde{q}\colon V \ni \boldsymbol{x} \mapsto q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ のことである．

補題 1.2. 線形空間 V 上の 2 つの双線形形式 q, r に附随する 2 次形式をそれぞれ $\tilde{q}, \tilde{r}$ とするとき，$\tilde{q} = \tilde{r}$ なら $q = r$ である．

証明. 各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して
$$\begin{aligned}\tilde{q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= \tilde{q}(\boldsymbol{x}) + 2q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tilde{q}(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$
だから
$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\bigl(\tilde{q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \tilde{q}(\boldsymbol{x}) - \tilde{q}(\boldsymbol{y})\bigr)$$
なので，双線形形式 q は $\tilde{q}$ のみから定まる． □

すなわち，双線形形式は 2 次形式により定まるので，双線形形式のことを 2 次形式とよぶことも多い．

例 1.3. 実数を成分とする n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ と列ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}}$ は 1 次の正方行列となるのでこれをスカラと見なすと，写像

$$q_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \longmapsto {}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

が定まる．ただし ${}^t\hat{\boldsymbol{x}}$ は列ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．すると，行列の積の性質から写像 q_A は $\mathbb{R}^n$ の双線形形式であることがわかる．とくに単位行列 I に対して q_I は $\mathbb{R}^n$ の標準内積を与えている．

逆に $\mathbb{R}^n$ の双線形形式 q があたえられた時 $q = q_A$ をみたす対称行列 A が存在する． ♢

[*] 2017 年 04 月 11 日 (2017 年 5 月 2 日訂正)
[1] 正方行列：a square matrix；転置：transposition；単位行列：the identity matrix.
[2] 双線形形式：a bilinear form; 2 次形式：a quadratic form.

■ 双線形形式の表現行列　線形空間 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ をひと組とる．すると同型写像

$$V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

$$\left(\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{v}_n = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

が定まる．$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} \in V$ の基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する**成分**とよぶ．

補題 1.4. 線形空間 V 上の双線形形式 q に対して

$$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Bigl(= q_A(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}}) \Bigr) = {}^t\hat{\boldsymbol{x}} A \hat{\boldsymbol{y}}$$

となるような n 次対称行列 A がただ一つ存在する．ただし $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する成分である．

証明. 行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} := q(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j)$ で定めればよい（問題 I-2）． □

補題 1.4 の行列 A を，双線形形式 q の基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する**表現行列**とよぶ．

補題 1.5. 線形空間 V の 2 つの基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ と $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]$ の間の基底変換行列を $U = (u^i_j) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とする：

$$[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]U \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^n u^i_j \boldsymbol{v}_i \quad (j = 1,\dots,n).$$

ただし $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正則行列全体の集合（**一般線形群**[3]）を表す．このとき，双線形形式 q の，基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する表現行列 A と 基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する表現行列 $\tilde{A}$ は関係式

$$\tilde{A} = {}^tUAU$$

を満たす．

[3] 一般線形群：the general linear group.

証明. ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ を

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]\hat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]\hat{\boldsymbol{y}} = [\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]\tilde{\boldsymbol{y}}$$

と成分表示すると，

$$\hat{\boldsymbol{x}} = U\tilde{\boldsymbol{x}}, \qquad \hat{\boldsymbol{y}} = U\tilde{\boldsymbol{y}} \quad \text{となるので，} \quad q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}} = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\,{}^tUAU\tilde{\boldsymbol{y}}.$$

ここで $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は任意だから結論が得られる． □

■ 双線形形式の非退化性

定義 1.6. 線形空間 V 上の双線形形式 q が

- **正定値**（**半正定値**）[4] であるとは，任意の $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0$（$\geqq 0$） となることである．
- **負定値**であるとは，$-q$ が正定値となることである．
- **非退化**であるとは，「$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して成り立つならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことである．

例 1.7. 線形代数で学んだ線形空間の内積とは，正定値の双線形形式のことである． ♢

注意 1.8. 正定値（負定値）双線形形式は非退化である．実際，$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ がすべての $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つならばとくに $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$．ここで q が正定値（負定値）かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なら $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0$ (< 0) となることから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とならなければならない．

■ 非退化 2 次形式の符号

命題 1.9. 線形空間 V 上の双線形形式 q が正定値（半正定値，負定値，非退化）であるための必要十分条件は，q の表現行列の固有値が全て正（非負，負，零でない）となることである．この条件は V の基底によらない．

[4] 正定値：positive definite；半正定値：positive semi-definite；負定値：negative definite；不定値：indefinite；非退化：non-degenerate.

