VIII. ローレンツ空間形

■ ローレンツ多様体　多様体 M の次元を n とする．M の各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ に，符号数 $(n-1,n)$ の内積（ミンコフスキー内積）$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{P}}$ が与えられていて，次の意味で滑らかであるとする：

任意の C^∞-級ベクトル場 X, Y に対して次の写像は C^∞-級：

$$\langle X, Y\rangle : M \ni \mathrm{P} \longmapsto \langle X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}\rangle_{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}.$$

このとき，組 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を**ローレンツ多様体**とよぶ [1]．

例 8.1. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^n_1$ は，各接空間を $\mathbb{R}^n_1$ と同一視すれば，ローレンツ多様体であることがわかる．◇

例 8.2. 正の整数 n と 正の実数 k に対して

$$S^n_1(k) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_1 \tag{8.1}$$

とおく．これは，第 III 回で挙げた二次曲面 $Q_{1/\sqrt{k}}$ である（式 (3.3)）．特に，$S^n_1(k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の滑らかなかつ連結な超曲面で，点 $\boldsymbol{x} \in S^n_1(k)$ における単位法線ベクトルは $\nu := \sqrt{k}\boldsymbol{x}$ である．とくに $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ なので単位法線ベクトルは空間的．したがって，計量の接空間への制限の符号は $(n-1,1)$ となり，$S^n_1(k)$ がローレンツ多様体であることがわかる．これを**ド・ジッター空間**または**ド・ジッター時空**という [2]　◇

例 8.3. 正の整数 n と 正の実数 k に対して $\mathbb{R}^{n+1}_2$ の部分集合

$$H^n_1(-k) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_2 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_2 \tag{8.2}$$

とおく．すると，特に，$H^n_1(-k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_2$ の滑らかなかつ連結な超曲面で，点 $\boldsymbol{x} \in H^n_1(-k)$ における単位法線ベクトルは $\nu := \sqrt{k}\boldsymbol{x}$ である．とくに $\langle \nu, \nu\rangle = -1$．接空間は ν の直交補空間だから，定理 1.24 から計量の接空間への制限の符号は $(n-1,1)$ となり，$H^n_1(-k)$ がローレンツ多様体であることがわかる．これを**反ド・ジッター空間**または**反ド・ジッター時空**という．◇

[*] 2017 年 5 月 30 日

[1] ローレンツ多様体：a Lorentzian manifold.

[2] ド・ジッター空間：the de Sitter space. 反ド・ジッター空間：the anti de Sitter space.

■ ローレンツ空間形　ローレンツ多様体にはリーマン多様体と同様な方法で共変微分が定義できるので，接空間の非退化な 2 次元線形部分空間に対して**断面曲率**を定義することができる．

例 8.4. ローレンツ・ミンコフスキー空間の断面曲率は恒等的に 0 である．◇

例 8.5. ド・ジッター空間 $S^n_1(k)$ の断面曲率は恒等的に k である．これは，定理 5.11 の類似を用いれば示すことができる．◇

例 8.6. 反ド・ジッター空間 $H^n_1(-k)$ の断面曲率は恒等的に $-k$ である．◇

一方，ローレンツ多様体の共変微分の概念を用いれば，測地線も定義できる．測地線 $\gamma(t)$ に対して $\langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle$ は t によらず一定なので（補題**??**），とくに $\dot\gamma$ の因果特性は測地線上で変化しない．速度ベクトルが空間的（時間的，光的）な測地線を**空間的測地線**（**時間的測地線**，**光的測地線**）という [3]

例 8.7. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^n_1$ の，時刻 $t=0$ で点 $\boldsymbol{p}$ を速度 $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n_1$ で通過する測地線は

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$$

である．実際 $\ddot\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{0}$ だから $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は測地線である．

◇

例 8.8. ド・ジッター空間 $S^n_1(k)$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ （すなわち $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ となる零でないベクトル）をとり，

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle|}(>0)$$

とおく．このとき，時刻 $t=0$ で点 $\boldsymbol{x}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表示される：

[3] 空間的測地線：a space-like geodesic, 時間的測地線：a time-like geodesic, 光的測地線：a light-like geodesic.

- $\boldsymbol{v}$ が空間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cos\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sin\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が時間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cosh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sinh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が光的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}.$$

実際，これらの曲線 $\gamma(t) := \gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = [\ddot\gamma]^{\mathrm{T}} = [k\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

である [4]． $\diamondsuit$

例 8.9. 反ド・ジッター空間 $H^n_1(-k)$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ （すなわち $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ となる零でないベクトル）をとり，

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle|}(> 0)$$

とおく．このとき，時刻 $t = 0$ で点 $\boldsymbol{x}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表示される：

- $\boldsymbol{v}$ が空間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cosh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sinh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が時間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cos\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sin\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が光的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}.$$

[4] 第 VI 回で与えた超曲面の測地線の表示は，超曲面の計量が不定値であっても，非退化であれば成立する．

実際，これらの曲線 $\gamma(t) := \gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = [\ddot\gamma]^{\mathrm{T}} = [k\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

である [5]． $\diamondsuit$

ローレンツ多様体の任意の測地線が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるとき，ローレンツ多様体は**完備**であるという [6]．完備，断面曲率一定のローレンツ多様体を**ローレンツ空間型**とよぶ．

例 8.1 のローレンツ・ミンコフスキー空間，例 8.2 のド・ジッター空間，例 8.3 の反ド・ジッター空間はそれぞれ断面曲率 0，正，負の空間型を与えている．

[5] 第 VI 回で与えた超曲面の測地線の表示は，超曲面の計量が不定値であっても，非退化であれば成立する．

[6] ローレンツ計量は，直接距離を誘導しないので，距離空間としての完備性とここで述べた完備性の関係（ホップ・リノーの定理 **??**）はそのままの形では成立しない．