III. 超曲面

■ **はめ込み**　以下，**可微分多様体** [1] という語で C^∞-級多様体を表す.

定義 3.1. 可微分多様体 M と N の間の可微分写像

$$f\colon M \to N$$

が**はめ込み**であるとは，各点 $\mathrm{P} \in M$ で f の微分写像

$$(df)_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}M \longrightarrow T_{f(\mathrm{P})}N$$

が単射となることである．ただし $T_{\mathrm{P}}M$, $T_{f(\mathrm{P})}N$ はそれぞれ M，N の点 P, $f(\mathrm{P})$ における接空間である.

ここで，写像 f の**微分** [2] $(df)_{\mathrm{P}}$ とは，$\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})\colon C^\infty(N) \ni \varphi \longmapsto \boldsymbol{v}(\varphi \circ f) \in \mathbb{R}$$

で定まる $T_{f(\mathrm{P})}N$ の要素 $df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})$ を対応させる線形写像である.

補題 3.2. 多様体 M の点 P に接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して，

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \qquad \gamma(0) = \mathrm{P}, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(0) = \boldsymbol{v}$$

を満たす写像（曲線）γ をとると，可微分写像 $f\colon M \to N$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\bigl(\gamma(t)\bigr)$$

が成り立つ.

[*] 2017 年 4 月 25 日 (2017 年 5 月 2 日訂正)
[1] 可微分多様体：a differentiable manifold.
[2] 微分：the differential

注意 3.3 (微分写像の表現行列)**.** 写像 f の定義域 M の点 P の回りの局所座標系 $(x_1, \dots, x_m)$ と N の $f(\mathrm{P})$ の回りの N の局所座標系 $(y_1, \dots, y_n)$ をとると，

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\mathrm{P}}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{\mathrm{P}} \right\}, \qquad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(\mathrm{P})}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{f(\mathrm{P})} \right\}$$

はそれぞれ $T_{\mathrm{P}}M$, $T_{f(\mathrm{P})}N$ の基底を与えるが，これらの基底に関する $(df)_{\mathrm{P}}$ の表現行列は f のヤコビ行列

$$Df(\mathrm{P}) := \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_m}\right) \end{pmatrix}$$

である：

$$\left[(df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, (df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\right] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right] Df(\mathrm{P}).$$

ただし $f(x_1, \dots, x_m)$ の座標系 (y_j) に関する成分を (f_j) と書いた.

とくに N がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ ならば，$f\colon M \to \mathbb{R}^n$ はベクトル値関数とみなせるが，そのヤコビ行列は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right) = (f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$$

となる.

系 3.4. 写像 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ がはめ込みである必要十分条件は，各点 P において，$m = \dim M$ 個のベクトル f_{x_1}, …, f_{x_m} が線形独立となることである．ただし $(x_1, \dots, x_m)$ は P の回りの局所座標系である.

注意 3.5. はめ込みの定義は局所座標を用いていないので，系 3.4 の条件は座標系 $(x_1, \dots, x_m)$ のとり方によらないことがわかる.

■ **部分多様体と超曲面**　まず，可微分多様体としてのユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分多様体と超曲面の定義を与える．擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ は可微分多様体としては $\mathbb{R}^n$ と同じものなので，この段階では区別しないこととする.

部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の**部分多様体**[3] であるとは，M に可微分多様体の構造で包含写像 $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ がはめ込みになっているものが存在することである．とくに M が $n-1$ 次元のとき，M を $\mathbb{R}^n$ の**超曲面**という．接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ は自然に $\mathbb{R}^n (= T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n)$ の線形部分空間と見なすことができる．

補題 3.6. 部分多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ の包含写像 $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ の微分は

$$d\iota_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M)$$

を満たす．

証明. 任意の $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して，M 上の曲線 $\gamma(t)$ で，$\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v}$ を満たすものを一つとる．ただし $\dot{}= d/dt$ である．このとき，$\iota \circ \gamma(t) = \gamma(t)$ （ただし $\mathbb{R}^n$ の曲線と見なす）なので，補題 3.2 から

$$d\iota_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \iota \circ \gamma(t) = \dot\gamma(0) = \boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$$

を得る． □

方程式 “$F = 0$” で与えられた $\mathbb{R}^n$ の部分集合が部分多様体であることを判別するためには**陰関数定理**が便利である．

命題 3.7. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $F\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^p$ に対して

$$M := F^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^n \,|\, F(\mathrm{P}) = \mathbf{0}\}$$

が空集合でないとする．M の各点 P でヤコビ行列 $dF(\mathrm{P})$ の階数が p ならば，M には $\mathbb{R}^n$ の $(n-p)$-次元部分多様体となるような可微分多様体の構造が与えられる．

ここでは特に $p = 1$ の場合を考える．

命題 3.8. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $M := F^{-1}(\{0\})$ の点 P で

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P}) \neq 0$$

[3] 部分多様体：a submanifold; 超曲面：a hypersurface.

