I. 不定値計量

■ 線形代数の復習　この節では，簡単のために，実数を成分とする n 次正方行列のことを単に正方行列ということにする．正方行列 A に対してその転置行列を ${}^tA$，単位行列を I（次数を特定したいときは I_n）と書く[1]．

- 正方行列 P が**直交行列**であるとは，${}^tPP = P{}^tP = I$ が成り立つことである．
- 正方行列 A が（実）**対称行列**であるとは，${}^tA = A$ が成り立つことである．
- 実対称行列の固有値は実数で，一つの固有値の固有空間の次元はその重複度と一致する．
- 実対称行列は直交行列によって対角化できる．すなわち，実対称行列 A に対して直交行列 P で
$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
となるものが存在する．ここで $\operatorname{diag}(\dots)$ は "$\dots$" を対角成分にもつ対角行列を表す．とくに $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ は A の固有値をその重複度の数ずつ並べたものである．

以下，V を実数体 $\mathbb{R}$ を係数とする n 次元線形空間とする．

■ 双線形形式と 2 次形式

定義 1.1. 線形空間 V 上の**双線形形式**[2] とは，写像 $q\colon V \times V \to \mathbb{R}$ で次を満たすものである：

- 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して写像 $q(\boldsymbol{x}, \cdot)\colon V \to \mathbb{R}$ および $q(\cdot, \boldsymbol{x})\colon V \to \mathbb{R}$ が線形（双線形性）．

[*] 2017 年 04 月 11 日 (2017 年 5 月 2 日訂正)
[1] 正方行列：a square matrix；転置：transposition；単位行列：the identity matrix.
[2] 双線形形式：a bilinear form; 2 次形式：a quadratic form.

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が成り立つ（対称性）．

双線形形式 q に附随する **2 次形式**とは $\tilde{q}\colon V \ni \boldsymbol{x} \mapsto q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ のことである．

補題 1.2. 線形空間 V 上の 2 つの双線形形式 q, r に附随する 2 次形式をそれぞれ $\tilde{q}, \tilde{r}$ とするとき，$\tilde{q} = \tilde{r}$ なら $q = r$ である．

証明． 各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して
$$\begin{aligned}\tilde{q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \\ &= \tilde{q}(\boldsymbol{x}) + 2q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \tilde{q}(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$
だから
$$q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\bigl(\tilde{q}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - \tilde{q}(\boldsymbol{x}) - \tilde{q}(\boldsymbol{y})\bigr)$$
なので，双線形形式 q は $\tilde{q}$ のみから定まる．　□

すなわち，双線形形式は 2 次形式により定まるので，双線形形式のことを 2 次形式とよぶことも多い．

例 1.3. 実数を成分とする n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ と列ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}}$ は 1 次の正方行列となるのでこれをスカラと見なすと，写像
$$q_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}) \longmapsto {}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$
が定まる．ただし ${}^t\hat{\boldsymbol{x}}$ は列ベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}$ を転置して得られる行ベクトルを表す．すると，行列の積の性質から写像 q_A は $\mathbb{R}^n$ の双線形形式であることがわかる．とくに単位行列 I に対して q_I は $\mathbb{R}^n$ の標準内積を与えている．

逆に $\mathbb{R}^n$ の双線形形式 q があたえられた時 $q = q_A$ をみたす対称行列 A が存在する．　◇

■ 双線形形式の表現行列　線形空間 V の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ をひと組とる．すると同型写像

$$V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

$$\left(\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

が定まる．$\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} \in V$ の基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する**成分**とよぶ．

補題 1.4. 線形空間 V 上の双線形形式 q に対して

$$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big(= q_A(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}})\Big) = {}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}}$$

となるような n 次対称行列 A がただ一つ存在する．ただし $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する成分である．

証明． 行列 $A = (a_{ij})$ を $a_{ij} := q(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j)$ で定めればよい（問題 I-2）． □

補題 1.4 の行列 A を，双線形形式 q の基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する**表現行列**とよぶ．

補題 1.5. 線形空間 V の 2 つの基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ と $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]$ の間の基底変換行列を $U = (u^i_j) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とする：

$$[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]U \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^n u^i_j\boldsymbol{v}_i \quad (j = 1,\dots,n).$$

ただし $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正則行列全体の集合（**一般線形群** [3]）を表す．このとき，双線形形式 q の，基底 $[\boldsymbol{v}_j]$ に関する表現行列 A と 基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する表現行列 $\tilde{A}$ は関係式

$$\tilde{A} = {}^tUAU$$

を満たす．

[3] 一般線形群：the general linear group.

証明． ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in V$ を

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]\hat{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]\tilde{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]\hat{\boldsymbol{y}} = [\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]\tilde{\boldsymbol{y}}$$

と成分表示すると，

$$\hat{\boldsymbol{x}} = U\tilde{\boldsymbol{x}}, \qquad \hat{\boldsymbol{y}} = U\tilde{\boldsymbol{y}} \quad \text{となるので，} \quad q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^t\hat{\boldsymbol{x}}A\hat{\boldsymbol{y}} = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}{}^tUAU\tilde{\boldsymbol{y}}.$$

ここで $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は任意だから結論が得られる． □

■ 双線形形式の非退化性

定義 1.6. 線形空間 V 上の双線形形式 q が

- **正定値**（**半正定値**）[4] であるとは，任意の $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0$（$\geqq 0$） となることである．
- **負定値**であるとは，$-q$ が正定値となることである．
- **非退化**であるとは，「$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{y} \in V$ に対して成り立つならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことである．

例 1.7. 線形代数で学んだ線形空間の内積とは，正定値の双線形形式のことである． ♢

注意 1.8. 正定値（負定値）双線形形式は非退化である．実際，$q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ がすべての $\boldsymbol{y}$ に対して成り立つならばとくに $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$．ここで q が正定値（負定値）かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なら $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0$ (< 0) となることから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とならなければならない．

■ 非退化 2 次形式の符号

命題 1.9. 線形空間 V 上の双線形形式 q が正定値（半正定値，負定値，非退化）であるための必要十分条件は，q の表現行列の固有値が全て正（非負，負，零でない）となることである．この条件は V の基底によらない．

[4] 正定値：positive definite；半正定値：positive semi-definite；負定値：negative definite；不定値：indefinite；非退化：non-degenerate.

証明. 基底 $[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する q の表現行列を A とする．これは実対称行列だから，固有値 λ_j $(j=1,\dots,n)$ はすべて実数で，直交行列 P により対角化できる：

$$ {}^tPAP=\Lambda,\quad \Lambda:=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},\quad {}^tPP=I=\text{単位行列}. $$

そこで $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]P$ とおくと $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する q の表現行列は Λ．ベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する成分をそれぞれ $\hat{\boldsymbol{x}}={}^t(x_1,\dots,x_n)$，$\hat{\boldsymbol{y}}={}^t(y_1,\dots,y_n)$ と書けば

$$ q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_jy_j $$

となる．これを用いれば結論が得られる（問題 I-3）． □

線形空間 V の部分空間 W をとると，V 上の双線形形式 $q\colon V\times V\to\mathbb{R}$ を W に制限した写像 $q|_W\colon W\times W\to\mathbb{R}$ は W 上の双線形形式を与える．

定義 1.10. 線形空間 V 上の非退化対称双線形形式 q に対して

- V の部分空間 W で $q|_W$ が W 上の正定値双線形形式となるような W の次元の最大値を n_+ と書き，q の **正の符号数**,
- V の部分空間 W で $q|_W$ が W 上の負定値双線形形式となるような W の次元の最大値を n_- と書き，q の **負の符号数**

という．これらの組 (n_+,n_-) を q の**符号数**[5] という．

例 1.11. 線形空間 V 上の正定値（負定値）な 2 次形式の符号数は $(n,0)$ $((0,n))$ である．ただし n は V の次元である． ♢

定理 1.12. 線形空間 V 上の非退化対称双線形形式 q の正（負）の符号数 n_+ (n_-) は，q の表現行列の正（負）の固有値の個数である．とくに

$$ n_++n_-=n=\dim V. $$

証明. 命題 1.9 の証明のように，基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ に関する q の表現行列は対角行列 Λ としてよい．さらに Λ の対角成分はすべて 0 でないから，$\lambda_1,\dots,\lambda_t$ は負，$\lambda_{t+1},\dots,\lambda_n$

[5]符号数：the signature.

