V. 断面曲率

■ 驚異の定理の証明 第 IV 回では，3 次元（擬）ユークリッド空間の曲面に対してガウス曲率 K を定義し，

$$K = \varepsilon K_{\mathrm{ext}} \qquad \varepsilon = \langle \nu, \nu \rangle$$

を示した．ここで K_{ext} はワインガルテン作用素の（表現行列の）行列式，ν は単位法線ベクトルである．

ガウス曲率 K の定義は，式 (4.6) で，これはかなり複雑なので，もう少し「覚えやすい」形に書きなおそう．そのために驚異の定理（定理 4.4）の証明を思い出す．

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ の 3 次元ユークリッド空間へのはめ込み $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトルを ν とすると，各点 P に対して $\mathbb{R}^3 = T_{f(\mathrm{P})}\mathbb{R}^3$ は

$$\mathbb{R}^3 = T_{f(\mathrm{P})} f(U) \oplus \mathbb{R}\nu(\mathrm{P}) \tag{5.1}$$

と直交直和に分解される．したがって $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} \qquad \bigl([\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} \in T_{f(\mathrm{P})} f(U), [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}\nu(\mathrm{P})\bigr)$$

と一意的に分解できる．$[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の（点 $f(\mathrm{P})$ における）**接成分** $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$ を**法成分**とよぶことにする [1]．

曲面の接平面 $T_{f(\mathrm{P})} f(U)$ は $f_u(\mathrm{P})$, $f_v(\mathrm{P})$ ではられる平面だから，たとえば，ガウスの公式（定理 4.2 の左側の式）において，

$$\begin{aligned}
[f_{uu}]^{\mathrm{T}} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v, & [f_{uu}]^{\mathrm{N}} &= L\nu \\
[f_{uv}]^{\mathrm{T}} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v, & [f_{uv}]^{\mathrm{N}} &= M\nu \\
[f_{vv}]^{\mathrm{T}} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v, & [f_{vv}]^{\mathrm{N}} &= N\nu
\end{aligned}$$

が成り立つ．驚異の定理 4.4 は，

$$\langle f_{vvu} - f_{uvv}, f_u \rangle = 0 \tag{5.2}$$

を変形することで得られる．実際

$$\begin{aligned}
f_{vvu} &= \frac{\partial}{\partial u} f_{vv} = \frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}} + \frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{N}} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + \frac{\partial}{\partial u}(N\nu) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + N\frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial u}\nu \\
f_{uvv} &= \frac{\partial}{\partial v} f_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}} + \frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{N}} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + \frac{\partial}{\partial v}(M\nu) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + M\frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v}\nu
\end{aligned}$$

だが，ワインガルテンの公式

$$\nu_u = -W_1^1 f_u - W_1^2 f_v, \qquad \nu_v = -W_2^1 f_u - W_2^2 f_v$$

から

$$\begin{aligned}
[f_{vvu}]^{\mathrm{T}} &= \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - NW_1^1 f_u - NW_1^2 f_v, \\
[f_{uvv}]^{\mathrm{T}} &= \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - MW_2^1 f_u - MW_2^2 f_v
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，条件 (5.2) は

$$\begin{aligned}
0 = \langle f_{vvu} - f_{uvv}, f_u \rangle &= \left\langle [f_{vvu}]^{\mathrm{T}} - [f_{uvv}]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle
\end{aligned}$$

---

[*] 2017 年 5 月 9 日 (2016 年 5 月 30 日訂正)

[1] 接成分：the tangent component; 法成分：the normal component.

$$
\begin{aligned}
&\qquad - (NW_1^1 + MW_2^1)\langle f_u, f_u\rangle + (NW_1^2 + MW_2^2)\langle f_u, f_v\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}, f_u \right\rangle \\
&\qquad - N(EW_1^1 + FW_1^2) + M(EW_2^1 + FW_2^2) \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}, f_u \right\rangle - (LN - M^2) \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}, f_u \right\rangle - (EG - F^2)\det \hat W \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}, f_u \right\rangle - (EG - F^2)K_{\mathrm{ext}}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，E, F, G は第一基本形式，L, M, N は第二基本形式の成分で，$\hat W = (W^i_j)$ はワインガルテン作用素の表現行列，したがって

$$
\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1^1 & W_2^1 \\ W_2^2 & W_2^2 \end{pmatrix}
$$