を満たしているならば，$\mathbb{R}^n$ における点 $\mathrm{P} = (p_1, \dots, p_n)$ の近傍 V と $(x_2, \dots, x_n)$ 空間の $\mathrm{P}' = (p_2, \dots, p_n)$ の近傍 V'，さらに C^∞-級関数 $f\colon V' \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$M \cap V = \{(f(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \,|\, (x_2, \dots, x_n) \in V'\}$$

を満たす．すなわち，点 P の近傍で M は $x_1 = f(x_2, \dots, x_n)$ とグラフ表示される．

命題 3.8 の状況で $(x_2, \dots, x_n)$ を M の点 P の近傍における局所座標と考えることができるので，

系 3.9. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $M := F^{-1}(\{0\})$ が空集合でないとする．このとき，M の各点 P で

$$(dF)_{\mathrm{P}} = (F_{x_1}(\mathrm{P}), \dots, F_{x_n}(\mathrm{P})) \neq \mathbf{0}$$

が成り立つならば，M は $\mathbb{R}^n$ の超曲面である．

例 3.10. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax + by + cz + d = 0\}$$

は平面を表す．ただし a, b, c, d は $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ となる定数である．◇

例 3.11. 変数 (x, y, z) の 2 次式 $F(x, y, z)$ の零点集合 $F^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ は，$\mathbb{R}^3$ の部分多様体与えるとき，2 次曲面[4] という．楕円面，一葉双曲面，二葉双曲面，楕円放物面，双曲放物面は 2 次曲面である[5] ◇

■ 接空間と誘導計量　以下，擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面の幾何学を考察する．とくに興味がるのは $s = 0$ (ユークリッド空間)，$s = 1$ (ローレンツ・ミンコフスキー空間）の場合である．

擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面 M の点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ は $\mathbb{R}^{n+1}_t (= T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t)$ の n 次元線形部分空間である．$\mathbb{R}^{n+1}_t$ の擬ユークリッド内

[4] 2 次曲面：a quadric.
[5] これらの曲面の表示は，たとえば「曲線と曲面」（梅原・山田，裳華房）の第 6 節を見よ．

積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $T_{\mathrm{P}}M$ に制限して得られる $T_{\mathrm{P}}M$ の双線形対称形式を g_{P} と書く．各点 P に対して g_{P} を与える対応 g を $M\subset\mathbb{R}^{n+1}_t$ の**誘導計量**または**第一基本形式**という [6]．

定義 3.12. 超曲面 $M\subset\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上の点 P が超曲面の**非退化点**であるとは，g_{P} が非退化双線形型式ととなることである．g_{P} が退化双線形型式となるとき，P は**退化点**であるという [7]．

とくにローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面上の点 P において g_{P} が $T_{\mathrm{P}}M$ の正定値双線形型式を与えているとき，P は**空間的**，不定値双線形型式を与えているとき P は**時間的**であるという [8]．

定義 3.13. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の連結な超曲面 M が

- **空間的**であるとは，M 上のすべての点が空間的であること，
- **時間的**であるとは，M 上のすべての点が時間的であること，
- **非退化**であるとは，空間的または時間的であること

と定める．

■ 法線ベクトル

定義 3.14. 可微分関数 $F\colon\mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ と点 P に対して

$$\operatorname{grad}F(\mathrm{P}):=J_{t,n+1-t}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{P})\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-I_t & O\\ O & I_{n+1-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{P})\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P})\end{pmatrix}$$

を F の点 P の**勾配ベクトル** [9] という．ただし $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の座標を $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ と書いた．

[6] 誘導計量：the induced metric; 第一基本型式：the first fundamental form.
[7] 非退化点：a non-degenrate point; 退化点：a degenerate point.
[8] 空間的：space-like; 時間的：time-like. 用語がわかりにくいが，時間的点における接ベクトルがすべて時間的となるわけではない．外の空間の内積の符号が $(n,1)$ なので，時間的点における誘導計量 g_{P} の符号は自動的に $(n-1,1)$，すなわち $T_{\mathrm{P}}M$ にミンコフスキー内積を与える．
[9] 勾配ベクトル：the gradient vector.