は正としてよい．すると，$\{\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_t\}$ で生成される V の部分空間上で q は負定値．したがって $n_-\geqq t$．また，$\{\boldsymbol{w}_{t+1},\dots,\boldsymbol{w}_n\}$ で生成される部分空間上で q は正定値．したがって $n_+\geqq n-t$:

$$ n_-\geqq t,\qquad n_+\geqq n-t \tag{1.3} $$

一方，V の部分空間 W_+ (W_-) で $q|_{W_+}$ $(q|_{W_-})$ が正定値（負定値）であり，かつ次元が n_+ (n_-) となるものが存在する．ここで $\boldsymbol{x}\in W_+\cap W_-$ とすると $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\leqq 0$ かつ $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqq 0$ だから $q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$．$q|_{W_+}$ が正定値であることに注意すれば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ したがって $W_+\cap W_-=\{\boldsymbol{0}\}$ となるので，

$$ n_++n_-=\dim W_++\dim W_-\leqq\dim V=n. $$

したがって (1.3) は

$$ n_-\geqq t,\qquad n-n_-\geqq n-t\qquad n-n_+\geqq t,\qquad n_+\geqq n-t $$

となるので $n_-=t, n_+=n-t$． □

注意 1.13. 定理 1.12 から，表現行列の正，負の固有値の個数は基底のとり方によらないことがわかる．このことは「対称行列 A の正，負の固有値の個数は変換 $A\to{}^tUAU$ (U は正則行列）で不変」であることと同値である．

定義 1.14. 有限次元線形空間 V 上の非退化対称双線形形式のことを V の**内積**という [6]．内積が一つ与えられている線形空間のことを**内積空間** [7] という．

■ **擬ユークリッド的ベクトル空間**　線形空間 $\mathbb{R}^n$ $(n:=s+t\geqq 2,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$ 上で双線形形式

$$ \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{s,t}:=-\left(\sum_{j=1}^s v_jw_j\right)+\left(\sum_{k=s+1}^{s+t}v_kw_k\right)\qquad\left(\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right) \tag{1.4} $$

[6]内積：an inner product.
線形代数で学んだ内積の定義（非退化性ではなく正定値性を仮定する）とは少し違う．
[7]内積空間：an inner product space, a metric space.

を考えると，これは $\mathbb{R}^n$ 上の符号数 (t,s) の内積を与える．このような内積が与えられた $\mathbb{R}^n$ のことを $\mathbb{R}^n_s$ と書き，符号 (t,s) をもつ**（擬）ユークリッド・ベクトル空間**[8] という．内積 (1.4) は

$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle_{s,t} = {}^t\boldsymbol{v}J_{s,t}\boldsymbol{w} \qquad J_{s,t} := \begin{pmatrix} -I_s & O \\ O & I_t \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

と表される．

とくに符号が $(n,0)$ の場合，すなわち内積が正定値の場合は $\mathbb{R}^n_0$ を**ユークリッド**・ベクトル空間[9]，$(n-1,1)$ の場合，すなわち $\mathbb{R}^n_1$ を**ミンコフスキー・**ベクトル空間という．

以下，線形空間 V に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとする．

■ 正規直交基

定義 1.15. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が**直交する**[10] とは，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = 0$ が成り立つことである．

定義 1.16. 次元 n の内積空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ が V の**正規直交基**[11] であるとは，

$$|\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle| = \delta_{ij} \qquad (1 \leqq i,j \leqq n)$$

が成り立つことである．

補題 1.17. 正規直交基は V の基底である．

証明． 線形独立性を示せば良い． □

定理 1.18. 内積空間には正規直交基底が存在する．とくに，内積の符号が (t,s) ならば，

$$\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle = 0 \quad (i\neq j), \qquad \langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i\rangle = \begin{cases} -1 & (i=1,\dots,s) \\ 1 & (i=s+1,\dots,s+t) \end{cases} \tag{1.6}$$

[8] 擬ユークリッド・ベクトル空間：a pseudo euclidean vector space.
[9] ユークリッド・ベクトル空間：an euclidean vector space; ミンコフスキー・ベクトル空間：a Minkowski vector space.
[10] 直交する：orthogonal
[11] 正規直交基：an orthonormal basis; pl. orthonormal bases.

を満たす基底 $[\boldsymbol{e}_j]$ をとることができる．

証明． 命題 1.9 の証明のようにして，V の基底 $[\boldsymbol{w}_j]$ で，$\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列が対角行列になるものが存在する．とくに，負の固有値は s 個，正の固有値は t 個だから，

$$\lambda_j \begin{cases} <0 & (j=1,\dots,s) \\ >0 & (j=s+1,\dots,n) \end{cases}$$

としてよい．今，行列 U を

$$U := \operatorname{diag}\left(1/\sqrt{|\lambda_1|},\dots,1/\sqrt{|\lambda_n|}\right)$$

とおく．すると

$${}^tU\Lambda U = \begin{pmatrix} -I_s & O \\ O & I_t \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

となる．ここで I_m は m 次の単位行列，O は適切なサイズの零行列とする．したがって補題 1.5 から $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n] := [\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]U$ に関する $\langle\ ,\ \rangle$ の表現行列が (1.7) の行列となる．したがって $[\boldsymbol{e}_j]$ は条件を満たす基底である． □

■ ベクトルの因果特性

定義 1.19. 内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}$ が

- **空間的**[12] であるとは，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ であるか $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle > 0$ が成り立つことである．
- **時間的** であるとは，$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle < 0$ が成り立つことである．
- **光的** であるとは，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ かつ $\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0$ が成り立つことである．

これらの性質をベクトルの**因果特性**という[13]．

注意 1.20. 内積が正定値の場合は，すべてのベクトルは空間的である．

[12] 空間的：spacelike, space-like; 時間的：timelike, time-like; 光的：lightlike, light-like, null.
[13] 因果特性：causal character.
これらの用語は，相対性理論においてミンコフスキー・ベクトル空間に対して用いる語に由来している．

■ 直交補空間

定義 1.21. 内積空間 V の部分空間 W が**非退化**であるとは，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の W への制限 $\langle\ ,\ \rangle|_W$ が W 上の非退化内積を与えることである．とくに $\langle\ ,\ \rangle|_W$ の符号を W の符号という．

例 1.22. $\mathbb{R}^2_1$ のベクトル ${}^t(1,1)$ で生成される $\mathbb{R}^2_1$ の部分空間は退化部分空間（非退化でない）である． $\diamondsuit$

定義 1.23. 内積空間 V の部分空間 W に対して

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v}\in V \mid \text{任意の } \boldsymbol{w}\in W \text{ に対して } \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle = 0\}$$

で定まる $W^\perp$ を W の**直交補空間** [14] という．

定理 1.24. 符号 (n_+,n_-) の内積空間 V の非退化部分空間 W の符号が (m_+,m_-) であるとき，$W^\perp$ は 符号 (n_+-m_+,n_--m_-) をもつ V の部分空間で，$V=W\oplus W^\perp$ （直和）が成り立つ．

証明. 部分空間 W は非退化なので，定理 1.18 から正規直交基底 $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m]$ $(m=m_++m_-)$ が存在する．そこで

$$\varPhi\colon V\ni\boldsymbol{x}\longmapsto\varPhi(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1\rangle\\ \vdots\\ \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_m\rangle\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$$

を考えると，これは線形写像で，$W^\perp=\operatorname{Ker}\varPhi$ となるので，とくに $W^\perp$ は V の部分空間である．

さらに，$\varPhi$ は全射である．実際，$\hat{\boldsymbol{x}}:={}^t(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ に対して $\boldsymbol{x}:=x_1\boldsymbol{e}_1+\dots+x_m\boldsymbol{e}_m$ とおくと $\varPhi(\boldsymbol{x})=\hat{\boldsymbol{x}}$．したがって

$$\dim W^\perp=\dim V-\dim\operatorname{Im}\varPhi=\dim V-m=\dim V-\dim W.$$

さらに $W\cap W^\perp=\{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ．実際 $\boldsymbol{x}\in W\cap W^\perp$ とすると，$\boldsymbol{x}\in W^\perp$ だから，任意の $\boldsymbol{y}\in W$ に対して $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=0$．ここで $\boldsymbol{x}\in W$ でもあるから，W の非退化性より $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$．

以上から W と $W^\perp$ の和は直和になり，その次元は

$$\dim(W\oplus W^\perp)=\dim W+\dim W^\perp=n=\dim V.$$

[14] 直交補空間：the orthogonal complement.

