II. 擬ユークリッド空間

一般に，n 次元ベクトル空間に符号 $(n-t,t)$ をもつ内積が与えられているとき，この符号に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ $(j=1,\dots,n)$ をとり，この基底に関する成分を考えることで，内積を保つ同型写像

$$V \ni \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n \mapsto {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_t$$

が定まる．したがって，有限次元の内積空間は擬ユークリッド空間と，内積までこめて同一視できる．以下，内積空間としては $\mathbb{R}^n_t$ のみを考えることにする．

■ 擬直交変換 前回の (1.5) のように，正の数 $n \geqq 2$ と負でない整数 t $(0 \leqq t \leqq n)$ に対して

$$J_{t,n-t} := \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_{n-t} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_p \text{ は } p \text{ 次単位行列}, \\ O \text{ は適切な型の零行列} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

で n 次正方行列 $J_{n-t,t}$ を定義すると，$\mathbb{R}^n_t$ の内積は

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} J_{n-t,t} \boldsymbol{y} \tag{2.2}$$

で与えられている．線形同型 $\mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ でこの内積を保つものを**擬直交変換**，その（表現行列の）全体の集合を $\mathrm{O}(n,t)$ と書いた（記号 1.29）：

$$\mathrm{O}(n,t) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid {}^tAJ_{t,n-t}A = J_{t,n-t}\}. \tag{2.3}$$

集合 $\mathrm{O}(n,t)$ は行列の積により群をなす．行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A_{11} : t \times t \text{ 型}; & A_{12} : t \times (n-t) \text{ 型} \\ A_{21} : (n-t) \times t \text{ 型}; & A_{22} : (n-t)\times(n-t) \text{ 型} \end{cases} \tag{2.4}$$

と分割しておこう．

*)2017 年 04 月 18 日 (2017 年 4 月 25 日訂正)

補題 2.1.

(1) 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ の行列式は 1 または -1 である．

(2) 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ を (2.4) のように分割すると，$|\det A_{11}| \geqq 1$，$|\det A_{22}| \geqq 1$ が成り立つ．

証明． 式 (2.3) の定義式の行列式をとれば (1) が得られる．また，(2.4) の形の A が (2.3) の定義式を満たすならば，その左上の $t \times t$ の小行列は

$$-{}^tA_{11}A_{11} + {}^tA_{21}A_{21} = -I_t$$

を満たす．このことから $(\det A_{11})^2 = \det({}^tA_{11}A_{11}) \geqq 1$ が得られる（問題 II-1）．□

記号 2.2. 正の整数 n と $t \geqq 0$ に対して

$$\mathrm{SO}(n,t) := \{A \in \mathrm{O}(n,t) \mid \det A = 1\},$$

と書く．さらに $n \geqq 2$，$t \geqq 1$ の場合，

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \{A \in \mathrm{SO}(n,t) \mid \det A_{11} \geqq 1\}$$

と定める．ただし A_{11} は A を (2.4) のように分割したときの「左上」の小行列である．

注意 2.3. 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視すれば，$\mathrm{O}(n,t)$ は $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の実解析的な**閉部分多様体**となっている．とくに，群演算はこの実解析多様体の構造に関して実解析的なので，$\mathrm{O}(n,t)$ は**リー群**である．ところで，$\mathrm{O}(n,t)$ は連結ではない．実際

$$\det\colon \mathrm{O}(n,t) \ni A \longmapsto \det A \in \mathbb{R}$$

は連続写像だが，$\det \mathrm{O}(n,t) = \{-1,1\}$ は連結でない．そこで，$\mathrm{O}(n,t)$ の指数 2 の部分群 $\mathrm{SO}(n,t)$ を考えると，$t=0$ のときは $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n,0)$ は連結である [1]．この群 $\mathrm{SO}(n)$ を**特殊直交群** [2] とよぶ．一方 $n \geqq 2$，$t \geqq 1$ のと

[1] 証明は線形代数の応用問題であるが，ここでは与えない．

[2] リー群：a Lie group; 直交群 $\mathrm{O}(n)$：the orthogonal group; 擬直交群 $\mathrm{O}(n,t)$：the pseudo orthogonal group; 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$：the special orthogonal group.