ユークリッド空間，すなわち $t=0$ のときは，$\operatorname{grad}F$ は微分 dF を列ベクトルとみなしたものにほかならない．勾配ベクトルが $\mathbf{0}$ でないことと微分 dF が零でないことは同値だから，系 3.9 は次のように書き換えられる：

系 3.15. $\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U\to\mathbb{R}$ に対して $M:=F^{-1}(\{0\})$ が空集合でないとする．このとき，M の各点 P で $\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\neq\mathbf{0}$ ならば，M は $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面である．

命題 3.16. 関数 $F\colon\mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ が系 3.15 の仮定を満たしているとき，超曲面 $M=F^{-1}(\{0\})$ の点 P における接空間は次で与えられる：

$$T_{\mathrm{P}}M=\bigl(\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}.$$

証明. ベクトル $\boldsymbol{v}\in T_{\mathrm{P}}M$ をとると，M 上の曲線

$$\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\ni t\longmapsto\gamma(t)\in M\subset\mathbb{R}^{n+1}_t\qquad(\varepsilon>0)$$

で $\gamma(0)=\mathrm{P}$, $\dot\gamma(0)=\boldsymbol{v}$ $(\dot{}=d/dt)$ となるものが存在する．ここで t の関数 $\varphi(t):=F(\gamma(t))$ を考えると，各 t に対して $\gamma(t)\in M$ だから $\varphi(t)=0$．また，

$$\gamma(t)={}^t\bigl(x_0(t),\dots,x_n(t)\bigr)\quad\text{と書くと}\quad\dot\gamma(t)={}^t\bigl(\dot x_0(t),\dots,\dot x_n(t)\bigr)$$

なので，

$$\begin{aligned}0=\dot\varphi(0)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}F\bigl(\gamma(t)\bigr)&=\sum_{j=0}^n\frac{\partial F}{\partial x_j}\bigl(\gamma(0)\bigr)\left.\frac{dx_j}{dt}\right|_{t=0}\\&=\sum_{j=0}^n\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathrm{P})\left.\frac{dx_j}{dt}\right|_{t=0}=\langle\operatorname{grad}F(\mathrm{P}),\dot\gamma(0)\rangle=\langle\operatorname{grad}F(\mathrm{P}),\boldsymbol{v}\rangle.\end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{v}\in\bigl(\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}$ なので $T_{\mathrm{P}}M\subset\bigl(\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}$ であることがわかった．さらに $T_{\mathrm{P}}M$ は n 次元多様体 M の接空間だから n 次元ベクトル空間．一方，命題 2.10 の (1)[10] から $\operatorname{grad}F(\mathrm{P})$ の直交補空間も n 次元なので，結論が得られた． □

とくに，命題 2.10 から次のことが分かる：

命題 3.17. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 上の関数 $F\colon\mathbb{R}^{n+1}_1\to\mathbb{R}$ が系 3.15 の仮定をみたしてるとき，点 $\mathrm{P}\in M=F^{-1}(\{0\})$ が

[10] 命題 2.10 では $\mathbb{R}^{n+1}_1$ をの場合を考えているが，(1) の結論は任意符号の擬ユークリッド空間に対して成立する．

- 超曲面 M の空間的な点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が時間的であること，
- 超曲面 M の時間的な点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が空間的であること，
- 超曲面 M の退化点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が光的であること

である．

定義 3.18. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M 上の点 P における $\mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t$ のベクトル $\nu(\mathrm{P})$ で，$T_{\mathrm{P}}M$ に直交し，$|\langle \nu(\mathrm{P}), \nu(\mathrm{P})\rangle| = 1$ となるものを M の P における**単位法線ベクトル**，対応 $\mathrm{P} \mapsto \nu(\mathrm{P})$ を**単位法線ベクトル場**という [11)]．

命題 3.16 より次がわかる：

命題 3.19. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の非退化な超曲面 M 上の点 P における単位法線ベクトルは

$$\nu(\mathrm{P}) = \pm \frac{\operatorname{grad} F(\mathrm{P})}{|\langle \operatorname{grad} F(\mathrm{P}), \operatorname{grad} F(\mathrm{P})\rangle|^{1/2}}$$

で与えられる．

■ 第二基本型式　擬ユークリッド空間（ここでは，特にユークリッド空間やローレンツ・ミンコフスキー空間を考えている）$\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M の単位法線ベクトル場 ν を一つとっておく [12)]．

単位法線ベクトル場 ν は M から $\mathbb{R}^{n+1}_t$ への写像とみなせるので，微分写像

$$d\nu_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_t \bigl(= T_{\nu(\mathrm{P})}\mathbb{R}^{n+1}_t\bigr)$$