したがって $W\oplus W^\perp=V$ となる．

次に $W^\perp$ が非退化であることを示す．$\boldsymbol{x}\in W^\perp\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ に対して線形写像

$$\Psi\colon V\ni\boldsymbol{y}\longmapsto\Psi(\boldsymbol{y})=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\in\mathbb{R}$$

を考えると，内積が V 上非退化であるから Ψ は零写像にならない．とくに $\operatorname{rank}\Psi=1$ なので $\dim\operatorname{Ker}\Psi=n-1$．一方，定義から $W^\perp\subset\operatorname{Ker}\Psi$ だから，

$$\dim(W^\perp\cap\operatorname{Ker}\Psi)=\dim W^\perp-1.$$

これは，$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\neq0$ となる $\boldsymbol{y}\in W^\perp$ が存在することを示しているので $W^\perp$ は非退化である．

最後に $W^\perp$ の符号数を求めよう．W の正規直交基 $[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m]$ と $W^\perp$ の正規直交基底 $[\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_{n-m}]$ をとると，$[\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_{n-m}]$ は V の正規直交基底で，その表現行列は 1, -1 を対角成分にもつ対角行列である．とくに対角成分で 1 であるものの個数は W と $W^\perp$ の正の符号数の和となるが，一方，これは V の正の符号数だから，結論が得られる． $\square$

例 1.25. n 次元ミンコフスキー・ベクトル空間 V（すなわち，符号数 $(n-1,1)$ の内積をもつ内積空間）の時間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ に直交するベクトル全体のなす部分空間（すまわち $(\mathbb{R}\boldsymbol{v})^\perp$．簡単のため $\boldsymbol{v}^\perp$ と書く．）は V の空間的な $n-1$ 次元部分空間である．

また，零ベクトルでない空間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}^\perp$ はミンコフスキー・ベクトル空間である． $\diamondsuit$

■ 擬直交変換

定義 1.26. 内積空間 V の線形変換 $f\colon V\to V$ で内積を保つ，すなわち

$$\langle f(\boldsymbol{v}),f(\boldsymbol{w})\rangle=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle\qquad(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in V)$$

を満たすものを**（擬）直交変換** [15] という．

補題 1.27. 擬直交変換は全単射である．

証明. 同じ次元の線形空間の間の線形写像であるから，単射であることを示せば十分である．擬直交変換 f に対して $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$ を満たすものをとる．すると，

$$\langle f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{w}\rangle=0\qquad\text{すなわち}\qquad\langle f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{w}\rangle=\langle f(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{w}\rangle$$

[15] 擬直交変換：a pseudo orthogonal transformation.

が任意の $\boldsymbol{w} \in V$ に対して成り立つから，とくに

$$\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{z})\rangle = \langle f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{z})\rangle \qquad (\boldsymbol{z} \in V)$$

が成り立つ．ここで，擬直交性から

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle \qquad \text{すなわち} \quad \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle = 0$$

が任意の $\boldsymbol{z} \in V$ に対して成立する．したがって，内積の非退化性より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$． □

補題 1.28. 与えられた内積空間の擬直交変換全体は写像の合成に関して群をなす．

証明． 補題 1.27 から擬直交変換は逆写像をもつことがわかる． □

記号 1.29. 内積空間 V の擬直交変換全体のなす群を $\mathrm{O}(V)$ と書く．とくに $\mathbb{R}^n_t$ の擬直交変換全体を $\mathrm{O}(n,t)$ と表す．

$\mathbb{R}^n_t$（線形空間としては $\mathbb{R}^n$）の線形変換をその表現行列と同一視すれば，

$$\mathrm{O}(n,t) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, {}^tAJ_{t,n-t}A = J_{t,n-t}\}$$

と表すことができる．ただし $J_{t,n-t}$ は式 (1.5) で与えられる n 次正方行列である．

問　　題　　I

I-1 $m\times n$ 行列 C に対して，$A := {}^tCC$ とおくと A は n 次の対称行列である．この行列 A から例 1.3 のように定まる $\mathbb{R}^n$ の双線形形式を q_A とする．

(1) q_A は半正定値であることを示しなさい．

(2) q_A が正定値になるためには C はどのような条件を満たさなければならないか．

I-2 補題 1.4 を証明しなさい．

I-3 命題 1.9 の証明を完成させなさい．

I-4 (1) $n=2$ のとき $\mathrm{O}(2,t)$ $(t=0,1)$ を求めなさい．

(2) $\mathrm{O}(2,0)\cap\mathrm{O}(2,1)$ はどんな集合か．

I-5 定理 1.24 で「W が非退化部分空間である」という仮定が必要であることを示しなさい．

II. 擬ユークリッド空間

一般に，n 次元ベクトル空間に符号 $(n-t,t)$ をもつ内積が与えられているとき，この符号に関する正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ $(j=1,\dots,n)$ をとり，この基底に関する成分を考えることで，内積を保つ同型写像

$$V \ni \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \mapsto {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_t$$

が定まる．したがって，有限次元の内積空間は擬ユークリッド空間と，内積までこめて同一視できる．以下，内積空間としては $\mathbb{R}^n_t$ のみを考えることにする．

■ **擬直交変換**　前回の (1.5) のように，正の数 $n \geqq 2$ と負でない整数 t $(0 \leqq t \leqq n)$ に対して

$$J_{t,n-t} := \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_{n-t} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I_p \text{ は } p \text{ 次単位行列,} \\ O \text{ は適切な型の零行列} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

で n 次正方行列 $J_{n-t,t}$ を定義すると，$\mathbb{R}^n_t$ の内積は

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = {}^t\boldsymbol{x} J_{n-t,t} \boldsymbol{y} \tag{2.2}$$

で与えられている．線形同型 $\mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ でこの内積を保つものを**擬直交変換**，その（表現行列の）全体の集合を $\mathrm{O}(n,t)$ と書いた（記号 1.29）：

$$\mathrm{O}(n,t) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \,|\, {}^tAJ_{t,n-t}A = J_{t,n-t}\}. \tag{2.3}$$

集合 $\mathrm{O}(n,t)$ は行列の積により群をなす．行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} A_{11} : t\times t \text{ 型;} & A_{12} : t\times(n-t) \text{ 型} \\ A_{21} : (n-t)\times t \text{ 型;} & A_{22} : (n-t)\times(n-t) \text{ 型} \end{cases} \tag{2.4}$$

と分割しておこう．

[*] 2017 年 04 月 18 日 (2017 年 4 月 25 日訂正)

補題 2.1.

