VII. 等長変換・モデル

(2017 年 5 月 30 日訂正)

■ **等長変換** リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ のあいだの写像 $f\colon M \to M'$ が**等長写像**である [1] とは，任意の $\mathrm{P} \in M$ と $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$\langle df(\boldsymbol{v}), df(\boldsymbol{w})\rangle' = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$$

が成り立つ，すなわち f の微分写像が内積を保つことである．

補題 7.1. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の次元が等しいとき，等長写像 $f\colon M \to M'$ は局所微分同相，すなわち，任意の $\mathrm{P} \in M$ に対して P の M における近傍 U が存在して $f|_U\colon U \to f(U)$ が微分同相写像になる．

証明． 各点 P に対して $(df)_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}M \to T_{f(\mathrm{P})}M'$ は内積を保つ線形写像である．とくに

$$\langle (df)_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x}), (df)_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x})\rangle' = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$$

なので $(df)_{\mathrm{P}}$ の核は零空間．したがって $(df)_{\mathrm{P}}$ は単射．さらに $T_{\mathrm{P}}M$ と $T_{f(\mathrm{P})}M'$ は同じ次元を持つので，次元定理より $(df)_{\mathrm{P}}$ は全射であることがわかる．すなわち微分写像が全単射であるから，P の近傍で微分同相である． □

補題 7.2. 等長写像は共変微分を保つ．すなわち，写像 $f\colon M \to M'$ がリーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の間の等長写像ならば，M の任意のベクトル場 X, Y に対して

$$\nabla'_{df(X)} df(Y) = df(\nabla_X Y)$$

が成り立つ．ただし ∇ と ∇' はそれぞれ $(M, \langle\ ,\ \rangle)$, $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の共変微分である．

*) 2017 年 5 月 23 日

1) 等長写像：an isometry.

証明． 簡単のため M と M' が同じ次元を持つ場合を考える [2] とくに $\mathrm{P} \in M$ の近傍 U で $f|_U$ は微分同相写像を与えている．とくに P の近傍の座標系と $f(\mathrm{P})$ の近傍の座標系で共通のものをとることができる．とくに f の等長性から，計量の成分 (g_{ij}) (超曲面の場合は式 (5.8))，それらからきまるクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k （式 (5.12)）は共通なので，それらから定まる共変微分も共通である． □

測地線の方程式 (6.11) も共変微分（クリストッフェル記号）から決まるから，次がわかる：

系 7.3. 写像 $f\colon M \to M'$ がリーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の間の等長写像ならば，M の任意の測地線 γ に対して $f \circ \gamma$ は M' の測地線となる．

定義 7.4. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ からそれ自身への微分同相写像 f で等長写像となっているものを $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の**等長変換**という．

定義から次はすぐにわかる（問題 VII-1）：

補題 7.5. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす．

補題 7.5 の群を，リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の**等長変換群**という [3][4]．

■ **擬直交行列** 空間型の等長変換群を特定するために，擬直交行列の復習をしておこう．正の整数 n と整数 $0 \leqq t \leqq n$ に対して

$$\mathrm{O}(n,t) := \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tA J_{n-t,t} A = J_{n-t,t} \right\} \qquad J_{n-t,t} = \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_{n-t} \end{pmatrix}$$

を**擬直交行列群**，その要素を擬直交行列とよぶ．ただし $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正方行列全体の集合である．

2) この講義で必要なのは $\dim M = \dim M'$ の場合のみ．そうでない場合は M' の部分集合 $f(U)$ に制限して考えればよい．

3) 等長変換群：the isometry group.

4) ここでは深入りしないが，等長変換群には位相空間の構造を与えることができ，とくに単位元を含む連結成分はリー群，すなわち群構造に加えて多様体の構造をもつ．この講義では，空間型の等長変換群を考えるが，これは具体的に表示でき，多様体の構造も入れることができる（注意?? 参照）ので，以上のことは深入りしない．

事実 7.6.