きは $\mathrm{SO}(n,t)$ も連結ではない．実際，連続写像

$$\det{}'\colon \mathrm{SO}(n,t) \ni A \longmapsto \det A_{11} \in \mathbb{R}$$

を考える．ただし A_{11} は A を (2.4) のように分割したときの左上の成分である．このとき $\det{}'(\mathrm{SO}(n,t)) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ であることがわかるが，像が連結でないので $\mathrm{SO}(n,t)$ は連結でない． そこで部分群 $\mathrm{SO}_+(n,t)$ を考えると（問題 II-2），$\mathrm{SO}_+(n,t)$ は連結となることがわかる．

■ **擬ユークリッド空間**　集合 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 P，Q に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} := (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n) \in \mathbb{R}^n$$

を対応させる規則を考える．ただし $\mathrm{P} = (p_1,\dots,p_n)$，$\mathrm{Q} = (q_1,\dots,q_n)$ である．点 P，Q が住んでいる空間は「我々の住む空間」のモデルと考え，原点に特別な意味を持たせないこととする．一方 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は P から Q への変位を表すので，零ベクトルには絶対的な意味がある．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の住みかはベクトル空間としての $\mathbb{R}^n$ である．このように思ったとき，点 P の住みかとしての $\mathbb{R}^n$ を**アファイン空間**，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の住みかとしての $\mathbb{R}^n$ を，そのアファイン空間に付随するベクトル空間という．[3] さらにベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ をユークリッド・ベクトル空間と見なすと，

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \right\rangle} \tag{2.5}$$

でアファイン空間 $\mathbb{R}^n$ に距離（**ユークリッド距離**）を入れることができるので，その距離から $\mathbb{R}^n$ に位相が入る．この位相を $\mathbb{R}^n$ の**ユークリッド位相**という [4]．

補題 2.4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相は，任意の一次関数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続にする最弱の位相である．

[3] アファイン空間：an affine space; アファイン空間に付随するベクトル空間：the vector space associated with the affine space.
[4] ユークリッド距離：the Euclidean distance; ユークリッド位相：the Euclidean topology.

証明. 位相空間論の最初に学んだように多項式はユークリッド空間上の連続関数であるから，とくに一次関数は連続関数．

したがって，任意の一次関数が連続になるような $\mathbb{R}^n$ の位相が与えられたとき，その位相はユークリッド位相を含む（開集合族の包含関係の意味）ということを示せ良い．

座標関数 $r_j : (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j$ は一次関数なので，仮定より連続．したがって $\{(x_1,\dots,x_n) \mid a < x_j < b\} = r_j^{-1}\bigl((a,b)\bigr)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合．各座標関数でこのような開集合をとって共通部分をとることで，開区間の直積集合は開集合であることがわかる．ところで開区間の直積集合を基とする位相はユークリッド位相と一致するから結論が得られた．　□

以下，集合 $\mathbb{R}^n$ には補題 2.4 のような（ユークリッド空間としての）位相が与えられているとすると，$\mathbb{R}^n$ は n 次元多様体で，各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる．接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n_t$ と同一視して内積を与えた多様体を**擬ユークリッド空間** [5] という．擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ 上の 2 点 P, Q に対して $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \in \mathbb{R}^n_t$ を考えることができる．

定義 2.5. アファイン空間の間の写像 $f\colon \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ が**等長変換** [6] であるとは，任意の $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n_t$ に対して

$$\left\langle \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}, \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \right\rangle$$

が成り立つことである．

例 2.6. 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ とベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_t$

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \qquad \left(\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_t\right)$$

で与えられる $f\colon \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ は等長変換である．　◇

定理 2.7. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ の等長変換は例 2.6 の形のものに限る．

注意 2.8. 定理 2.7 は概ね次のステップにより証明される：

- 等長変換の合成は等長変換である．
- $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})$ で新たな等長変換 g を考えることにより，最初から $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ として一般性を失わない．

[5] 擬ユークリッド空間：a pseudo Euclidean space.
[6] 等長写像：an isometry, an isometric transformation.