を考えることができる．

補題 3.20. 任意の $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して $d\nu(\boldsymbol{v}) \in T_{\mathrm{P}}M$ である．

[11)] 単位法線ベクトル：the unit normal (vector); 単位法線ベクトル場：the unit normal vector field.
[12)] 各点での単位法線ベクトルのとり方はふたとおりあるが，ここではどちらかを指定せず，以下の議論は「単位法線ベクトルのとり方に依存する」と考える．

証明． $\langle \nu, \nu\rangle = \pm 1$ なので，$d\langle \nu, \nu\rangle = 0$．したがって P において

$$0 = d_X\langle \nu, \nu\rangle = 2\langle d\nu(X), \nu\rangle.$$

ここで $T_{\mathrm{P}}M = \nu(\mathrm{P})^{\perp}$ なので結論が得られた． □

定義 3.21. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化超曲面 M の単位法線ベクトル場を ν とする．このとき，補題 3.20 により

$$W_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}M \ni \boldsymbol{v} \longrightarrow -d\nu(\boldsymbol{v}) \in T_{\mathrm{P}}M$$

が定まる．これを点 P における**型作用素**，**ワインガルテン作用素**という [13)]．さらに $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$I\!I_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \varepsilon\langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle \qquad \varepsilon = \langle \nu, \nu\rangle \in \{1, -1\}$$

で定まる $T_{\mathrm{P}}M$ 上の双線形型式を**第二基本型式**という [14)15)]

命題 3.22. 定義 3.21 の第二基本型式は対称双線形型式を与える．

証明は演習問題（問題 III-3）とする．

ここで，少しだけ線形代数の復習：n 次元ベクトル空間 V の線形変換

$$W \colon V \longrightarrow V$$

の，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ の**表現行列**とは

$$W(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} w_j^k \boldsymbol{v}_k \qquad (j = 1, \dots, n)$$

を満たす行列 $\hat{W} := (w_j^k)$ のことである [16)]．この式をまとめて書けば

$$W([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = \bigl(V(\boldsymbol{v}_1), \dots, W\boldsymbol{v}_n\bigr) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{W}. \tag{3.1}$$

[13)] 習慣にしたがってワインガルテン作用素は $d\nu$ に「マイナス」をつけたものとしている．文脈によっては $d\nu$ そのものをワインガルテン作用素ということもある．
[14)] ワインガルテン作用素の符号，および，第二基本型式の定義式に出て来る符号は，次回紹介する「ガウスの公式」の法線成分の形を符号によらず $h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\nu$ とするためにこのようにとっている．
[15)] 型作用素：the shape operator; ワインガルテン作用素：the Weingarten operator; 第二基本型式：the second fundamental form.
[16)] 線形変換の表現行列の定義は双線形型式の表現行列の定義とは異なる．

とくに，基底変換 $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]P$ （P は n 次の正則行列）により，表現行列は $\hat{W}\mapsto P^{-1}\hat{W}P$ と変換されるので，

補題 3.23. 線形変換 $W\colon V\to V$ の，V の基底に関する表現行列 $\hat{W}$ の固有多項式は V の基底のとり方によらない．特に，$\hat{W}$ の固有値は，その重複度も含めて基底のとり方によらない．

線形変換の表現行列の固有値のことを,「線形変換の固有値」ということにしよう．さらに，これら固有値の総和は，表現行列の対角成分の和に一致する．これを W のトレースといい，$\operatorname{tr}W$ という[17]．

超曲面の議論に戻る：

定義 3.24. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化超曲面のワインガルテン行列 W_{P} の固有値を超曲面 M の点 P における**主曲率**という．また，

$$H(\mathrm{P}):=\frac{1}{n}\operatorname{tr}W_{\mathrm{P}}$$

を M の P における**平均曲率** という[18]．さらに $H\colon \mathrm{P}\mapsto H(\mathrm{P})$ は M 上の関数を与えるが，これを超曲面の平均曲率関数，または単に平均曲率という．

注意 3.25. 3 次元ユークリッド空間の曲面論では，$\det W$ を**ガウス曲率**とよび，それが第一基本量から定まる（内的な量である）ことを学んだ（ガウスの驚異の定理）．一般の次元では（ユークリッド空間の超曲面であっても）$\det W$ は第一基本量のみでは一般に表すことができない．この講義では，次回以降で，超曲面の内的な不変量である「断面曲率」を考察したい．なお，$\det W$ はガウス・クロネッカー曲率とよばれ，それ自体は曲面の重要な不変量である．

■ **例：2 次超曲面**　擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上で

$$q_c(\boldsymbol{x}):=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle-c \tag{3.2}$$

[17] W のトレース：the trace of W
[18] 主曲率：the principal curvatures; 平均曲率：the mean curvature.