- 擬直交行列の行列式は ± 1 である．とくに
$$\mathrm{SO}(n,t) := \{A \in \mathrm{O}(n,t) \mid \det A = 1\}$$
は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群である．
- $t \geqq 1$ のとき，擬直交行列の左上の $t\times t$ 行列の行列式の絶対値は 1 以上である．とくに，$t=1$ のときは一番左上の成分の絶対値が 1 以上である．
$$\mathrm{O}_+(n,t) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n,t) \mid \det A_{11} \geqq 1 \right\}$$
は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群となる（問題 II-2 参照）．ただし，A_{11}, A_{22} はそれぞれ t 次，$(n-t)$ 次の正方行列である．

とくに $\mathrm{O}(n,t)$ には $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元多様体の構造が入り，群演算（積と逆）は C^∞-級写像を与えている．すなわち $\mathrm{O}(n,t)$ はリー群である．

事実 7.7. リー群 $\mathrm{O}(n,t)$ は連結でない．とくに

- $t=0$ のとき，$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(n,0)$ の単位元を含む連結成分は $\mathrm{SO}(n)$ である．
- $t \geqq 1$ のとき $\mathrm{O}(n,t)$ は，行列式，左上の小行列式の符号によって 4 つの連結成分にわかれる．とくに，単位元を含む連結成分は $\mathrm{SO}(n,t)\cap \mathrm{O}_+(n,t)$ である．

擬直交行列の定義から，次のことがわかる：

補題 7.8. 正方行列 A が $\mathrm{O}(n,t)$ の要素であるための必要十分条件は $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_n)$ を列ベクトルに分解したとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n_t$ の正規直交基底をなす，すなわち
$$\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle = \begin{cases} -1 & (1 \leqq j = k \leqq t) \\ +1 & (t+1 \leqq j = k \leqq n) \\ \ \ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$
となることである．

補題 7.9. 擬直交行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ の転置 ${}^tA$ も $\mathrm{O}(n,t)$ の要素である．

証明． 仮定より $J{}^tAJA = \mathrm{id}$ ($J = J_{n-t,t}$, id は単位行列) だから $A^{-1} = J{}^tAJ$ が成り立つ．とくに $\mathrm{id} = AA^{-1} = AJ{}^tAJ$ なので，両辺に右から J をかけると，$AJ{}^tA = J$ となる． □

これらを合わせると次が得られる．

系 7.10. 正方行列 A が $\mathrm{O}(n,t)$ の要素であるための必要十分条件は，A の行ベクトル（の転置）が正規直交基底をなすことである．

補題 7.11. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の時間的列ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$ と行列 $A \in \mathrm{O}(n+1,1)$ に対して
$${}^t(y_0,\dots,y_n) := A\boldsymbol{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
と書くと，
$$\operatorname{sgn} y_0 = \operatorname{sgn} x_0 \operatorname{sgn} a_{00} \qquad \left(\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \\ \ \ 0 & (x=0) \end{cases} \right)$$
である．とくに x_0 と y_0 が同符号をもつための必要十分条件は $A \in \mathrm{O}_+(n+1,1)$ となることである．

証明． 行列 A の最初の行からなる行ベクトルの転置 $\boldsymbol{a} := {}^t(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n})$ は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = -1$ を満たしている．
$$\boldsymbol{a} = a_{00}\boldsymbol{e}_0 + \vec{a}, \qquad \boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{x} \qquad (\boldsymbol{e}_0 = {}^t(1,0,\dots,0))$$
と分解しておけば，$-1 = -a_{00}^2 + |\vec{a}|^2$，また，$\boldsymbol{x}$ が時間的であることから $-x_0^2 + |\vec{x}|^2 < 0$．したがって

$$
\begin{aligned}
y_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n \\
&= a_{00}x_0 + \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \geqq a_{00}x_0 - |\vec{a}|\,|\vec{x}| = a_{00}x_0 - \sqrt{a_{00}^2 - 1}|\vec{x}| \\
&> a_{00}x_0 - \sqrt{a_{00}^2 - 1}|x_0| \geqq a_{00}x_0 - |a_{00}|\,|x_0|, \\
y_0 &\leqq a_{00}x_0 + |\vec{a}|\,|\vec{x}| = a_{00}x_0 + \sqrt{a_{00}^2 - 1}|\vec{x}| \\
&< a_{00}x_0 + \sqrt{a_{00}^2 - 1}|x_0| \leqq a_{00}x_0 + |a_{00}|\,|x_0|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．このことから結論が得られる．ここで，空間的ベクトル $\vec{x}$, $\vec{a}$ に対するシュワルツの不等式を用いた． □