- $\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$.
- f は線形写像である．
- $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(A \in \mathrm{O}(n,t))$.

証明の詳細には，ここでは深入りしないが，特にユークリッド空間の場合は，正値性により証明が多少簡単になる．

■ ミンコフスキー・ベクトル空間　特別な場合として，ミンコフスキー・ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を考える[7]．習慣にしたがって $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の要素を

$$\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

と表す．すなわち，負の符号に対応する成分のインデックスを 0 とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を

$$\{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$$

と同一視すると，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ は

$$\boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{x}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_0 = {}^t(1, 0, \dots, 0), & x_0 \in \mathbb{R}, \\ \vec{x} = (0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.6}$$

と書ける．この分解を用いると，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -x_0y_0 + \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{y} = y_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{y}$ も (2.6) の形の分解で，右辺第 2 項は，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathbb{R}^n$ への制限（$\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積になる）である．

ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ は因果特性（定義 1.19）により 3 種類に分類できる：

- **空間的ベクトル**：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるか，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle > 0$.
- **時間的ベクトル**：$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle < 0$.
- **光的（退化）ベクトル**：$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$.

[7] この講義では正定値内積とミンコフスキー内積を主に扱う．最終回に $\mathbb{R}^n_2$ の部分多様体の例を挙げる．

定義 2.9. 空間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$$

を $\boldsymbol{v}$ の大きさという．大きさが 1 である空間的ベクトルを**空間的単位ベクトル**とよぶ．また，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = -1$ をみたす $\boldsymbol{v}$ を**時間的単位ベクトル**[8] という．

命題 2.10. 零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して，その**直交補空間**を

$$\boldsymbol{v}^\perp := \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \,|\, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0\}$$

と表すとき，

(1) $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の n 次元線形部分空間である．
(2) $\boldsymbol{v}$ が時間的なら $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の空間的部分空間（空間的ベクトルのみからなる部分空間）である．
(3) $\boldsymbol{v}$ が空間的なら $\boldsymbol{v}^\perp$ への内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の制限は符号 $(n-1, 1)$ をもつ．
(4) $\boldsymbol{v}$ が光的なら，$\boldsymbol{v}^\perp$ は $\boldsymbol{v}$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の n 次元線形部分空間で，$\boldsymbol{v}$ のスカラ倍にならない $\boldsymbol{v}^\perp$ の要素は空間的である．したがって $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は半正定値である．とくに $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を生成しない．

証明. 最初の 3 つは定理 1.24 から従う．(4) は次のようにして示される（問題 II-4）：式 (2.6) のように $\boldsymbol{v} = v_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{v}$，$\boldsymbol{w} = w_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{w}$ と分解しておく．$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が光的で互いに直交するならば

$$-v_0^2 + |\vec{v}|^2 = 0, \qquad -w_0^2 + |\vec{w}|^2 = 0, \qquad -v_0w_0 + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0.$$

このことから $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が一次従属であることが示されれば結論が得られる．□

■ ミンコフスキー・ベクトル空間のベクトル積　まず，3 次元ミンコフスキー・ベクトル空間 $\mathbb{R}^3_1$ を考える：

[8] 空間的（時間的）単位ベクトル：a space-like (time-like) unit vector.

定義 2.11. $\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

で定まる $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の（ミンコフスキー）**ベクトル積** [9] という.

注意 2.12. ミンコフスキー・ベクトル積はユークリッドベクトル積の第 0 成分の符号を変えたものである.

補題 2.13. ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ にともに直交する.
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が空間的なら，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ は時間的で，次が成り立つ：

$$|\langle \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle| = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle - (\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle)^2.$$

- $\det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) > 0$. ただし，det は 3 つのベクトルを列ベクトルとみなしてできる 3 次正方行列の行列式を表す.

