IV. 驚異の定理

今回は対象を，とくに 3 次元（擬）ユークリッド空間の曲面 [1] に限る．

■ ユークリッド空間の曲面（復習）　まず，ユークリッド空間の曲面の理論の復習をしよう [2]．$\mathbb{R}^3$ $(=\mathbb{R}^3_0)$ の曲面を，はめ込み

$$f\colon U \ni (u,v) \longmapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3 \tag{4.1}$$

でパラメータ表示しておく．ここで U は $\mathbb{R}^2$ の領域である．とくに，系 3.4 により，f がはめ込みであるための必要十分条件は U 上の各点で $\{f_u, f_v\}$ が一次独立となることである [3]．このとき，ベクトル積 $f_u \times f_v$ は U 上至るところで $\mathbf{0}$ にはならない [4] ので，単位法線ベクトルは

$$\nu := \pm\frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

で与えられる．

いま，点 P の十分小さい近傍をとれば f は単射になるので，U とその像 $f(U)$ を同一視しておく [5]．部分多様体 $f(U)$ の接平面 [6] への，$\mathbb{R}^3$ の内積の制限を曲面 $f(U)$ の**第一基本形式**または**誘導計量**という（第 III 節）．[曲線と曲面] にしたがって，第一基本形式を

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{4.2}$$

$$E := \langle f_u, f_u\rangle, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle$$

[*] 2017 年 5 月 2 日 (2017 年 5 月 23 日訂正)

[1] 前回までの定義からすると超曲面だが，とくに次元が 2 なので曲面 surface とよぶことにする．

[2] 詳細は，たとえば「曲線と曲面（改訂版）」（梅原雅顕・山田光太郎）（裳華房）を参照してほしい．以下，これを [曲線と曲面] のように引用する．

[3] 下付きの添字は偏微分を表す：$f_u = \partial f/\partial u$, $f_v = \partial f/\partial v$.

[4] ここでのベクトル積は，定義 2.11 で定義した 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間におけるベクトル積ではなく，線形代数や力学の時間に学んだ，ユークリッド空間のベクトル積である：

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} := {}^t\!\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1\end{vmatrix}\right).$$

[5] 最初に与えられた領域 U 全体で f は単射ではないかもしれないが，今回は局所的な性質のみを考察したいので，このようにしても問題がない．

[6] 一般論としては「接空間」とよぶべきだが，ここでは 2 次元なのでとくに接平面 tangent plane とよぶ．

と表そう．ベクトル f_u, f_v を列ベクトルとみなせば

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_u & f_v\end{pmatrix}$$

と書けることに注意しておく．

誘導計量が (4.2) という形に「表される」のは次のような理由による．曲面 U 上の点 P を一つ固定したとき，接空間 $T_{\mathrm{P}}U$ $(= T_{f(\mathrm{P})}f(U))$ は $\{f_u, f_v\}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間である．ここで，記号 du, dv で線形写像

$$du\colon T_{\mathrm{P}}M \to \mathbb{R} \qquad du(f_u) = 1, \quad du(f_v) = 0$$
$$dv\colon T_{\mathrm{P}}M \to \mathbb{R} \qquad dv(f_u) = 0, \quad dv(f_v) = 1$$

を表すと，$\{du, dv\}$ は $T_{\mathrm{P}}U$ 上の実数値線形形式全体がなす線形空間（すなわち $T_{\mathrm{P}}U$ の双対空間 dual space $T^*_{\mathrm{P}}U$）の基底となる．さらに

$$\begin{aligned} du^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= du(\boldsymbol{x})du(\boldsymbol{y}), \\ du\,dv(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= \frac{1}{2}\bigl(du(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) + du(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x})\bigr), \\ dv^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &:= dv(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