が成り立つことを用いた（ここではとくにユークリッド空間の曲面を考えている）．このことから，(4.6) の右辺，すなわち第一基本形式 ds^2 から定まるガウス曲率は

$$
K = \frac{1}{EG - F^2}\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T}, f_u \right\rangle \tag{5.3}
$$

となることがわかる．

■ 共変微分　引き続きユークリッド空間の曲面のパラメータ表示 $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ を考える．

定義 5.1. 曲面上の**接ベクトル場**とは，U の各点 P に対して接ベクトル $X_{\mathrm P} \in T_{f(\mathrm P)}f(U)$ を与える対応

$$
X\colon U \ni \mathrm{P} \longmapsto X_{\mathrm P} \in T_{f(\mathrm P)}f(U)
$$

のことである．とくに，$T_{f(\mathrm P)}f(U)$ 基底 $\{f_u(\mathrm P), f_v(\mathrm P)\}$ を用いて

$$
X_{\mathrm P} = X_1(\mathrm P)f_u(\mathrm P) + X_2(\mathrm P)f_v(\mathrm P)
$$

と書くと，$\mathrm P$ が決まるごとに $X_j(\mathrm P)$ $(j = 1, 2)$ が定まるから X_1, X_2 は U 上で定義された関数である．これらが C^∞-級であるときベクトル場 X は**なめらか**であるという [2]．

微分 f_u, f_v は曲面上のなめらかなベクトル場である．一方，2 階微分 f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} は一般に接ベクトル場を与えない．

定義 5.2. パラメータ表示された曲面 $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ の接ベクトル場 X に対して

$$
\frac{\nabla}{\partial u}X := \left[\frac{\partial X}{\partial u}\right]^{\mathrm T}
$$

とおき，X の u 方向の**共変微分**とよぶ [3]．さらに，もうひとつのベクトル場 $Y = Y_1 f_u + Y_2 f_v$ をとり，

$$
\nabla_Y X := Y_1 \frac{\nabla}{\partial u}X + Y_2\frac{\nabla}{\partial v}X
$$

と定め，X の Y 方向の共変微分とよぶ．この記号に従えば，

$$
\frac{\nabla}{\partial u}X = \nabla_{\partial/\partial u}X, \qquad \frac{\nabla}{\partial v}X = \nabla_{\partial/\partial v}X
$$

と書けばよいことになる．

とくに，接ベクトル f_u, f_v の u-方向，v-方向の共変微分を f_u, f_v の線形結合として

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial u}f_u &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v & \qquad \nabla_{\partial/\partial u}f_v &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v \\
\nabla_{\partial/\partial v}f_u &= \Gamma_{21}^1 f_u + \Gamma_{21}^2 f_v & \qquad \nabla_{\partial/\partial v}f_v &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v
\end{aligned}
$$

[2] ベクトル場：a vector field; 接ベクトル場：a tangent vector field; なめらかな接ベクトル場：a smooth tangent vector field.

[3] 共変微分：the covariant derivative; 記号 ∇ は “nabla” と読む．まれに “atled” と読む人もいる．“The nabla is so-called because it looks like a harp; the Greek word for the Hebrew or Egyptian form of a harp is ‘nabla’” らしい：
http://www.chronicle.com/blognetwork/castingoutnines/2012/02/20/the-origin-of-the-nabla-symbol/

と表せば，係数 Γ^i_{jk} $(i,j=1,2)$ は定理 4.2 に現われるクリストッフェル記号にほかならない．この記号を用いれば，

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} X &= X_1 f_u + X_2 f_v = X_1 \frac{\partial}{\partial u} + X_2 \frac{\partial}{\partial v}, \\ Y &= Y_1 f_u + Y_2 f_v = Y_1 \frac{\partial}{\partial u} + Y_2 \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= Y_1 \nabla_{\partial/\partial u} X + Y_2 \nabla_{\partial/\partial v} X \\ &= Y_1 \left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} + \Gamma^1_{11} X_1 + \Gamma^1_{12} X_2 \right) f_u + \left(\frac{\partial X_2}{\partial u} + \Gamma^2_{11} X_1 + \Gamma^2_{12} X_2 \right) f_v \right] \\ &\quad + Y_2 \left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial v} + \Gamma^1_{21} X_1 + \Gamma^1_{22} X_2 \right) f_u + \left(\frac{\partial X_2}{\partial v} + \Gamma^2_{21} X_1 + \Gamma^2_{22} X_2 \right) f_v \right] \end{aligned}$$