により，関数 $q_c\colon\mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ を定義する．ここで c は実数の定数で，$\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上の点 P を，P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とみなしている．この関数によって

$$Q_c:=q_c^{-1}(\{0\})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_t \mid \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=c\} \tag{3.3}$$

と定める．

<u>$t=0$ の場合</u>，すなわちユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面の場合は，

- $c>0$ のとき，Q_c は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の**超球面**，とくに $n=2$ の場合は**球面**を表す[19]
- $c=0$ のとき Q_0 は原点 1 点からなる集合である．
- $c<0$ のとき $Q_c=\emptyset$.

<u>$t=1$ の場合</u>，すなわち，ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面の場合を考えよう．このときは，任意の実数に対して $Q_c\neq\emptyset$ である．ここで

$$\operatorname{grad}q_c(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x} \tag{3.4}$$

となるので，これが消えるのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるとき．

- $c\neq0$ のときは $\boldsymbol{0}\notin Q_c$ なので Q_c は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分多様体．
- $c=0$ のときは $\boldsymbol{0}$ で $\operatorname{grad}q_c(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ となってしまうので，原点の近傍では Q_c は部分多様体になっていない．原点以外の $\mathrm{P}\in Q_c$ に対して P の近傍 $U\subset\mathbb{R}^{n+1}_1$ で $Q_c\cap U$ が $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分多様体となるものが存在する．

これらの超曲面の因果特性，平均曲率を問題 III-1 で求めてみよう．

[19] 超球面：the hypersphere；球面：the sphere.

問　題　III

III-1 ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ において式 (3.3) で定義される Q_c を考える．

(1) Q_c が退化超曲面となるような c の値を求めなさい．

(2) Q_c が非退化超曲面であるとき，それが空間的（時間的）であるための c の条件を求めなさい．

(3) Q_c が非退化超曲面であるとき，ワインガルテン作用素 W は

$$W(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\sqrt{|c|}}\boldsymbol{v}$$

となることを示しなさい．

(4) Q_c が非退化超曲面であるとき，その平均曲率を求めなさい．

(5) $n=2$ のとき Q_0, Q_1, Q_{-1} を図示しなさい．$\mathbb{R}^3_1$ の座標 (x_0, x_1, x_2) において x_0 座標を鉛直方向にとりなさい．

III-2 定義 2.11 の $\mathbb{R}^3_1$ のベクトル積の定義（訂正済み）を思い出そう：$\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

2 次元多様体 M の $\mathbb{R}^3_1$ へのはめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ で $f\colon M \to f(M)$ が微分同相写像を与えているようなものをとる．すなわち $f(M)$ は $\mathbb{R}^3_1$ の曲面[20]である．M の局所座標系 (u, v) をとるとき，

(1) $f(M)$ が空間的（時間的）曲面となるための必要十分条件は，ベクトル $f_u \times f_v$ が時間的（空間的）であることが必要十分である．ただし “$\times$” は定義 2.11 で与えられたベクトル積である．このことを示しなさい．

(2) $f(M)$ の点 $f(\mathrm{P})$ における接空間 $T_{f(\mathrm{P})}f(M)$ は $\{f_u(\mathrm{P}), f_v(\mathrm{P})\}$ を基底にもつ．とくに曲面が非退化なとき，第二基本型式 $I\!I$ は

$$I\!I(f_u, f_u) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{uu}),$$
$$I\!I(f_u, f_v) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{uv}),$$
$$I\!I(f_v, f_v) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{vv})$$

を満たす．このことを示しなさい．ただし $\delta = \varepsilon|\langle f_u \times f_v, f_u \times f_v\rangle|^{1/2}$, $\varepsilon = \pm 1$ である．

[20] 2 次元の場合は超曲面ではなく「曲面」という．

(3) 以下，(x_0, x_1, x_2) の代わりに (t, x, y) と書く．2 変数関数 $\varphi(x, y)$ によって $t = \varphi(x, y)$ とグラフ表示される R^3_1 の曲面が非退化であるとき，その平均曲率を φ とその偏導関数を用いて表しなさい．

III-3 第二基本型式の対称性（命題 3.22）を証明しなさい．
ヒント：微分公式

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma(t), \sigma(t)\rangle = \left\langle\frac{d\gamma}{dt}(t), \sigma(t)\right\rangle + \left\langle\gamma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t)\right\rangle$$

を用いる．