(1) 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ の行列式は 1 または -1 である．

(2) 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ を (2.4) のように分割すると，$|\det A_{11}| \geqq 1$，$|\det A_{22}| \geqq 1$ が成り立つ．

証明． 式 (2.3) の定義式の行列式をとれば (1) が得られる．また，(2.4) の形の A が (2.3) の定義式を満たすならば，その左上の $t\times t$ の小行列は

$$-{}^tA_{11}A_{11} + {}^tA_{21}A_{21} = -I_t$$

を満たす．このことから $(\det A_{11})^2 = \det({}^tA_{11}A_{11}) \geqq 1$ が得られる（問題 II-1）．□

記号 2.2. 正の整数 n と $t \geqq 0$ に対して

$$\mathrm{SO}(n,t) := \{A \in \mathrm{O}(n,t) \,|\, \det A = 1\},$$

と書く．さらに $n \geqq 2$，$t \geqq 1$ の場合，

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \{A \in \mathrm{SO}(n,t) \,|\, \det A_{11} \geqq 1\}$$

と定める．ただし A_{11} は A を (2.4) のように分割したときの「左上」の小行列である．

注意 2.3. 実数を成分とする n 次正方行列全体の集合 $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視すれば，$\mathrm{O}(n,t)$ は $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ の実解析的な**閉部分多様体**となっている．とくに，群演算はこの実解析多様体の構造に関して実解析的なので，$\mathrm{O}(n,t)$ は**リー群** である．ところで，$\mathrm{O}(n,t)$ は連結ではない．実際

$$\det\colon\ \mathrm{O}(n,t) \ni A \longmapsto \det A \in \mathbb{R}$$

は連続写像だが，$\det \mathrm{O}(n,t) = \{-1,1\}$ は連結でない．そこで，$\mathrm{O}(n,t)$ の指数 2 の部分群 $\mathrm{SO}(n,t)$ を考えると，$t=0$ のときは $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n,0)$ は連結である [1]．この群 $\mathrm{SO}(n)$ を**特殊直交群** [2] とよぶ．一方 $n \geqq 2$，$t \geqq 1$ のと

[1] 証明は線形代数の応用問題であるが，ここでは与えない．

[2] リー群：a Lie group; 直交群 $\mathrm{O}(n)$：the orthogonal group; 擬直交群 $\mathrm{O}(n,t)$：the pseudo orthogonal group; 特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$：the special orthogonal group.

きは $\mathrm{SO}(n,t)$ も連結ではない．実際，連続写像

$$\det{}'\colon \mathrm{SO}(n,t) \ni A \longmapsto \det A_{11} \in \mathbb{R}$$

を考える．ただし A_{11} は A を (2.4) のように分割したときの左上の成分である．このとき $\det{}'(\mathrm{SO}(n,t)) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ であることがわかるが，像が連結でないので $\mathrm{SO}(n,t)$ は連結でない． そこで部分群 $\mathrm{SO}_+(n,t)$ を考えると（問題 II-2），$\mathrm{SO}_+(n,t)$ は連結となることがわかる．

■ **擬ユークリッド空間**　集合 $\mathbb{R}^n$ の 2 点 P，Q に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} := (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n) \in \mathbb{R}^n$$

を対応させる規則を考える．ただし $\mathrm{P} = (p_1,\dots,p_n)$, $\mathrm{Q} = (q_1,\dots,q_n)$ である．点 P，Q が住んでいる空間は「我々の住む空間」のモデルと考え，原点に特別な意味を持たせないこととする．一方 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は P から Q への変位を表すので，零ベクトルには絶対的な意味がある．すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の住みかはベクトル空間としての $\mathbb{R}^n$ である．このように思ったとき，点 P の住みかとしての $\mathbb{R}^n$ を**アファイン空間**，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の住みかとしての $\mathbb{R}^n$ を，そのアファイン空間に付随するベクトル空間という．[3] さらにベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ をユークリッド・ベクトル空間と見なすと，

$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \right\rangle} \tag{2.5}$$

でアファイン空間 $\mathbb{R}^n$ に距離（**ユークリッド距離**）を入れることができるので，その距離から $\mathbb{R}^n$ に位相が入る．この位相を $\mathbb{R}^n$ の**ユークリッド位相**という [4]．

補題 2.4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相は，任意の一次関数 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を連続にする最弱の位相である．

[3] アファイン空間：an affine space; アファイン空間に付随するベクトル空間：the vector space associated with the affine space.
[4] ユークリッド距離：the Euclidean distance; ユークリッド位相：the Euclidean topology.

証明. 位相空間論の最初に学んだように多項式はユークリッド空間上の連続関数であるから，とくに一次関数は連続関数．

したがって，任意の一次関数が連続になるような $\mathbb{R}^n$ の位相が与えられたとき，その位相はユークリッド位相を含む（開集合族の包含関係の意味）ということを示せ良い．

座標関数 $r_j : (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j$ は一次関数なので，仮定より連続．したがって $\{(x_1,\dots,x_n) \,|\, a < x_j < b\} = r_j^{-1}\bigl((a,b)\bigr)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合．各座標関数でこのような開集合をとって共通部分をとることで，開区間の直積集合は開集合であることがわかる．ところで開区間の直積集合を基とする位相はユークリッド位相と一致するから結論が得られた． □

以下，集合 $\mathbb{R}^n$ には補題 2.4 のような（ユークリッド空間としての）位相が与えられているとすると，$\mathbb{R}^n$ は n 次元多様体で，各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる．接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n_t$ と同一視して内積を与えた多様体を**擬ユークリッド空間** [5] という．擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ 上の 2 点 P, Q に対して $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \in \mathbb{R}^n_t$ を考えることができる．

定義 2.5. アファイン空間の間の写像 $f\colon \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ が**等長変換** [6] であるとは，任意の $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}^n_t$ に対して

$$\left\langle \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}, \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \right\rangle$$

が成り立つことである．

例 2.6. 行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ とベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n_t$

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \qquad \left(\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n_t\right)$$

で与えられる $f\colon \mathbb{R}^n_t \to \mathbb{R}^n_t$ は等長変換である． ◇

定理 2.7. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ の等長変換は例 2.6 の形のものに限る．

注意 2.8. 定理 2.7 は概ね次のステップにより証明される：

- 等長変換の合成は等長変換である．
- $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{0})$ で新たな等長変換 g を考えることにより，最初から $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ として一般性を失わない．

[5] 擬ユークリッド空間：a pseudo Euclidean space.
[6] 等長写像：an isometry, an isometric transformation.

- $\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$.
- f は線形写像である．
- $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(A \in \mathrm{O}(n,t))$.

証明の詳細には，ここでは深入りしないが，特にユークリッド空間の場合は，正値性により証明が多少簡単になる．

■ ミンコフスキー・ベクトル空間　特別な場合として，ミンコフスキー・ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を考える[7]．習慣にしたがって $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の要素を

$$\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

と表す．すなわち，負の符号に対応する成分のインデックスを 0 とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を

$$\{(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$$

と同一視すると，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ は

$$(2.6) \qquad \boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{x}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_0 = {}^t(1,0,\dots,0), & x_0 \in \mathbb{R}, \\ \vec{x} = (0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

と書ける．この分解を用いると，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = -x_0y_0 + \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{y} = y_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{y}$ も (2.6) の形の分解で，右辺第 2 項は，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathbb{R}^n$ への制限（$\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積になる）である．

ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ は因果特性（定義 1.19）により 3 種類に分類できる：

- **空間的ベクトル**：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるか，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle > 0$.
- **時間的ベクトル**：$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle < 0$.
- **光的（退化）ベクトル**：$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$.

[7] この講義では正定値内積とミンコフスキー内積を主に扱う．最終回に $\mathbb{R}^n_2$ の部分多様体の例を挙げる．

定義 2.9. 空間的ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}$$

を $\boldsymbol{v}$ の大きさという．大きさが 1 である空間的ベクトルを**空間的単位ベクトル**とよぶ．また，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = -1$ をみたす $\boldsymbol{v}$ を**時間的単位ベクトル**[8] という．

命題 2.10. 零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して，その**直交補空間**を

$$\boldsymbol{v}^\perp := \{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \,|\, \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0\}$$

と表すとき，

(1) $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の n 次元線形部分空間である．
(2) $\boldsymbol{v}$ が時間的なら $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の空間的部分空間（空間的ベクトルのみからなる部分空間）である．
(3) $\boldsymbol{v}$ が空間的なら $\boldsymbol{v}^\perp$ への内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の制限は符号 $(n-1, 1)$ をもつ．
(4) $\boldsymbol{v}$ が光的なら，$\boldsymbol{v}^\perp$ は $\boldsymbol{v}$ を含む $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の n 次元線形部分空間で，$\boldsymbol{v}$ のスカラ倍にならない $\boldsymbol{v}^\perp$ の要素は空間的である．したがって $\langle\ ,\ \rangle$ の $\boldsymbol{v}^\perp$ への制限は半正定値である．とくに $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^\perp$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を生成しない．

証明． 最初の 3 つは定理 1.24 から従う．(4) は次のようにして示される（問題 II-4）：式 (2.6) のように $\boldsymbol{v} = v_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{v}$，$\boldsymbol{w} = w_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{w}$ と分解しておく．$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が光的で互いに直交するならば

$$-v_0^2 + |\vec{v}|^2 = 0, \qquad -w_0^2 + |\vec{w}|^2 = 0, \qquad -v_0w_0 + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0.$$

このことから $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が一次従属であることが示されれば結論が得られる．□

■ ミンコフスキー・ベクトル空間のベクトル積　まず，3 次元ミンコフスキー・ベクトル空間 $\mathbb{R}^3_1$ を考える：

[8] 空間的（時間的）単位ベクトル：a space-like (time-like) unit vector.