■ 擬直交変換　内積（一般に正定値とは限らない，非退化内積）$\langle\ ,\ \rangle$ をもつベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ で

$$\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V)$$

を満たすものを**擬直交変換**という．擬直交行列の定義から，次は明らか：

補題 7.12. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ の変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad A \in \mathrm{O}(n,t)$$

は擬直交変換で，$\mathbb{R}^n_t$ の擬直交変換はこの形のものに限る．

■ ユークリッド空間の等長変換

補題 7.13. 直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$ と定ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の変換

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換である．

証明. 写像 f の逆写像は $f^{-1}(\boldsymbol{y}) = A^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})$ で与えられるので f は全単射．以下，f が等長写像であることを示す．点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ における写像 f の微分写像 $(df)_{\boldsymbol{x}}$ は

$$(df)_{\boldsymbol{x}}X = AX \qquad (X \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n)$$

と表される．実際，$\gamma(0) = \boldsymbol{x}$, $\dot\gamma(0) = X$ となるような $\mathbb{R}^n$ の曲線 γ をとると，

$$(df)_{\boldsymbol{x}}X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\circ\gamma(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A\gamma(t) + \boldsymbol{b}) = A\dot\gamma(0) = AX.$$

したがって，

$$\langle (df)_{\boldsymbol{x}}X, (df)_{\boldsymbol{x}}Y \rangle = \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

すなわち f は等長変換である． □

したがって，$\mathbb{R}^n$ の等長変換群は $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(A \in \mathrm{O}(n))$ の形の写像全体を含む．次の定理から，実は等長変換はこの形に限る：

定理 7.14. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \qquad A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

と書ける．

証明. 等長変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，$\boldsymbol{b} := f(\boldsymbol{0})$ とおき，$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}$ とおくと，$\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}$ は等長変換であり（補題 7.13），等長変換の合成はまた等長変換である（補題 7.5）から，g は等長変換で，とくに $g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を満たす．この写像 g の原点における微分写像

$$(dg)_{\boldsymbol{0}}\colon T_{\boldsymbol{0}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

は内積を保つ線形写像（直交変換）なので，

$$(dg)_{\boldsymbol{0}}X = A\boldsymbol{x} \qquad A \in \mathrm{O}(n)$$

となる行列 A が存在する．そこで $h(\boldsymbol{x}) := A^{-1}g(\boldsymbol{x})$ とおく．すると，A^{-1} も直交行列だから，h は $\mathbb{R}^n$ の直交変換で，

(7.1) $$h(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \qquad (dh)_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{id}$$

を満たしている．以下，h が恒等写像であることを示そう．原点 $\boldsymbol{0}$ を初速度 $\boldsymbol{v}$ で出発する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = t\boldsymbol{v}$$

と書ける（補題 6.13）．ここで，等長変換 h により測地線は測地線に移されるから（補題 7.3），$\tilde\gamma = h\circ\gamma$ はまた測地線である．とくに (7.1) から $\tilde\gamma(0) = \boldsymbol{0}$, $\dot{\tilde\gamma}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{v}$ が成り立つ．すなわち $\tilde\gamma(t)$ は $\gamma(t)$ と同じ初期条件を満たす測地線だから，

$$h(t\boldsymbol{v}) = \tilde\gamma(t) = \gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = t\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．とくに $t = 1$ とすれば

$$h(\boldsymbol{v}) = \tilde\gamma(1) = \gamma_{\boldsymbol{v}}(1) = \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

となり，h が恒等写像であることがわかる．すなわち

$$\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{x}) = A^{-1}g(\boldsymbol{x}) = (A^{-1})(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b})$$

だから $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ である． □

■ 双曲空間　次に双曲空間の等長変換を決定しよう．双曲空間 $H^n(-k)$ は

$$H^n(-k) = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t\{(x^0, \dots, x^n)\} \in \mathbb{R}^{n+1}_1, \middle| \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\frac{1}{k},\ x^0 > 0 \right\}$$