と計算できる．すなわち，クリストッフェル記号がわかれば共変微分は定まったことになる．とくに $\Gamma^j_{12} = \Gamma^j_{21}$ $(j=1,2)$ に注意すれば

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} &\nabla_X Y - \nabla_Y X \\ &\quad = \left(X_1 \frac{\partial Y_1}{\partial u} - Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial u} + X_2 \frac{\partial Y_1}{\partial v} - Y_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} \right) f_u \\ &\qquad + \left(X_1 \frac{\partial Y_2}{\partial u} - Y_1 \frac{\partial X_2}{\partial u} + X_2 \frac{\partial Y_2}{\partial v} - Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial v} \right) f_v \\ &\qquad = [X, Y] \end{aligned}$$

となる．右辺の $[X,Y]$ は多様体上のベクトル場に対する**括弧積**，**交換子積**，**ブラケット積**，**リー括弧積**などとよばれるベクトル場同士の積で [4)]，リーマン計量によらず，多様体の構造のみから決まる量である．

とくに，クリストッフェル記号は第一基本形式 ds^2 の係数 E, F, G から定まるので，リーマン多様体 (U, ds^2) 上の量であることがわかる．このように，曲面を第一基本形式が与えるリーマン計量によりリーマン多様体とみなしたとき，そのリーマン多様体としての構造から定まる量のことを**内的** [5)]，リーマン計量のみからは定まらない量を**外的**という．

[4)] 括弧積：bracket; リー括弧積：the Lie bracket.
[5)] 内的：intrinsic ; 外的：extrinsic

例 5.3. ふたつのはめ込み

$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (u,v,0) \in \mathbb{R}^3, \quad f_2 \colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v) \in \mathbb{R}^3$$

は同じ第一基本形式 $ds^2 = du^2 + dv^2$ を与えるが，f_1 の平均曲率は 0，f_2 の平均曲率は $\pm 1/2$ なので，平均曲率は外的な量である．一方，定理 4.4 より，ガウス曲率は第一基本形式で表すことができるので，内的な量である． ◇

共変微分を用いると，驚異の定理 4.4 の証明に現れた式 (5.3) は，

$$(5.6)\qquad K = \frac{1}{EG - F^2} \left\langle \nabla_{\partial/\partial u} \nabla_{\partial/\partial v} f_v - \nabla_{\partial/\partial v} \nabla_{\partial/\partial u} f_v, f_u \right\rangle,$$

と表すことができる．

補題 5.4. 曲面 $f \colon U \to \mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 X, Y を (5.4) のように表しておくと，

$$\left\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X \right\rangle = (\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2) K$$

が成り立つ．ただし $[X,Y]$ は (5.5) の括弧積である．

証明． 単純計算（問題 V-1）． □

■ ユークリッド空間の超曲面の断面曲率　式 (5.6) をもとにして，ガウス曲率に対応する高次元リーマン多様体上の内的な量を構成する．整数 $n \geqq 3$ に対して，領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ のユークリッド空間へのはめ込み

$$f \colon U \ni (u^1, \dots, u^n) \longmapsto f(u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

を考える [6)]．このとき，各点 $\mathrm{P} \in U$ において

$$(5.7)\qquad \{f_1(\mathrm{P}), \dots, f_n(\mathrm{P})\} := \{f_{u^1}(\mathrm{P}), \dots, f_{u^n}(\mathrm{P})\} \qquad \left(f_j = \frac{\partial f}{\partial u^j} \right)$$

は一次独立だから，単位法線ベクトル $\nu(\mathrm{P})$ を定めることができる（問題 V-2）．

[6)] ここで突然だが，テンソル解析の古来からの習慣にあわせて座標の添字を**上付き**にする．以下，添字の上下は意味をもつものとする．すなわち a^i と a_i は区別する．

ユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の超曲面 $f(U)$ の接空間への制限 ds^2 をはめ込み f の**誘導計量**または**第一基本形式**というのであった．各点 P において (5.7) は $T_{\mathrm{P}}f(U)$ の基底をなす．この基底に関する ds^2 の表現行列を

$$\widehat{I} := (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \qquad g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle \tag{5.8}$$