定義 2.11. $\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

で定まる $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の（ミンコフスキー）**ベクトル積**[9] という.

注意 2.12. ミンコフスキー・ベクトル積はユークリッドベクトル積の第 0 成分の符号を変えたものである.

補題 2.13. ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

- $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ にともに直交する.
- $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が空間的なら，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ は時間的で，次が成り立つ：
$$|\langle \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle| = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle - (\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle)^2.$$
- $\det(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) > 0$. ただし，det は 3 つのベクトルを列ベクトルとみなしてできる 3 次正方行列の行列式を表す.

次に，4 次元ミンコフスキー・ベクトル空間の 3 つのベクトルに対して次のようにベクトル積を定義する：

定義 2.14. ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して

$$(2.7) \quad \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} := {}^t\left(\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 & w_2 \end{vmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} = {}^t(u_0, u_1, u_2, u_3), \\ \boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2, v_3), \\ \boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2, w_3) \end{pmatrix}$$

と定める．とくに $\boldsymbol{u}$ が時間的単位ベクトルで，$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ に直交するベクトルのときは,

$$(2.8) \qquad \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} := \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$$

と書く.

[9] ベクトル積：the vector product.

補題 2.15. $\mathbb{R}^4_1$ の時間的単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ と，$\boldsymbol{u}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4_1$ に対して

- $\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ にともに直交する.
- $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ が空間的なら，$\boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}$ は空間的で，次が成り立つ：
$$\langle \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle - (\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle)^2.$$
- $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w}) > 0$ ただし，det は 4 つのベクトルを列ベクトルとみなしてできる 4 次正方行列の行列式を表す.

証明は演習問題とする（問題 II-6）.

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間　負の符号が 1 であるような擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ を**ローレンツ・ミンコフスキー空間**またはミンコフスキー空間[10] という．相対性理論に由来するいくつかの言葉の定義を与えておく.

定義 2.16. 点 $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して

- 集合
$$\Lambda_{\mathrm{P}} := \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \,|\, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \text{ は光的 }\} \cup \{\mathrm{P}\}$$
を P における**光錐**または**光円錐**[11] という.
- 集合
$$\begin{aligned} C_{\mathrm{P}} &:= \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\}, \\ C^+_{\mathrm{P}} &:= \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0, v_0 > 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\}, \\ C^-_{\mathrm{P}} &:= \{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \leqq 0, v_0 < 0 \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}})\} \end{aligned}$$
をそれぞれ P の**因果集合**，**未来**，**過去**とよぶ[12].
- $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の等長変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$ （$A \in \mathrm{O}(n+1, 1)$）を**ローレンツ変換**という．とくに $A \in \mathrm{SO}(n+1, 1)$ の場合を**向きを保つ**ローレンツ変

[10] ローレンツ・ミンコフスキー空間：the Lorentz-Minkowski space.
[11] 光錐，光円錐：the lightcone.
[12] 因果集合：the causal set; 未来：the future；過去：the past.

換，$A \in \mathrm{SO}_+(n+1,1)$ を**向きと時間的向きを保つ**ローレンツ変換あるいは**本義ローレンツ変換**という[13]．

命題 2.17. ローレンツ変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}$（$A \in \mathrm{O}(n+1,1)$）は，P における光円錐（因果集合）を $f(\mathrm{P})$ における光円錐（因果集合）に写す．さらに，$A \in \mathrm{SO}_+(n+1,1)$ のときは，P における未来（過去）を $f(\mathrm{P})$ における未来（過去）に写す．

■ 相対性理論との関係　ローレンツ・ミンコフスキー空間は**特殊相対性理論**[14] の舞台である．このことを簡単に説明しておく．

われわれの世界を 3 次元ユークリッド空間とみなし，時刻 x_0 における点 (x_1, x_2, x_3) のことを，時空の点 $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4_1$ と考える．ただし，時間の単位は，真空中の光の速さ c が 1 となるようにとる[15]．

運動する質点の時刻 x_0 における位置を $\gamma(x_0) = (x_1(x_0), x_2(x_0), x_3(x_0)) \in \mathbb{R}^3$ と書くとき，時空の曲線 $\bigl(x_0, \gamma(x_0)\bigr) \in \mathbb{R}^4_1$ をこの運動の**世界線**という[16]．とくに，時刻 0 で点 (p_1, p_2, p_3) を通り，光の速さで直進する運動の世界は点 $\mathrm{P} = (0, p_1, p_2, p_3)$ における光円錐 Λ_{P} の母線の一つである．

このような時空の取り方を**慣性系**[17] という．

特殊相対性理論の基本原理は 2 つ：

(R1)　すべての慣性系で真空中の光の速さは同じである（光速度不変の原理）．

(R2)　物理法則は慣性系を取り替えても不変である（相対性原理）．

慣性系の取り替えとは，変換 $f\colon \mathbb{R}^4_1 \to \mathbb{R}^4_1$ のことである．光速度不変の原理 (R1) は，この変換が光円錐を光円錐に写すことを要求する．適切に長さの単位をそろえれば，**このような性質をもつ変換はローレンツ変換に限る**ことを示すことができる．したがって，相対性原理 (R2) は，**物理法則はローレンツ変換で不変な形**をしている，ということにほかならない．

[13] 向きを保つ：orientation preserving; 向きと時間的向きを保つ：orientation and time-orientation preserving, orientation preserving and isochronous.
[14] 特殊相対性理論：the special relativity.
[15] 真空中の光速が cm/s であるとき，時間 ts の変わりに ctm とすることで，時間をメートルで表すことができる．以後，このような単位を用いる．
[16] 世界線：a world line.
[17] 慣性系：an inertial frame of reference. この段階では慣性系は数学的定義をもたない．

この枠組みで，時間的・空間的・光的・未来・過去・因果特性といった語は本来の意味で使われている．

たとえば，$\mathbb{R}^4_1$ の異なる 2 点 P, Q を結ぶ直線が点の運動を表しているとして，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を (2.6) のように分解しておく：

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = p_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{p}.$$

すると，運動する点の $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4_1$ における速度ベクトルは

$$\vec{v} := \frac{\vec{p}}{p_0}$$

となる．とくに

- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が空間的ベクトルであるための必要十分条件は $|\vec{v}| > 1$ である．このとき，時空の点 P から Q へ一定の速度で到達するためには，速さが 1（これが光速度）を超えなければならない．
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が時間的ベクトルであるための必要十分条件は $|\vec{v}| < 1$ となることで，これは $\mathrm{Q} \in C_{\mathrm{P}}$，すなわち Q が P に対して因果的であることと同値である．もし Q が C^+_{P}，すなわち P に対して未来にあるならば，速さ 1 未満の等速度運動で P から Q に到達できる．一方，Q が P の過去 C^-_{P} にあるならば，Q から P に光の速さより遅い等速度運動で到達できる．
- Q が P における光円錐 Λ_{P} に含まれるための必要十分条件は $|\vec{v}| = 1$．すなわち直線 PQ は速さ 1（光の速さ）の運動を表している．すなわち光円錐 Λ_{P} は P を出発する光の世界線全体を表す．