と定めると，du^2, $du\,dv$, dv^2 はそれぞれ $T_{\mathrm{P}}U$ 上の対称双線形形式を与える．とくにこれらは $T_{\mathrm{P}}U$ 上の対称双線形形式全体のなす線形空間の基底となっている．点 P における誘導計量は，$T_{\mathrm{P}}U$ の対称双線形形式なので，du^2, $du\,dv$, dv^2 の線形結合で書けるはずで，実際 $\boldsymbol{x} = x_1 f_u + x_2 f_v$, $\boldsymbol{y} = y_1 f_u + y_2 f_v$ に対して

$$\begin{aligned} ds^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle x_1 f_u + x_2 f_v, y_1 f_u + y_2 f_v\rangle \\ &= x_1y_1\langle f_u, f_u\rangle + (x_1y_2 + x_2y_1)\langle f_u, f_v\rangle + x_2y_2\langle f_v, f_v\rangle \\ &= Edu(\boldsymbol{x})du(\boldsymbol{x}) + F\bigl(du(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) + du(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x})\bigr) + Gdv(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となるので，(4.2) の表示が得られた．

この曲面のワインガルテン作用素 $W = -d\nu$（定義 3.21）は，f_u を $-\nu_u$, f_v を $-\nu_v$ に対応させる線形写像と見なすことができる．したがって，$T_{\mathrm{P}}U = T_{f(\mathrm{P})}f(U)$ の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列を $\hat{W}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}\nu_u & \nu_v\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_u & f_v\end{pmatrix}\hat{W} \tag{4.3}$$

と表される．

第二基本形式 $I\!I$ を（定義 3.21）にしたがって $I\!I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle$ で定義すると，

$$
\begin{aligned}
L &:= I\!I(f_u,f_u) = \langle f_u, W(f_u)\rangle = -\langle f_u,\nu_u\rangle = \langle f_{uu},\nu\rangle, \\
M &:= I\!I(f_u,f_v) = \langle f_u, W(f_v)\rangle = -\langle f_u,\nu_v\rangle = \langle f_{uv},\nu\rangle = I\!I(f_v,f_u), \\
N &:= I\!I(f_v,f_v) = \langle f_v, W(f_v)\rangle = -\langle f_v,\nu_v\rangle = \langle f_{vv},\nu\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

を用いて

$$I\!I = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表すことができる．

定理 4.1. ワインガルテン作用素 W の基底 $\{f_u,f_v\}$ に関する表現行列は

$$\hat{W} := \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{I\!I}, \qquad \widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}$$

と表される．

証明. 行列 $\widehat{I}$ は第一基本形式（これは対称双線形形式であった）の基底 $\{f_u,f_v\}$ に関する表現行列だから，非退化性から $\widehat{I}$ は正則行列になる．式 (4.3) から

$$\widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}\hat{W} = \widehat{I}\,\hat{W}$$

より結論が得られた． □

定理 4.2 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** これまでの状況で，

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + L\nu \\
f_{uv} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + M\nu \\
f_{vv} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + N\nu
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\nu_u &= -W_1^1 f_u - W_1^2 f_v \\
\nu_v &= -W_2^1 f_u - W_2^2 f_v
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，Γ_{jk}^i と W_j^i は次を満たす (u,v) の関数である：

$$
\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac12 E_u & \frac12 E_v & F_v - \frac12 G_u \\ F_u - \frac12 E_v & \frac12 G_u & \frac12 G_v \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} W_1^1 & W_2^1 \\ W_1^2 & W_2^2 \end{pmatrix} = \hat{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.
$$

証明. 単位法線ベクトル ν の微分に関する式は (4.3) そのものである（ワインガルテンの公式 [7] とよばれる）．はめ込み f の 2 階微分の等式を示そう．定義域 U の各点で $\{f_u,f_v,\nu\}$ は一次独立だから，f_{uu}，f_{uv}，f_{vv} はこれらの線形結合で表される：

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + A\nu \\
f_{uv} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + B\nu \\
f_{vv} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + C\nu.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

この係数を決定すればよい．いま (4.4)，f_u，f_v が ν と直交すること，および $\langle \nu,\nu\rangle = 1$ から

$$A = L, \quad B = M, \quad C = N$$

を得る．また，(4.5) の両辺に f_u，f_v を内積すると，

$$
\begin{pmatrix} \langle f_u,f_{uu}\rangle & \langle f_u,f_{uv}\rangle & \langle f_u,f_{vv}\rangle \\ \langle f_v,f_{uu}\rangle & \langle f_v,f_{uv}\rangle & \langle f_v,f_{vv}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}
$$