次に，4 次元ミンコフスキー・ベクトル空間の 3 つのベクトルに対して次のようにベクトル積を定義する：

定義 2.14. ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} := {}^t\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 & w_2 \end{vmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} = {}^t(u_0, u_1, u_2, u_3), \\ \boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2, v_3), \\ \boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2, w_3) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

と定める．とくに $\boldsymbol{u}$ が時間的単位ベクトルで，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ に直交するベクトルのときは,

$$\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} \tag{2.8}$$

と書く.

[9] ベクトル積：the vector product.

補題 2.15. $\mathbb{R}^4_1$ の時間的単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と，$\boldsymbol{u}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して

- $\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ にともに直交する.
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が空間的なら，$\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$ は空間的で，次が成り立つ：

$$\langle \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle - (\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle)^2.$$

- $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}) > 0$ ただし，det は 4 つのベクトルを列ベクトルとみなしてできる 4 次正方行列の行列式を表す.

証明は演習問題とする（問題 II-6）.

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間　負の符号が 1 であるような擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を**ローレンツ・ミンコフスキー空間**またはミンコフスキー空間 [10] という．相対性理論に由来するいくつかの言葉の定義を与えておく.

定義 2.16. 点 $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して

- 集合
$$\Lambda_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \text{ は光的 }\} \cup \{\mathrm{P}\}$$
を P における**光錐**または**光円錐** [11] という.
- 集合
$$\begin{aligned} C_{\mathrm{P}} &:= \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\}, \\ C^+_{\mathrm{P}} &:= \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0, v_0 > 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\}, \\ C^-_{\mathrm{P}} &:= \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0, v_0 < 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\} \end{aligned}$$
をそれぞれ P の**因果集合**，**未来**，**過去**とよぶ [12].
- $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の等長変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$（$A \in \mathrm{O}(n+1, 1)$）を**ローレンツ変換**という．とくに $A \in \mathrm{SO}(n+1, 1)$ の場合を**向きを保つ**ローレンツ変

[10] ローレンツ・ミンコフスキー空間：the Lorentz-Minkowski space.
[11] 光錐，光円錐：the lightcone.
[12] 因果集合：the causal set; 未来：the future；過去：the past.

換，$A \in \mathrm{SO}_+(n+1,1)$ を**向きと時間的向きを保つ**ローレンツ変換あるいは**本義ローレンツ変換**という[13]．

命題 2.17. ローレンツ変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$（$A \in \mathrm{O}(n+1,1)$）は，P における光円錐（因果集合）を $f(\mathrm{P})$ における光円錐（因果集合）に写す．さらに，$A \in \mathrm{SO}_+(n+1,1)$ のときは，P における未来（過去）を $f(\mathrm{P})$ における未来（過去）に写す．

■ 相対性理論との関係　ローレンツ・ミンコフスキー空間は**特殊相対性理論**[14] の舞台である．このことを簡単に説明しておく．

われわれの世界を 3 次元ユークリッド空間とみなし，時刻 x_0 における点 (x_1, x_2, x_3) のことを，時空の点 $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4_1$ と考える．ただし，時間の単位は，真空中の光の速さ c が 1 となるようにとる[15]．

運動する質点の時刻 x_0 における位置を $\gamma(x_0) = (x_1(x_0), x_2(x_0), x_3(x_0)) \in \mathbb{R}^3$ と書くとき，時空の曲線 $\bigl(x_0, \gamma(x_0)\bigr) \in \mathbb{R}^4_1$ をこの運動の**世界線**という[16]．とくに，時刻 0 で点 (p_1, p_2, p_3) を通り，光の速さで直進する運動の世界は点 $\mathrm{P} = (0, p_1, p_2, p_3)$ における光円錐 Λ_{P} の母線の一つである．

このような時空の取り方を**慣性系**[17] という．

特殊相対性理論の基本原理は 2 つ：

(R1)　すべての慣性系で真空中の光の速さは同じである（光速度不変の原理）．

(R2)　物理法則は慣性系を取り替えても不変である（相対性原理）．

慣性系の取り替えとは，変換 $f\colon \mathbb{R}^4_1 \to \mathbb{R}^4_1$ のことである．光速度不変の原理 (R1) は，この変換が光円錐を光円錐に写すことを要求する．適切に長さの単位をそろえれば，**このような性質をもつ変換はローレンツ変換に限る**ことを示すことができる．したがって，相対性原理 (R2) は，**物理法則はローレンツ変換で不変な形**をしている，ということにほかならない．