例 2.18. 次元を下げて $\mathbb{R}^2_1$ のローレンツ変換

$$f\colon \mathbb{R}^2_1 \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_1$$

を考える．この変換で，座標系 (x_0, x_1)（x-座標系）での直線 $l_a : x_1 = a$ は座標系 (y_0, y_1)（y-座標系）では直線 $\tilde{l}_a : y_0 = (\coth\theta)y_1 - (\operatorname{sech}\theta)a$ に対応する．すなわち x-座標系で静止している点は，y-座標系では速度 $\tanh\theta$ で

等速度運動しているように見える．すなわち x-座標系は y-座標系に対して速度 $v := \tanh\theta$ で等速度運動している座標系と見なすことができる． $\diamondsuit$

問　題　II

II-1　補題 2.1 の証明を完成させなさい．(ヒント：後半は，対称行列 ${}^tA_{11}A_{11}$ の固有値がすべて 1 以上であることを示せばよい．)

II-2　擬直交群 $\mathrm{O}(n,t)$ の部分集合

$$\mathrm{SO}_+(n,t) := \left\{ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \middle| \det A = 1, \quad \det A_{11} \geqq 1 \right\}$$

は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群になることを示しなさい．ただし (A_{ij}) は式 (2.4) のような分割である．

II-3　(1)　$\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ は連結かつコンパクトであることを示しなさい．

(2)　$\mathrm{SO}_+(2,1) \subset \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ は連結であることを示しなさい．この集合は $\mathbb{R}^4$ のコンパクト部分集合か．

(3)　$\mathrm{SO}_+(3,1) \subset \mathrm{M}(3,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^9$ は連結であることを示しなさい．

II-4　命題 2.10 の (4) を示しなさい．(ヒント：部分空間 $\mathbb{R}^n$ 上では内積は正定値なので，コーシー・シュワルツの不等式が成り立つ．この不等式の等号条件を用いればよい．)

II-5　命題 2.17 を示しなさい．

II-6　補題 2.15 を証明しなさい．

III. 超曲面

■ はめ込み 以下，**可微分多様体**[1] という語で C^∞-級多様体を表す.

定義 3.1. 可微分多様体 M と N の間の可微分写像

$$f\colon M\to N$$

が**はめ込み**であるとは，各点 $\mathrm{P}\in M$ で f の微分写像

$$(df)_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}M\longrightarrow T_{f(\mathrm{P})}N$$

が単射となることである．ただし $T_{\mathrm{P}}M, T_{f(\mathrm{P})}N$ はそれぞれ M，N の点 P, $f(\mathrm{P})$ における接空間である.

ここで，写像 f の**微分**[2] $(df)_{\mathrm{P}}$ とは，$\boldsymbol{v}\in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})\colon C^\infty(N)\ni\varphi\longmapsto\boldsymbol{v}(\varphi\circ f)\in\mathbb{R}$$

で定まる $T_{f(\mathrm{P})}N$ の要素 $df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})$ を対応させる線形写像である.

補題 3.2. 多様体 M の点 P に接ベクトル $\boldsymbol{v}\in T_{\mathrm{P}}M$ に対して,

$$\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,\qquad \gamma(0)=\mathrm{P},\qquad \frac{d\gamma}{dt}(0)=\boldsymbol{v}$$

を満たす写像（曲線）γ をとると，可微分写像 $f\colon M\to N$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v})=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f\bigl(\gamma(t)\bigr)$$

が成り立つ.

---

*)2017 年 4 月 25 日 (2017 年 5 月 2 日訂正)
1)可微分多様体：a differentiable manifold.
2)微分：the differential

注意 3.3 (微分写像の表現行列)**.** 写像 f の定義域 M の点 P の回りの局所座標系 $(x_1,\dots,x_m)$ と N の $f(\mathrm{P})$ の回りの N の局所座標系 $(y_1,\dots,y_n)$ をとると,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\mathrm{P}},\dots,\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{\mathrm{P}}\right\},\qquad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(\mathrm{P})},\dots,\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{f(\mathrm{P})}\right\}$$

はそれぞれ $T_{\mathrm{P}}M, T_{f(\mathrm{P})}N$ の基底を与えるが，これらの基底に関する $(df)_{\mathrm{P}}$ の表現行列は f のヤコビ行列

$$Df(\mathrm{P}):=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_m}\right)\end{pmatrix}$$

である：

$$\left[(df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\dots,(df)_{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\right]=\left[\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right),\dots,\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right]Df(\mathrm{P}).$$

ただし $f(x_1,\dots,x_m)$ の座標系 (y_j) に関する成分を (f_j) と書いた.

とくに N がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ ならば，$f\colon M\to\mathbb{R}^n$ はベクトル値関数とみなせるが，そのヤコビ行列は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)=(f_{x_1},\dots,f_{x_m})$$

となる.

系 3.4. 写像 $f\colon M\to\mathbb{R}^n$ がはめ込みである必要十分条件は，各点 P において，$m=\dim M$ 個のベクトル f_{x_1}, …, f_{x_m} が線形独立となることである．ただし $(x_1,\dots,x_m)$ は P の回りの局所座標系である.

注意 3.5. はめ込みの定義は局所座標を用いていないので，系 3.4 の条件は座標系 $(x_1,\dots,x_m)$ のとり方によらないことがわかる.

■ 部分多様体と超曲面 まず，可微分多様体としてのユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分多様体と超曲面の定義を与える．擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ は可微分多様体としては $\mathbb{R}^n$ と同じものなので，この段階では区別しないこととする.

部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の**部分多様体**[3] であるとは，M に可微分多様体の構造で包含写像 $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ がはめ込みになっているものが存在することである．とくに M が $n-1$ 次元のとき，M を $\mathbb{R}^n$ の**超曲面**という．接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ は自然に $\mathbb{R}^n(=T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n)$ の線形部分空間と見なすことができる．

補題 3.6. 部分多様体 $M \subset \mathbb{R}^n$ の包含写像 $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ の微分は

$$d\iota_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M)$$

を満たす.

証明. 任意の $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して，M 上の曲線 $\gamma(t)$ で，$\gamma(0)=\mathrm{P}$, $\dot\gamma(0)=\boldsymbol{v}$ を満たすものを一つとる．ただし $\dot{}\ = d/dt$ である．このとき，$\iota\circ\gamma(t)=\gamma(t)$ （ただし $\mathbb{R}^n$ の曲線と見なす）なので，補題 3.2 から

$$d\iota_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \iota\circ\gamma(t) = \dot\gamma(0) = \boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$$

を得る. □

方程式 “$F=0$” で与えられた $\mathbb{R}^n$ の部分集合が部分多様体であることを判別するためには**陰関数定理**が便利である．

命題 3.7. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級写像 $F\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^p$ に対して

$$M := F^{-1}(\boldsymbol{0}) = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}^n \,|\, F(\mathrm{P}) = \boldsymbol{0}\}$$

が空集合でないとする．M の各点 P でヤコビ行列 $dF(\mathrm{P})$ の階数が p ならば，M には $\mathbb{R}^n$ の $(n-p)$-次元部分多様体となるような可微分多様体の構造が与えられる．

ここでは特に $p=1$ の場合を考える．

命題 3.8. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ が $M := F^{-1}(\{0\})$ の点 P で

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P}) \neq 0$$

[3] 部分多様体：a submanifold; 超曲面：a hypersurface.