証明. 基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する q の表現行列を A とする．これは実対称行列だから，固有値 λ_j $(j=1,\dots,n)$ はすべて実数で，直交行列 P により対角化できる：

$$
{}^tPAP=\Lambda,\quad \Lambda:=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},\quad {}^tPP=I=\text{単位行列}.
$$

そこで $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]P$ とおくと $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する q の表現行列は Λ．ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する成分をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{x}}={}^t(x_1,\dots,x_n)$，$\hat{\boldsymbol{y}}={}^t(y_1,\dots,y_n)$ と書けば

$$
q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_jy_j
$$

となる．これを用いれば結論が得られる（問題 I-3）． □

線形空間 V の部分空間 W をとると，V 上の双線形形式 $q\colon V\times V\to\mathbb{R}$ を W に制限した写像 $q|_W\colon W\times W\to\mathbb{R}$ は W 上の双線形形式を与える．

定義 1.10. 線形空間 V 上の非退化対称双線形形式 q に対して

- V の部分空間 W で $q|_W$ が W 上の正定値双線形形式となるような W の次元の最大値を n_+ と書き，q の **正の符号数**,
- V の部分空間 W で $q|_W$ が W 上の負定値双線形形式となるような W の次元の最大値を n_- と書き，q の **負の符号数**

という．これらの組 (n_+,n_-) を q の**符号数** [5] という．

例 1.11. 線形空間 V 上の正定値（負定値）な 2 次形式の符号数は $(n,0)$ $((0,n))$ である．ただし n は V の次元である． ♢

定理 1.12. 線形空間 V 上の非退化対称双線形形式 q の正（負）の符号数 n_+ (n_-) は，q の表現行列の正（負）の固有値の個数である．とくに

$$
n_++n_-=n=\dim V.
$$

証明. 命題 1.9 の証明のように，基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する q の表現行列は対角行列 Λ としてよい．さらに Λ の対角成分はすべて 0 でないから，$\lambda_1,\dots,\lambda_t$ は負，$\lambda_{t+1},\dots,\lambda_n$

[5] 符号数：the signature.

は正としてよい．すると，$\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_t\}$ で生成される V の部分空間上で q は負定値．したがって $n_-\geqq t$．また，$\{\boldsymbol{w}_{t+1},\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ で生成される部分空間上で q は正定値．したがって $n_+\geqq n-t$:

$$
n_-\geqq t,\qquad n_+\geqq n-t \tag{1.3}
$$

一方，V の部分空間 W_+ (W_-) で $q|_{W_+}$ $(q|_{W_-})$ が正定値（負定値）であり，かつ次元が n_+ (n_-) となるものが存在する．ここで $\boldsymbol{x}\in W_+\cap W_-$ とすると $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leqq 0$ かつ $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ だから $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$．$q|_{W_+}$ が正定値であることに注意すれば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ したがって $W_+\cap W_-=\{\boldsymbol{0}\}$ となるので，

$$
n_++n_-=\dim W_++\dim W_-\leqq\dim V=n.
$$

したがって (1.3) は

$$
n_-\geqq t,\qquad n-n_-\geqq n-t\qquad n-n_+\geqq t,\qquad n_+\geqq n-t
$$

となるので $n_-=t, n_+=n-t$. □

注意 1.13. 定理 1.12 から，表現行列の正，負の固有値の個数は基底のとり方によらないことがわかる．このことは「対称行列 A の正，負の固有値の個数は変換 $A\to{}^tUAU$ (U は正則行列）で不変」であることと同値である．

定義 1.14. 有限次元線形空間 V 上の非退化対称双線形形式のことを V の**内積**という [6]．内積が一つ与えられている線形空間のことを**内積空間** [7] という．

■ 擬ユークリッド的ベクトル空間　線形空間 $\mathbb{R}^n$ $(n:=s+t\geqq 2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$ 上で双線形形式

$$
\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{s,t}:=-\left(\sum_{j=1}^s v_jw_j\right)+\left(\sum_{k=s+1}^{s+t}v_kw_k\right)\qquad\left(\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right) \tag{1.4}
$$

[6] 内積：an inner product.
線形代数で学んだ内積の定義（非退化性ではなく正定値性を仮定する）とは少し違う．
[7] 内積空間：an inner product space, a metric space.

を考えると，これは $\mathbb{R}^n$ 上の符号数 (t,s) の内積を与える．このような内積が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを $\mathbb{R}^n_s$ と書き，符号 (t,s) をもつ**（擬）ユークリッド・ベクトル空間**[8] という．内積 (1.4) は

$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{s,t} = {}^t\boldsymbol{v}J_{s,t}\boldsymbol{w} \qquad J_{s,t} := \begin{pmatrix} -I_s & O \\ O & I_t \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

と表される．

とくに符号が $(n,0)$ の場合，すなわち内積が正定値の場合は $\mathbb{R}^n_0$ を**ユークリッド**・ベクトル空間[9]，$(n-1,1)$ の場合，すなわち $\mathbb{R}^n_1$ を**ミンコフスキー**・ベクトル空間という．