[13] 向きを保つ：orientation preserving; 向きと時間的向きを保つ：orientation and time-orientation preserving, orientation preserving and isochronous.
[14] 特殊相対性理論：the special relativity.
[15] 真空中の光速が cm/s であるとき，時間 ts の変わりに ctm とすることで，時間をメートルで表すことができる．以後，このような単位を用いる．
[16] 世界線：a world line.
[17] 慣性系：an inertial frame of reference. この段階では慣性系は数学的定義をもたない．

この枠組みで，時間的・空間的・光的・未来・過去・因果特性といった語は本来の意味で使われている．

たとえば，$\mathbb{R}^4_1$ の異なる 2 点 P, Q を結ぶ直線が点の運動を表しているとして，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を (2.6) のように分解しておく：

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = p_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{p}.$$

すると，運動する点の $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ における速度ベクトルは

$$\vec{v} := \frac{\vec{p}}{p_0}$$

となる．とくに

- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が空間的ベクトルであるための必要十分条件は $|\vec{v}| > 1$ である．このとき，時空の点 P から Q へ一定の速度で到達するためには，速さが 1（これが光速度）を超えなければならない．
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が時間的ベクトルであるための必要十分条件は $|\vec{v}| < 1$ となることで，これは $\mathrm{Q} \in C_{\mathrm{P}}$，すなわち Q が P に対して因果的であることと同値である．もし Q が C^+_{P}，すなわち P に対して未来にあるならば，速さ 1 未満の等速度運動で P から Q に到達できる．一方，Q が P の過去 C^-_{P} にあるならば，Q から P に光の速さより遅い等速度運動で到達できる．
- Q が P における光円錐 Λ_{P} に含まれるための必要十分条件は $|\vec{v}| = 1$．すなわち直線 PQ は速さ 1（光の速さ）の運動を表している．すなわち光円錐 Λ_{P} は P を出発する光の世界線全体を表す．

例 2.18. 次元を下げて $\mathbb{R}^2_1$ のローレンツ変換

$$f\colon \mathbb{R}^2_1 \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_1$$

を考える．この変換で，座標系 (x_0, x_1)（x-座標系）での直線 $l_a : x_1 = a$ は座標系 (y_0, y_1)（y-座標系）では直線 $\tilde{l}_a : y_0 = (\coth\theta)y_1 - (\operatorname{sech}\theta)a$ に対応する．すなわち x-座標系で静止している点は，y-座標系では速度 $\tanh\theta$ で

等速度運動しているように見える．すなわち x-座標系は y-座標系に対して速度 $v := \tanh\theta$ で等速度運動している座標系と見なすことができる． ◇

問　題　II

II-1 補題 2.1 の証明を完成させなさい.（ヒント：後半は，対称行列 ${}^tA_{11}A_{11}$ の固有値がすべて 1 以上であることを示せばよい.）

II-2 擬直交群 $\mathrm{O}(n,t)$ の部分集合

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| \det A = 1, \quad \det A_{11} \geqq 1 \right\}$$

は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群になることを示しなさい．ただし (A_{ij}) は式 (2.4) のような分割である．

II-3 (1) $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ は連結かつコンパクトであることを示しなさい.

(2) $\mathrm{SO}_+(2,1) \subset \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ は連結であることを示しなさい．この集合は $\mathbb{R}^4$ のコンパクト部分集合か.

(3) $\mathrm{SO}_+(3,1) \subset \mathrm{M}(3,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^9$ は連結であることを示しなさい.

II-4 命題 2.10 の (4) を示しなさい.（ヒント：部分空間 $\mathbb{R}^n$ 上では内積は正定値なので，コーシー・シュワルツの不等式が成り立つ．この不等式の等号条件を用いればよい.）

II-5 命題 2.17 を示しなさい.

II-6 補題 2.15 を証明しなさい.