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
\langle f_u,f_{uu}\rangle &= \frac12\langle f_u,f_u\rangle_u = \frac12 E_u \\
\langle f_u,f_{uv}\rangle &= \frac12\langle f_u,f_u\rangle_v = \frac12 E_v \\
\langle f_u,f_{vv}\rangle &= \langle f_u,f_v\rangle_v - \langle f_{uv},f_v\rangle = F_v - \frac12 G_u \\
\langle f_v,f_{uu}\rangle &= \langle f_v,f_u\rangle_u - \langle f_{vu},f_u\rangle = F_u - \frac12 E_v \\
\langle f_v,f_{uv}\rangle &= \frac12\langle f_v,f_v\rangle_u = \frac12 G_u \\
\langle f_u,f_{vv}\rangle &= \langle f_v,f_v\rangle_v = \frac12 G_v
\end{aligned}
$$

なので，結論が得られた． □

[7] ワインガルテンの公式：Weingarten formula.

定理 4.2 にあらわれる Γ_{ij}^k $(i,j=1,2)$ を**クリストッフェル記号**または**接続係数**とよぶ [8].

■ **驚異の定理** 3 次元ユークリッド空間の曲面のワインガルテン作用素の表現行列 $\hat{W}$（定理 4.1）の行列式はパラメータ (u,v) のとり方によらない.

定義 4.3. 3 次元ユークリッド空間の曲面に対して，そのワインガルテン行列の行列式

$$K_{\mathrm{ext}} := \det \hat{W}$$

を，**外的曲率・ガウス・クロネッカー曲率**という [9].

次はガウスの**驚異の定理**として知られている [10]：

定理 4.4. 3 次元ユークリッド空間の曲面のガウス・クロネッカー曲率は

$$\begin{aligned}(4.6)\quad K_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{EG-F^2}\times& \\ \big(E(\Gamma^1_{22u}+\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21}-\Gamma^1_{12v}-\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22})& \\ +F(\Gamma^2_{22u}+\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{21}-\Gamma^2_{12v}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{22})\big)&\end{aligned}$$

を満たす．ただし，曲面の座標系 (u,v) に関する第一基本形式を (4.2)，クリストッフェル記号を定理 4.2 のように書いた.

とくに K_{ext} は第一基本形式の情報のみによって定まる.

証明. 定理 4.2 の第 3 式，第 2 式をそれぞれ u，u で微分し，f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, ν_u, ν_v をまた定理 4.2 で f_u, f_v, ν で表す．$\langle f_{vvu}, f_u\rangle = \langle f_{uvv}, f_u\rangle$ なので，整理すると結論が得られる. □

式 (4.6) の左辺は曲面のワインガルテン作用素から定まる量だが，右辺は第一基本形式のみによって定まる.

[8] クリストッフェル記号：the Christoffel symbol; 接続係数：the coefficient of the connection. ただし $\Gamma^j_{21}=\Gamma^j_{12}$ としておく.
[9] 外的曲率：the extrinsic curvature; ガウス・クロネッカー曲率：the Gauss-Kronecker curvature. ユークリッド空間の曲面論で学ぶ**ガウス曲率**（たとえば [曲線と曲面] の第 8 節）のことであるが，このあとすぐ現れる「内的曲率」と区別するためにここでは別の名前で呼んでおく.
[10] 驚異の定理：Theorema Egregium

定義 4.5. 2 次元多様体上のリーマン計量 $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ に対して [11]，(4.6) の右辺で定まる量を，リーマン計量の**ガウス曲率**という [12].

定理 4.4 は，曲面のガウス・クロネッカー曲率 K_{ext} が，曲面をリーマン多様体とみなしたときのガウス曲率と一致することを示している．とくに，ガウス曲率 $K=K_{\mathrm{ext}}$ は，第一基本形式の係数 E, F, G を用いて

$$\begin{aligned}(4.7)\qquad K = &\frac{E(E_vG_v-2F_uG_v+{G_u}^2)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+\frac{F(E_uG_v-E_vG_u-2E_vF_v-2F_uG_u+4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+\frac{G(E_uG_u-2E_uF_v+{E_v}^2)}{4(EG-F^2)^2}-\frac{E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu}}{2(EG-F^2)}\end{aligned}$$

と表される（[曲線と曲面] 参照）.