で定義された $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面とみなしている．

補題 7.15. 行列 $A \in \mathrm{O}_+(n+1,1)$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定めると，f は $H^n(-k)$ の等長変換を与える．ただし，

$$\mathrm{O}_+(n+1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n+1,1) \middle| a_{00} > 0 \right\}$$

である．

証明. 写像 f は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ から $\mathbb{R}^{n+1}_1$ への写像だが，定義域を $H^n(-k)$ に制限すると，$f(H^n(-k)) = H^n(-k)$ で，微分同相写像 $f\colon H^n(-k) \to H^n(-k)$ を与えている．実際，$A \in \mathrm{O}(n+1,1)$ から $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ に対して

$$\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\frac{1}{k}.$$

また，$\boldsymbol{x} = {}^t(x^0, \dots, x^n)$，$f(\boldsymbol{x}) = {}^t(y^0, \dots, y^n)$ とおくと $x_0 > 0$，$a_{00} > 0$ から，$y_0 > 0$ であることがわかる（補題 7.11）．したがって，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{H}^n(-k)$ であることがわかる．さらに $g(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，これが f の逆写像となるので，f は $H^n(-k)$ から自分自身への微分同相写像を与えている．

さらに，点 $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ に対して

$$(df)_{\boldsymbol{x}} X = AX \qquad X \in T_{\boldsymbol{x}} H^n(-k)$$

が成り立つ（補題 7.13 の証明参照）なので，

$$\langle (df)_{\boldsymbol{x}} X, (df)_{\boldsymbol{x}} Y \rangle = \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

となり，f が等長写像であることが示された． □

定理 7.16. 双曲空間 $H^n(-k)$ の等長変換は

$$H^n(-k) \ni \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x} \in H^n(-k) \qquad (A \in \mathrm{O}_+(n+1,1))$$

と書ける．

証明. $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底を

$$\boldsymbol{e}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

と書くと，これらはローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の正規直交基をなしている．とくに

$$\boldsymbol{x}_0 := \frac{1}{\sqrt{k}} \boldsymbol{e}_0 \in H^n(-k)$$

となっている．与えられた等長変換 $f\colon H^n(-k) \to H^n(-k)$ による $\boldsymbol{x}_0$ の像を $\boldsymbol{y}_0 := f(\boldsymbol{x}_0)$ と書くと，

$$\boldsymbol{a}_0 := \sqrt{k}\boldsymbol{y}_0 = \sqrt{k} f(\boldsymbol{x}_0)$$

は時間的単位ベクトルである．

ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ は点 $\boldsymbol{x}_0$ における $H^n(-k)$ の接空間の正規直交基底になっている．したがって，f が等長変換であることから

$$\boldsymbol{a}_j := (df)_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_j) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

とおけば $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $T_{\boldsymbol{y}_0} H^n(-k)$ の正規直交基を与えている．特に $T_{\boldsymbol{y}_0} H^n(-k)$ は $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{a}_0/\sqrt{k}$ の直交補空間だから，$\{\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の正規直交基底を与えている．とくに $\boldsymbol{a}_0 = {}^t(a_{00}, \dots, a_{0n})$ と書くと，$\boldsymbol{a}_0/\sqrt{k} \in H^n(-k)$ から $a_{00} > 0$．したがって，これらを並べた $(n+1)$ 次正方行列

$$A := (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

は $\mathrm{O}_+(n+1,1)$ の元を与える．とくにその逆行列 A^{-1} は，各 $j = 0, 1, \dots, n$ に対して $\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{e}_j$ に写す線形写像を与えている．そこで $g := A^{-1}f$ とおく．すると

$$g(\boldsymbol{x}_0) = A^{-1}\boldsymbol{y}_0 = A^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{a}_0\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} A^{-1}\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{x}_0,$$
$$(dg)_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_j) = A^{-1}(df)_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j.$$

とくに $\boldsymbol{x} \mapsto A^{-1}\boldsymbol{x}$ が等長変換であること（補題 7.15）から g は等長変換で，

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad (dg)_{\boldsymbol{x}_0} = \mathrm{id} \tag{7.2}$$

を満たしている．

ここで，時刻 $t = 0$ で点 $\boldsymbol{x}_0$ を速度 $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}_0}H^n(-k)$ で通過する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ を考える：

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \left(\cosh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sinh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}.$$