を満たしているならば，$\mathbb{R}^n$ における点 $\mathrm{P}=(p_1,\dots,p_n)$ の近傍 V と $(x_2,\dots,x_n)$ 空間の $\mathrm{P}'=(p_2,\dots,p_n)$ の近傍 V'，さらに C^∞-級関数 $f\colon V' \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$M \cap V = \{(f(x_2,\dots,x_n), x_2,\dots,x_n) \,|\, (x_2,\dots,x_n) \in V'\}$$

を満たす．すなわち，点 P の近傍で M は $x_1 = f(x_2,\dots,x_n)$ とグラフ表示される．

命題 3.8 の状況で $(x_2,\dots,x_n)$ を M の点 P の近傍における局所座標と考えることができるので，

系 3.9. $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U \to \mathbb{R}$ に対して $M := F^{-1}(\{0\})$ が空集合でないとする．このとき，M の各点 P で

$$(dF)_{\mathrm{P}} = (F_{x_1}(\mathrm{P}),\dots,F_{x_n}(\mathrm{P})) \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つならば，M は $\mathbb{R}^n$ の超曲面である．

例 3.10. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz+d=0\}$$

は平面を表す．ただし a, b, c, d は $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ となる定数である．◇

例 3.11. 変数 (x,y,z) の 2 次式 $F(x,y,z)$ の零点集合 $F^{-1}(\{\boldsymbol{0}\})$ は，$\mathbb{R}^3$ の部分多様体与えるとき，2 次曲面[4] という．楕円面，一葉双曲面，二葉双曲面，楕円放物面，双曲放物面は 2 次曲面である[5] ◇

■ **接空間と誘導計量**　以下，擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面の幾何学を考察する．とくに興味がるのは $s=0$ (ユークリッド空間)，$s=1$ (ローレンツ・ミンコフスキー空間）の場合である．

擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面 M の点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ は $\mathbb{R}^{n+1}_t(=T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t)$ の n 次元線形部分空間である．$\mathbb{R}^{n+1}_t$ の擬ユークリッド内

[4] 2 次曲面：a quadric.

[5] これらの曲面の表示は，たとえば「曲線と曲面」（梅原・山田，裳華房）の第 6 節を見よ．

積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $T_{\mathrm{P}}M$ に制限して得られる $T_{\mathrm{P}}M$ の双線形対称形式を g_{P} と書く．各点 P に対して g_{P} を与える対応 g を $M\subset\mathbb{R}^{n+1}_t$ の**誘導計量**または**第一基本形式**という [6]．

定義 3.12. 超曲面 $M\subset\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上の点 P が超曲面の**非退化点**であるとは，g_{P} が非退化双線形型式ととなることである．g_{P} が退化双線形型式となるとき，P は**退化点**であるという [7]．

とくにローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面上の点 P において g_{P} が $T_{\mathrm{P}}M$ の正定値双線形型式を与えているとき，P は**空間的**，不定値双線形型式を与えているとき P は**時間的**であるという [8]．

定義 3.13. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の連結な超曲面 M が

- **空間的**であるとは，M 上のすべての点が空間的であること，
- **時間的**であるとは，M 上のすべての点が時間的であること，
- **非退化**であるとは，空間的または時間的であること

と定める．

■ 法線ベクトル

定義 3.14. 可微分関数 $F\colon\mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ と点 P に対して

$$\operatorname{grad}F(\mathrm{P}):=J_{t,n+1-t}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{P})\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-I_t & O\\ O & I_{n+1-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x_0}(\mathrm{P})\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(\mathrm{P})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(\mathrm{P})\end{pmatrix}$$

を F の点 P の**勾配ベクトル** [9] という．ただし $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の座標を $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ と書いた．

[6] 誘導計量：the induced metric; 第一基本型式：the first fundamental form.
[7] 非退化点：a non-degenrate point; 退化点：a degenerate point.
[8] 空間的：space-like; 時間的：time-like. 用語がわかりにくいが，時間的点における接ベクトルがすべて時間的となるわけではない．外の空間の内積の符号が $(n,1)$ なので，時間的点における誘導計量 g_{P} の符号は自動的に $(n-1,1)$，すなわち $T_{\mathrm{P}}M$ にミンコフスキー内積を与える．
[9] 勾配ベクトル：the gradient vector.

ユークリッド空間，すなわち $t=0$ のときは，$\operatorname{grad}F$ は微分 dF を列ベクトルとみなしたものにほかならない．勾配ベクトルが $\mathbf{0}$ でないことと微分 dF が零でないことは同値だから，系 3.9 は次のように書き換えられる：

系 3.15. $\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上で定義された C^∞-級関数 $F\colon U\to\mathbb{R}$ に対して $M:=F^{-1}(\{0\})$ が空集合でないとする．このとき，M の各点 P で $\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\neq\mathbf{0}$ ならば，M は $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の超曲面である．

命題 3.16. 関数 $F\colon\mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ が系 3.15 の仮定を満たしているとき，超曲面 $M=F^{-1}(\{0\})$ の点 P における接空間は次で与えられる：

$$T_{\mathrm{P}}M=\bigl(\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}.$$

証明． ベクトル $\boldsymbol{v}\in T_{\mathrm{P}}M$ をとると，M 上の曲線

$$\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\ni t\longmapsto\gamma(t)\in M\subset\mathbb{R}^{n+1}_t\qquad(\varepsilon>0)$$

で $\gamma(0)=\mathrm{P}$, $\dot\gamma(0)=\boldsymbol{v}$ $(\dot{}=d/dt)$ となるものが存在する．ここで t の関数 $\varphi(t):=F(\gamma(t))$ を考えると，各 t に対して $\gamma(t)\in M$ だから $\varphi(t)=0$．また，

$$\gamma(t)={}^t\bigl(x_0(t),\dots,x_n(t)\bigr)\quad\text{と書くと}\quad\dot\gamma(t)={}^t\bigl(\dot x_0(t),\dots,\dot x_n(t)\bigr)$$

なので，

$$\begin{aligned}0=\dot\varphi(0)&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}F\bigl(\gamma(t)\bigr)=\sum_{j=0}^n\frac{\partial F}{\partial x_j}\bigl(\gamma(0)\bigr)\left.\frac{dx_j}{dt}\right|_{t=0}\\&=\sum_{j=0}^n\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathrm{P})\left.\frac{dx_j}{dt}\right|_{t=0}=\langle\operatorname{grad}F(\mathrm{P}),\dot\gamma(0)\rangle=\langle\operatorname{grad}F(\mathrm{P}),\boldsymbol{v}\rangle.\end{aligned}$$

したがって $\boldsymbol{v}\in\bigl(\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}$ なので $T_{\mathrm{P}}M\subset\bigl(\operatorname{grad}F(\mathrm{P})\bigr)^{\perp}$ であることがわかった．さらに $T_{\mathrm{P}}M$ は n 次元多様体 M の接空間だから n 次元ベクトル空間．一方，命題 2.10 の (1)[10] から $\operatorname{grad}F(\mathrm{P})$ の直交補空間も n 次元なので，結論が得られた． □

とくに，命題 2.10 から次のことが分かる：

命題 3.17. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 上の関数 $F\colon\mathbb{R}^{n+1}_1\to\mathbb{R}$ が系 3.15 の仮定をみたしてるとき，点 $\mathrm{P}\in M=F^{-1}(\{0\})$ が

[10] 命題 2.10 では $\mathbb{R}^{n+1}_1$ をの場合を考えているが，(1) の結論は任意符号の擬ユークリッド空間に対して成立する．

- 超曲面 M の空間的な点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が時間的であること，
- 超曲面 M の時間的な点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が空間的であること，
- 超曲面 M の退化点であるための必要十分条件は $\operatorname{grad} F(\mathrm{P})$ が光的であること

である．

定義 3.18. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M 上の点 P における $\mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t$ のベクトル $\nu(\mathrm{P})$ で，$T_{\mathrm{P}}M$ に直交し，$|\langle \nu(\mathrm{P}), \nu(\mathrm{P})\rangle| = 1$ となるものを M の P における**単位法線ベクトル**，対応 $\mathrm{P} \mapsto \nu(\mathrm{P})$ を**単位法線ベクトル場**という [11]．

命題 3.16 より次がわかる：

命題 3.19. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の非退化な超曲面 M 上の点 P における単位法線ベクトルは

$$\nu(\mathrm{P}) = \pm \frac{\operatorname{grad} F(\mathrm{P})}{|\langle \operatorname{grad} F(\mathrm{P}), \operatorname{grad} F(\mathrm{P})\rangle|^{1/2}}$$

で与えられる．

■ 第二基本型式　擬ユークリッド空間（ここでは，特にユークリッド空間やローレンツ・ミンコフスキー空間を考えている）$\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M の単位法線ベクトル場 ν を一つとっておく [12]．