■ **ローレンツ・ミンコフスキー空間の空間的曲面の場合** ユークリッド空間の曲面をお手本にして，ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^3_1$ の曲面を考える．とくに曲面が非退化なら，第一基本形式，単位法線ベクトル，ワインガルテン作用素，第二基本形式がユークリッド空間の場合と同様に定義できる.

以下，$\mathbb{R}^3_1$ の**空間的**曲面を考える．すると，第一基本形式（誘導計量）

$$(4.8)\quad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$E := \langle f_u, f_u\rangle,\quad F=\langle f_u, f_v\rangle,\quad G=\langle f_v, f_v\rangle$$

は正定値なので，曲面上のリーマン計量を与えている．したがって R^3_1 の中にいることを忘れてリーマン計量のみから，ガウス曲率を定義 4.5 から求めることができる．このガウス曲率 K を定理 4.4 のような形でワインガルテン作用素を用いて計算したい.

曲面のパラメータ表示 $f\colon U \ni (u,v)\mapsto f(u,v)\in\mathbb{R}^3_1$ が空間的曲面を与え

[11] 多様体の各接空間上に内積が定義されているとき，その内積の族をリーマン計量 a Riemannian metric という．曲面の第一基本形式は曲面上の接平面の内積を与えているのでリーマン計量である．リーマン計量が与えられた多様体のことをリーマン多様体 a Riemannian manifold という.
[12] ガウス曲率：the Gaussian curvature.

ているとき，その法線ベクトル

$$f_u \times f_v$$

は時間的ベクトルである．ただし $\times$ はローレンツ・ミンコフスキー空間のベクトル積（定義 2.11）である．したがって，単位法線ベクトル

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|\langle f_u \times f_v, f_u \times f_v\rangle|^{1/2}}$$

は時間的単位ベクトル，すなわち

$$\varepsilon := \langle \nu, \nu\rangle = -1$$

を満たしている．この単位法線ベクトル ν に対して，ワインガルテン作用素 $W := -d\nu$ を考えると，曲面上の各点 P で W_{P} は接平面の線形変換を与えている．さらに，

$$I\!I(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) := \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle = -\langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle$$

により第二基本形式を定めると，これは接平面上の対称双線形形式を与えるので，

$$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表される．ただし

$$\begin{aligned} L &:= I\!I(f_u, f_u) = -\langle f_u, W(f_u)\rangle = \langle f_u, \nu_u\rangle = -\langle f_{uu}, \nu\rangle, \\ M &:= I\!I(f_u, f_v) = -\langle f_u, W(f_v)\rangle = \langle f_u, \nu_v\rangle = -\langle f_{uv}, \nu\rangle = I\!I(f_v, f_u), \\ N &:= I\!I(f_v, f_v) = -\langle f_v, W(f_v)\rangle = \langle f_v, \nu_v\rangle = -\langle f_{vv}, \nu\rangle \end{aligned}$$

である（ユークリッド空間の曲面の場合と符号が違う）．

定理 4.6. 以上の状況で

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\ f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\ f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\ \nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} は第一基本形式 ds^2 のクリストッフェル記号（すなわち，定理 4.2 と同じもの）で W^i_j は

$$\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

で与えられる．

証明． 右側の式は，

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に注意すれば (4.3) と同様に示される．左側の式のうち f_u, f_v の成分は定理 4.1 と全く同様，ν 成分は $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ と第二基本形式の定義式の符号の違いに注意すれば定理 4.1 と同様である． □

定理 4.6 に対して驚異の定理 4.4 と同様の議論を行うと，次がわかる：

定理 4.7. 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の曲面のパラメータ表示 $f\colon U \ni (u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}^3_1$ が空間的曲面を与えているとき，第一基本形式から定まるガウス曲率は

$$K = -\det \hat{W}$$

を満たす．ここで $\hat{W}$ はワインガルテン作用素の表現行列である．

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間の時間的曲面の場合　はめ込み $f(u, v)$ が $\mathbb{R}^3_1$ の時間的曲面を与えているときも，第一基本形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