以下，線形空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする．

■ 正規直交基

定義 1.15. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が**直交する**[10] とは，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = 0$ が成り立つことである．

定義 1.16. 次元 n の内積空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ が V の**正規直交基**[11] であるとは，

$$|\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle| = \delta_{ij} \qquad (1 \leqq i,j \leqq n)$$

が成り立つことである．

補題 1.17. 正規直交基は V の基底である．

証明． 線形独立性を示せば良い． □

定理 1.18. 内積空間には正規直交基底が存在する．とくに，内積の符号が (t,s) ならば，

$$\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle = 0 \quad (i\neq j), \qquad \langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i\rangle = \begin{cases} -1 & (i=1,\dots,s) \\ 1 & (i=s+1,\dots,s+t) \end{cases} \tag{1.6}$$

を満たす基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ をとることができる．

証明． 命題 1.9 の証明のようにして，V の基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ で，$\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列が対角行列になるものが存在する．とくに，負の固有値は s 個，正の固有値は t 個だから，

$$\lambda_j \begin{cases} <0 & (j=1,\dots,s) \\ >0 & (j=s+1,\dots,n) \end{cases}$$

としてよい．今，行列 U を

$$U := \operatorname{diag}\left(1/\sqrt{|\lambda_1|},\dots,1/\sqrt{|\lambda_n|}\right)$$

とおく．すると

$${}^tU\Lambda U = \begin{pmatrix} -I_s & O \\ O & I_t \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

となる．ここで I_m は m 次の単位行列，O は適切なサイズの零行列とする．したがって補題 1.5 から $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n] := [\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]U$ に関する $\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列が (1.7) の行列となる．したがって $[\boldsymbol{e}_j]$ は条件を満たす基底である． □

■ ベクトルの因果特性

定義 1.19. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}$ が

- **空間的**[12] であるとは，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ であるか $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle > 0$ が成り立つことである．
- **時間的** であるとは，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle < 0$ が成り立つことである．
- **光的** であるとは，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0$ が成り立つことである．

これらの性質をベクトルの**因果特性**という[13]．

注意 1.20. 内積が正定値の場合は，すべてのベクトルは空間的である．

---

[8] 擬ユークリッド・ベクトル空間：a pseudo euclidean vector space.

[9] ユークリッド・ベクトル空間：an euclidean vector space; ミンコフスキー・ベクトル空間：a Minkowski vector space.

[10] 直交する：orthogonal

[11] 正規直交基：an orthonormal basis; pl. orthonormal bases.

[12] 空間的：spacelike, space-like; 時間的：timelike, time-like; 光的：lightlike, light-like, null.

[13] 因果特性：causal character.

これらの用語は，相対性理論においてミンコフスキー・ベクトル空間に対して用いる語に由来している．

■ 直交補空間

定義 1.21. 内積空間 V の部分空間 W が**非退化**であるとは，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の W への制限 $\langle\ ,\ \rangle|_W$ が W 上の非退化内積を与えることである．とくに $\langle\ ,\ \rangle|_W$ の符号を W の符号という．

例 1.22. $\mathbb{R}^2_1$ のベクトル ${}^t(1,1)$ で生成される $\mathbb{R}^2_1$ の部分空間は退化部分空間（非退化でない）である． ♢

定義 1.23. 内積空間 V の部分空間 W に対して

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v}\in V \mid 任意の\ \boldsymbol{w}\in W\ に対して\ \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = 0\}$$

で定まる $W^\perp$ を W の**直交補空間**[14] という．

定理 1.24. 符号 (n_+, n_-) の内積空間 V の非退化部分空間 W の符号が (m_+, m_-) であるとき，$W^\perp$ は 符号 $(n_+ - m_+, n_- - m_-)$ をもつ V の部分空間で，$V = W \oplus W^\perp$ （直和）が成り立つ．

証明． 部分空間 W は非退化なので，定理 1.18 から正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m]$ $(m = m_+ + m_-)$ が存在する．そこで

$$\varPhi\colon V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \varPhi(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1\rangle\\ \vdots \\ \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_m\rangle\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

を考えると，これは線形写像で，$W^\perp = \operatorname{Ker}\varPhi$ となるので，とくに $W^\perp$ は V の部分空間である．

さらに，$\varPhi$ は全射である．実際，$\hat{\boldsymbol{x}} := {}^t(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ に対して $\boldsymbol{x} := x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_m\boldsymbol{e}_m$ とおくと $\varPhi(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{x}}$．したがって

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim\operatorname{Im}\varPhi = \dim V - m = \dim V - \dim W.$$

さらに $W\cap W^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ．実際 $\boldsymbol{x}\in W\cap W^\perp$ とすると，$\boldsymbol{x}\in W^\perp$ だから，任意の $\boldsymbol{y}\in W$ に対して $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 0$．ここで $\boldsymbol{x}\in W$ でもあるから，W の非退化性より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．

以上から W と $W^\perp$ の和は直和になり，その次元は

$$\dim(W\oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp = n = \dim V.$$

[14] 直交補空間：the orthogonal complement.