と表すと，行列 $\widehat{I}$ は正定値な対称行列である．とくに $\det \widehat{I} > 0$ が成り立っている．そこで，$\widehat{I}$ の逆行列を上付き添字を用いて

$$\widehat{I}^{-1} = (g^{ij}) \qquad \text{すなわち} \qquad \sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \tag{5.9}$$

と書くことにする．

単位法線ベクトル場 ν を $(u^1, \dots, u^n)$ に対して $S^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |\boldsymbol{x}| = 1\}$ を対応させる写像とみなして，$W := -d\nu$ を**ワインガルテン作用素**とよんだ．各点 $\mathrm{P} \in U$ において W_{P} は $T_{\mathrm{P}}f(U)$ 上の線形変換で，その基底 (5.7) に関する表現行列を $\hat{W} = (W^i_j)$ と書く：

$$\frac{\partial \nu}{\partial u^j} = -W(f_j) = -\sum_{k=1}^{n} W^k_j f_k. \tag{5.10}$$

まとめて書けば

$$(\nu_1, \dots, \nu_n) = -(f_1, \dots, f_n)\hat{W}. \tag{5.11}$$

ワインガルテン作用素を用いて

$$I\!I(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w}) \rangle$$

で**第二基本形式**を定めた．とくに，$I\!I$ の基底 (5.7) に関する表現行列を $\widehat{I\!I} = (h_{ij})$ と書くと，

$$h_{ij} := I\!I(f_i, f_j) = -\langle f_i, \nu_j \rangle = \langle f_{ij}, \nu \rangle$$

となるので，$\widehat{I\!I}$ は対称行列である．すると

補題 5.5. 第一基本形式，第二基本形式，ワインガルテン作用素の基底 (5.7) に関する表現行列をそれぞれ $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$, $\hat{W}$ とすると，$\hat{W} := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}$ が成り立つ．

証明． 定理 4.1 と同じ（問題 V-3）． □

これらを用いると，定理 4.2 の高次元化が得られる：

定理 5.6. ここまでの記号のもと，$i, j = 1, \dots, n$ に対して

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{ij} f_l + h_{ij}\nu, \qquad \nu_j = -\sum_{k=1}^{n} W^k_j f_k$$

が成り立つ．ただし Γ^k_{ij} は $\widehat{I}$ の成分から次のように得られる量である：

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \tag{5.12}$$

式 (5.12) を計量 ds^2 のクリストッフェル記号という．

証明． 第二式と f_{ij} の法成分については曲面の場合と全く同様．f_{ij} の接成分の係数 Γ^k_{ij} が (5.12) のように書けることを言えば良い．まず，結論の第一式左側の式に f_k を内積すると

$$\langle f_{ij}, f_k \rangle = \sum_{l=1}^{n} g_{kl}\Gamma^l_{ij}$$

を得る．一方，一般に g_{st} の u^l に関する微分を $g_{st,l}$ と書けば，

$$\begin{aligned}
\langle f_{ij}, f_k \rangle &= \langle f_i, f_k \rangle_j - \langle f_i, f_{kj} \rangle = g_{ik,j} - \langle f_i, f_j \rangle_k + \langle f_{ik}, f_j \rangle \\
&= g_{ik,j} - g_{ij,k} + \langle f_{ik}, f_j \rangle = g_{ik,j} - g_{ij,k} + \langle f_k, f_j \rangle_i - \langle f_k, f_{ij} \rangle \\
&= g_{ik,j} - g_{ij,k} + g_{kj,i} - \langle f_{ij}, f_k \rangle.
\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{l=1}^{n} g_{kl}\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) =: \Gamma_{ijk}$$

を得る．この両辺に g^{sk} をかけて $k = 1$ から n までの和をとればよい． □

そこで，曲面の場合と同様に超曲面に接するベクトル場 X に対して

$$\nabla_{\partial/\partial u^j} X := \left[\frac{\partial X}{\partial u^j}\right]^{\mathrm{T}}$$

と定め，この ∇ を曲面上の共変微分という．共変微分は内的な量であるから，これを用いて，2 つのベクトル場 X, Y に対して

$$R_{X,Y} := \langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X \rangle \tag{5.13}$$

と定めると，これは内的な量である [7]．

補題 5.7. リーマン多様体 (M, ds^2) の点 P を一つ固定する．2 組のベクトル場の組 $\{X, Y\}$ と $\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}\}$ が

$$X_{\mathrm{P}} = \widetilde{X}_{\mathrm{P}}, \qquad Y_{\mathrm{P}} = \widetilde{Y}_{\mathrm{P}}$$