が定義されるが，これは不定値計量である．しかし，非退化であることから，$EG - F^2 \neq 0$ が成り立っている．したがって定理 4.2 のようにクリストッフェル記号 Γ^k_{ij} が定義され，ガウス曲率 K が (4.6) の右辺によって定義される．

一方，単位法線ベクトル ν は空間的なので，

$$\varepsilon := \langle \nu, \nu \rangle = 1$$

となっている．そこで，ワインガルテン作用素 $W := -d\nu$ および第二基本形式

$$I\!I(*, ()) := \langle *, W(*) \rangle = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

を定めると，次が成り立つ：

定理 4.8. 以上の状況で

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\ f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\ f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\ \nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} は第一基本形式 ds^2 のクリストッフェル記号（すなわち，定理 4.2 と同じもの）で W^i_j は

$$\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

で与えられる．

証明． 証明は定理 4.6 と全く同様．ただし $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ に注意する． □

したがって

定理 4.9. 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の時間的曲面のガウス曲率（第一基本形式に関するガウス曲率）K は

$$K = \det \hat{W}$$

を満たす．ここで $\hat{W}$ は曲面のワインガルテン作用素の表現行列である．

定理 4.7, 4.9 をまとめると，

系 4.10. 非退化なはめ込み

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$$

の単位法線ベクトルを ν，ワインガルテン作用素を $W := -d\nu$ とすると，第一基本形式に関するガウス曲率 K は

$$K = \langle \nu, \nu \rangle \det \hat{W}$$

を満たす．ただし $\hat{W}$ は W の接空間の基底に関する表現行列である．

問　題　IV

IV-1　3 次元ユークリッド空間の半径 r の球面のガウス曲率を求めなさい．

IV-2　次のパラメータ表示がユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面を与えるような (u, v) の範囲を求め，その範囲でガウス曲率を求めなさい．

$$f(u, v) = \bigl(\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v\bigr).$$

IV-3　2 次元多様体 M 上のリーマン計量 ds^2 が局所座標系 $(U; u, v)$ によって

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2) \qquad (\sigma = \sigma(u, v) \in C^\infty(U))$$

と表されているとき，(u, v) を**等温座標系**または**共形座標系** とよぶ [13]．この座標系に関してクリストッフェルの記号 Γ_{ij}^k，ガウス曲率 K はそれぞれ

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 = \sigma_u, \qquad \Gamma_{12}^1 = \sigma_v, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\sigma_u, \\ &\Gamma_{11}^2 = -\sigma_v, \qquad \Gamma_{12}^2 = \sigma_u, \qquad \Gamma_{22}^2 = \sigma_v \\ &K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \end{aligned}$$

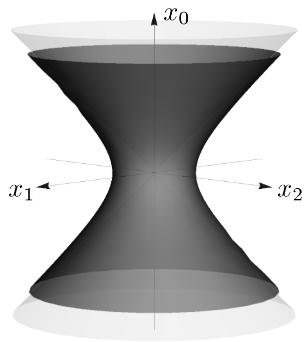
を満たすことを確かめなさい．

IV-4　3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の部分集合

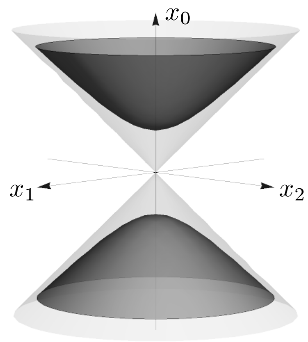
$$Q_c := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - c = 0\}$$

のガウス曲率を求めなさい．

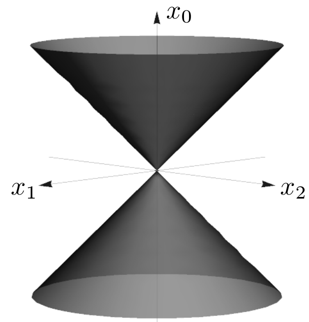
[13] 等温座標系：an isothermal coordinate system; 共形座標系：a conformal coordinate system. 一般に 2 次元リーマン多様体は，各点の近傍で等温座標系をもつ（[曲線と曲面] 第 15 節）．



Q_1



Q_{-1}



Q_0