したがって $W\oplus W^\perp = V$ となる．

次に $W^\perp$ が非退化であることを示す．$\boldsymbol{x}\in W^\perp\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して線形写像

$$\Psi\colon V\ni\boldsymbol{y}\longmapsto\Psi(\boldsymbol{y}) = \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\in\mathbb{R}$$

を考えると，内積が V 上非退化であるから Ψ は零写像にならない．とくに $\operatorname{rank}\Psi = 1$ なので $\dim\operatorname{Ker}\Psi = n-1$．一方，定義から $W^\perp\subset\operatorname{Ker}\Psi$ だから，

$$\dim(W^\perp\cap\operatorname{Ker}\Psi) = \dim W^\perp - 1.$$

これは，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\neq 0$ となる $\boldsymbol{y}\in W^\perp$ が存在することを示しているので $W^\perp$ は非退化である．

最後に $W^\perp$ の符号数を求めよう．W の正規直交基 $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m]$ と $W^\perp$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_{n-m}]$ をとると，$[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_{n-m}]$ は V の正規直交基底で，その表現行列は 1, -1 を対角成分にもつ対角行列である．とくに対角成分で 1 であるものの個数は W と $W^\perp$ の正の符号数の和となるが，一方，これは V の正の符号数だから，結論が得られる． □

例 1.25. n 次元ミンコフスキー・ベクトル空間 V（すなわち，符号数 $(n-1,1)$ の内積をもつ内積空間）の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ に直交するベクトル全体のなす部分空間（すまわち $(\mathbb{R}\boldsymbol{v})^\perp$．簡単のため $\boldsymbol{v}^\perp$ と書く．）は V の空間的な $n-1$ 次元部分空間である．

また，零ベクトルでない空間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}^\perp$ はミンコフスキー・ベクトル空間である． ♢

■ 擬直交変換

定義 1.26. 内積空間 V の線形変換 $f\colon V\to V$ で内積を保つ，すなわち

$$\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})\rangle = \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle \qquad (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V)$$

を満たすものを**（擬）直交変換**[15] という．

補題 1.27. 擬直交変換は全単射である．

証明． 同じ次元の線形空間の間の線形写像であるから，単射であることを示せば十分である．擬直交変換 f に対して $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ を満たすものをとる．すると，

$$\langle f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{w}\rangle = 0 \qquad すなわち \qquad \langle f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{w}\rangle = \langle f(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{w}\rangle$$

[15] 擬直交変換：a pseudo orthogonal transformation.

が任意の $\boldsymbol{w} \in V$ に対して成り立つから，とくに

$$\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{z})\rangle = \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z})\rangle \qquad (\boldsymbol{z} \in V)$$

が成り立つ．ここで，擬直交性から

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle \qquad \text{すなわち} \quad \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = 0$$

が任意の $\boldsymbol{z} \in V$ に対して成立する．したがって，内積の非退化性より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. □

補題 1.28. 与えられた内積空間の擬直交変換全体は写像の合成に関して群をなす.

証明. 補題 1.27 から擬直交変換は逆写像をもつことがわかる. □

記号 1.29. 内積空間 V の擬直交変換全体のなす群を $\mathrm{O}(V)$ と書く．とくに $\mathbb{R}^n_t$ の擬直交変換全体を $\mathrm{O}(n,t)$ と表す.

$\mathbb{R}^n_t$（線形空間としては $\mathbb{R}^n$）の線形変換をその表現行列と同一視すれば,

$$\mathrm{O}(n,t) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, {}^tAJ_{t,n-t}A = J_{t,n-t}\}$$

と表すことができる．ただし $J_{t,n-t}$ は式 (1.5) で与えられる n 次正方行列である.

問　題　I

I-1 $m \times n$ 行列 C に対して，$A := {}^tCC$ とおくと A は n 次の対称行列である．この行列 A から例 1.3 のように定まる $\mathbb{R}^n$ の双線形形式を q_A とする.

(1) q_A は半正定値であることを示しなさい.

(2) q_A が正定値になるためには C はどのような条件を満たさなければならないか.

I-2 補題 1.4 を証明しなさい.

I-3 命題 1.9 の証明を完成させなさい.

I-4 (1) $n = 2$ のとき $\mathrm{O}(2,t)$ $(t = 0, 1)$ を求めなさい.

(2) $\mathrm{O}(2,0) \cap \mathrm{O}(2,1)$ はどんな集合か.

I-5 定理 1.24 で「W が非退化部分空間である」という仮定が必要であることを示しなさい.