系 7.3 より $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma_{\boldsymbol{v}}$ も測地線で，(7.2) より，$t = 0$ で点 $\boldsymbol{x}_0$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過することがわかる．したがって，測地線の一意性より

$$g(\gamma_{\boldsymbol{v}}(t)) = \tilde{\gamma}(t) = \gamma_{\boldsymbol{v}}(t) \tag{7.3}$$

が成り立つ．ここで，$H^n(-k)$ の完備性とホップ・リノーの定理（事実 6.12）から，任意の点 $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ に対して，$\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ測地線が存在する．すなわち，ある $\boldsymbol{v}$ と t が存在して $\boldsymbol{x} = \gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ と書ける[5] ので，対応

$$\mathbb{R} \times T_{\boldsymbol{x}_0}H^n(-k) \ni (t\boldsymbol{v}) \longmapsto \gamma_{\boldsymbol{v}}(t) \in H^n(-k)$$

は全射．したがって (7.3) から g は恒等写像でなければならない．したがって

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}) = A^{-1}f(\boldsymbol{x})$$

となり，結論が得られた． □

■ **球面**　双曲空間の場合と全く同様の議論で，次がわかる（問題 VII-3：

定理 7.17. 行列 $A \in \mathrm{O}(n+1)$ に対して，写像 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は球面 $S^n(k) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の等長変換を与える．逆に，球面の等長変換はこの形に書ける．

■ **球面・双曲空間のモデル**　ここでは，球面・双曲空間を 1 次元高い次元の（擬）ユークリッド空間の超曲面とみなした．一方，これらの多様体の適切な座標系をとることで，外の空間を「忘れる」ことができる．

例 7.18 (球面の立体射影)**.** 球面 $S^n = S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の「北極」$\mathrm{N} := (0, 0, \dots, 1)$ 「南極」$\mathrm{S} := (0, 0, \dots, -1)$ を考え，

$$\pi_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1 - x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n), \qquad \pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1 + x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n)$$

[5] この場合は，$\boldsymbol{x}$ から具体的に $\boldsymbol{v}$ と t が求まるので，ホップ・リノーの定理を持ちださなくてもよい（問題 VII-2）．

と定めると，

$$\pi_{\mathrm{N}} \colon S^n \setminus \{\mathrm{N}\} \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi_{\mathrm{S}} \colon S^n \setminus \{\mathrm{S}\} \to \mathbb{R}^n$$

は微分同相写像を与える．とくに $\mathbb{R}^n$ の標準座標 $(u^1, \dots, u^n)$ は $S^n \setminus \{\mathrm{N}\}$, $S^n \setminus \{\mathrm{S}\}$ の局所座標系を与える．この局所座標系に関する S^n の計量の表示は

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + |u|^2)^2}\left((du^1)^2 + \dots + (du^n)^2\right) \qquad |u| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (u^j)^2}$$

で与えられる[6]． ♢

例 7.19 (双曲空間の立体射影)**.** 双曲空間 $H^n = H^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して

$$\pi(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1 + x^0}(x^1, \dots, x^n)$$

と定めると，

$$\pi \colon H^n \to D^n = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\boldsymbol{X}| < 1\}$$

は微分同相写像を与える．とくに $\mathbb{R}^n$ の標準座標 $(u^1, \dots, u^n)$ は H^n 座標系を与える．この局所座標系に関する S^n の計量の表示は

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |u|^2)^2}\left((du^1)^2 + \dots + (du^n)^2\right) \qquad |u| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (u^j)^2}$$

で与えられる． ♢

[6] とくに，座標系 (u^j) 上でのユークリッド的な角度と，リーマン計量 ds^2 による角度は一致する．このような座標系 $(u^1, \dots, u^n)$ を**共形座標**，共形座標が取れるようなリーマン多様体を**共形平坦**である，という．

問　題　VII

VII-1　補題 7.5 に証明を与えなさい.

VII-2　双曲空間 $H^n(-k)$ 上の点

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}\,{}^t(1,0,\dots,0)$$

と $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ を結ぶ測地線の $\boldsymbol{x}_0$ における速度ベクトルを求めなさい.

VII-3　定理 7.17 を証明しなさい.

VII-4　例 7.18 の真似をして，定曲率 k の球面の共形座標を求めなさい.