を満たすならば，$R_{X,Y}$ と $R_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}$ は点 P で同じ値をとる．

証明． 局所座標系 $(u^1, \dots, u^n)$ を用いてベクトル場 X, Y を

$$X = \sum_{k=1}^n X^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \qquad Y = \sum_{k=1}^n Y^k \frac{\partial}{\partial u^k} \tag{5.14}$$

と表示したとき，値 $R_{X,Y}$ が，リーマン計量の情報（g_{ij}, Γ_{ij}^k とそれらの微分）および X, Y の成分のみで定まる（X, Y の成分の微分を含まない）ことを示せばよい（問題 V-4）． $\square$

このことから，$X, Y \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して $R_{X,Y}$ は意味をもつ．

補題 5.8. リーマン多様体 (M, ds^2) の点 P と，$T_{\mathrm{P}}M$ の 2 次元の線形部分空間 Π_{P} を固定する．このとき， Π_{P} の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に対して

$$\frac{R_{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2}}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle^2} \tag{5.15}$$

は基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ のとり方によらない．

証明． 単純計算で示せるが，曲面のガウス曲率の表示式（補題 5.4） が X, Y のとり方によらず成立することと同じ理由による． $\square$

[7] リーマン幾何学では $R(X,Y,Z,T) := \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, T \rangle$ で定まる 4 階のテンソルを**曲率テンソル**とよぶが，ここで必要なのは式 (5.13) の形のみである．

定義 5.9. リーマン多様体 (M, ds^2) の点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ の 2 次元線形部分空間 Π_{P} に対して

$$K(\Pi_{\mathrm{P}}) := \frac{R_{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2}}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle^2} \qquad \bigl(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \text{ は } \Pi_{\mathrm{P}} \text{ の基底}\bigr)$$

と定め，Π_{P} に対する**断面曲率** [8] という．

曲面の場合の驚異の定理は，次の形で高次元化される（次回の講義参照）:

定理 5.10. 次元 n の多様体 M のはめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ の誘導計量 ds^2 によって M をリーマン多様体と見なす．このとき，$T_{\mathrm{P}}M$ における 2 次元部分空間 Π_{P} に対する断面曲率は

$$K(\Pi_{\mathrm{P}}) = \det \begin{pmatrix} I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\ I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle \end{pmatrix}$$
$$\bigl(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \text{ は } \Pi_{\mathrm{P}} \text{ の基底}\bigr)$$

を満たす．ただし $I\!I$ は f の第二基本形式である．

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間の空間的超曲面の断面曲率 ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の空間的曲面 $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ は，誘導計量によりリーマン多様体とみなせるから，定義 5.9 によって断面曲率が定義される．曲面の場合と同じように驚異の定理が成り立つ [9]．

定理 5.11. 次元 n の多様体 M の空間的はめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ の誘導計量 ds^2 によって M をリーマン多様体と見なす．このとき，$T_{\mathrm{P}}M$ における 2 次元部分空間 Π_{P} に対する断面曲率は

$$K(\Pi_{\mathrm{P}}) = -\det \begin{pmatrix} I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\ I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle \end{pmatrix}$$
$$\bigl(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \text{ は } \Pi_{\mathrm{P}} \text{ の基底}\bigr)$$

を満たす．ただし $I\!I$ は f の第二基本形式である．

[8] 断面曲率：the sectional curvature

[9] この場合，単位法線ベクトルが時間的 ($\langle \nu, \nu \rangle = -1$) であることに注意せよ．

問　　題　　V

V-1　補題 5.4 に証明を与えなさい.

V-2　一般に，$\mathbb{R}^n$ の領域 U のユークリッド空間へのはめ込み $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ や，ローレンツ・ミンコフスキー空間への非退化なはめ込み $h\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ が具体的に与えられたとき，その単位法線ベクトルを計算するにはどうしたらよいか，手順を説明しなさい.

V-3　補題 5.5 に証明を与えなさい.

V-4　ベクトル場 X, Y が (5.14) のように表示されているとき，式 (5.13) の $R_{X,Y}$ の値を X^k, Y^k $(k = 1, \dots, n)$ を用いて表しなさい（補題 5.7）.