単位法線ベクトル場 ν は M から $\mathbb{R}^{n+1}_t$ への写像とみなせるので，微分写像

$$d\nu_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}_t \bigl(= T_{\nu(\mathrm{P})}\mathbb{R}^{n+1}_t\bigr)$$

を考えることができる．

補題 3.20. 任意の $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して $d\nu(\boldsymbol{v}) \in T_{\mathrm{P}}M$ である．

[11] 単位法線ベクトル：the unit normal (vector); 単位法線ベクトル場：the unit normal vector field.
[12] 各点での単位法線ベクトルのとり方はふたとおりあるが，ここではどちらかを指定せず，以下の議論は「単位法線ベクトルのとり方に依存する」と考える．

証明． $\langle \nu, \nu\rangle = \pm 1$ なので，$d\langle \nu, \nu\rangle = 0$．したがって P において

$$0 = d_X \langle \nu, \nu\rangle = 2\langle d\nu(X), \nu\rangle .$$

ここで $T_{\mathrm{P}}M = \nu(\mathrm{P})^{\perp}$ なので結論が得られた． □

定義 3.21. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化超曲面 M の単位法線ベクトル場を ν とする．このとき，補題 3.20 により

$$W_{\mathrm{P}} \colon T_{\mathrm{P}}M \ni \boldsymbol{v} \longrightarrow -d\nu(\boldsymbol{v}) \in T_{\mathrm{P}}M$$

が定まる．これを点 P における**型作用素**，**ワインガルテン作用素**という [13]．さらに $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$I\!I_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle \qquad \varepsilon = \langle \nu, \nu\rangle \in \{1, -1\}$$

で定まる $T_{\mathrm{P}}M$ 上の双線形型式を**第二基本型式**という [14][15]

命題 3.22. 定義 3.21 の第二基本型式は対称双線形型式を与える．

証明は演習問題（問題 III-3）とする．

ここで，少しだけ線形代数の復習：n 次元ベクトル空間 V の線形変換

$$W \colon V \longrightarrow V$$

の，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ の**表現行列**とは

$$W(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} w^k_j \boldsymbol{v}_k \qquad (j = 1, \dots, n)$$

を満たす行列 $\hat{W} := (w^k_j)$ のことである [16]．この式をまとめて書けば

$$W([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = \bigl(V(\boldsymbol{v}_1), \dots, W\boldsymbol{v}_n\bigr) = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]\hat{W}. \tag{3.1}$$

[13] 習慣にしたがってワインガルテン作用素は $d\nu$ に「マイナス」をつけたものとしている．文脈によっては $d\nu$ そのものをワインガルテン作用素ということもある．
[14] ワインガルテン作用素の符号，および，第二基本型式の定義式に出て来る符号は，次回紹介する「ガウスの公式」の法線成分の形を符号によらず $h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\nu$ とするためにこのようにとっている．
[15] 型作用素：the shape operator; ワインガルテン作用素：the Weingarten operator; 第二基本型式：the second fundamental form.
[16] 線形変換の表現行列の定義は双線形型式の表現行列の定義とは異なる．

とくに，基底変換 $[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n]P$ （P は n 次の正則行列）により，表現行列は $\hat{W}\mapsto P^{-1}\hat{W}P$ と変換されるので，

補題 3.23. 線形変換 $W\colon V\to V$ の，V の基底に関する表現行列 $\hat{W}$ の固有多項式は V の基底のとり方によらない．特に，$\hat{W}$ の固有値は，その重複度も含めて基底のとり方によらない．

線形変換の表現行列の固有値のことを,「線形変換の固有値」ということにしよう．さらに，これら固有値の総和は，表現行列の対角成分の和に一致する．これを W のトレースといい，$\operatorname{tr}W$ という [17]．

超曲面の議論に戻る：

定義 3.24. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化超曲面のワインガルテン行列 W_{P} の固有値を超曲面 M の点 P における**主曲率**という．また，

$$H(\mathrm{P}):=\frac{1}{n}\operatorname{tr}W_{\mathrm{P}}$$

を M の P における**平均曲率** という [18]．さらに $H\colon \mathrm{P}\mapsto H(\mathrm{P})$ は M 上の関数を与えるが，これを超曲面の平均曲率関数，または単に平均曲率という．

注意 3.25. 3 次元ユークリッド空間の曲面論では，$\det W$ を**ガウス曲率**とよび，それが第一基本量から定まる（内的な量である）ことを学んだ（ガウスの驚異の定理）．一般の次元では（ユークリッド空間の超曲面であっても）$\det W$ は第一基本量のみでは一般に表すことができない．この講義では，次回以降で，超曲面の内的な不変量である「断面曲率」を考察したい．なお，$\det W$ はガウス・クロネッカー曲率とよばれ，それ自体は曲面の重要な不変量である．

■ **例：2 次超曲面**　擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上で

$$q_c(\boldsymbol{x}):=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle-c \tag{3.2}$$

[17] W のトレース：the trace of W

[18] 主曲率：the principal curvatures; 平均曲率：the mean curvature.

により，関数 $q_c\colon\mathbb{R}^{n+1}_t\to\mathbb{R}$ を定義する．ここで c は実数の定数で，$\mathbb{R}^{n+1}_t$ 上の点 P を，P の位置ベクトル $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とみなしている．この関数によって

$$Q_c:=q_c^{-1}(\{0\})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}_t\mid\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=c\} \tag{3.3}$$

と定める．

$t=0$ の場合，すなわちユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の超曲面の場合は，

- $c>0$ のとき，Q_c は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の**超球面**，とくに $n=2$ の場合は**球面**を表す [19]
- $c=0$ のとき Q_0 は原点 1 点からなる集合である．
- $c<0$ のとき $Q_c=\emptyset$.

$t=1$ の場合，すなわち，ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面の場合を考えよう．このときは，任意の実数に対して $Q_c\neq\emptyset$ である．ここで

$$\operatorname{grad}q_c(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x} \tag{3.4}$$

となるので，これが消えるのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となるとき．

- $c\neq0$ のときは $\boldsymbol{0}\notin Q_c$ なので Q_c は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分多様体．
- $c=0$ のときは $\boldsymbol{0}$ で $\operatorname{grad}q_c(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ となってしまうので，原点の近傍では Q_c は部分多様体になっていない．原点以外の $\mathrm{P}\in Q_c$ に対して P の近傍 $U\subset\mathbb{R}^{n+1}_1$ で $Q_c\cap U$ が $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分多様体となるものが存在する．

これらの超曲面の因果特性，平均曲率を問題 III-1 で求めてみよう．

[19] 超球面：the hypersphere；球面：the sphere.

問　　題　　III

III-1 ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ において式 (3.3) で定義される Q_c を考える．

(1) Q_c が退化超曲面となるような c の値を求めなさい．

(2) Q_c が非退化超曲面であるとき，それが空間的（時間的）であるための c の条件を求めなさい．

(3) Q_c が非退化超曲面であるとき，ワインガルテン作用素 W は

$$W(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\sqrt{|c|}}\boldsymbol{v}$$

となることを示しなさい．

(4) Q_c が非退化超曲面であるとき，その平均曲率を求めなさい．

(5) $n=2$ のとき Q_0, Q_1, Q_{-1} を図示しなさい．$\mathbb{R}^3_1$ の座標 (x_0, x_1, x_2) において x_0 座標を鉛直方向にとりなさい．

III-2 定義 2.11 の $\mathbb{R}^3_1$ のベクトル積の定義（訂正済み）を思い出そう：$\boldsymbol{v} = {}^t(v_0, v_1, v_2)$, $\boldsymbol{w} = {}^t(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3_1$ に対して

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} := {}^t\left(-\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}\right)$$

2 次元多様体 M の $\mathbb{R}^3_1$ へのはめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^3_1$ で $f\colon M \to f(M)$ が微分同相写像を与えているようなものをとる．すなわち $f(M)$ は $\mathbb{R}^3_1$ の曲面[20] である．M の局所座標系 (u, v) をとるとき，

(1) $f(M)$ が空間的（時間的）曲面となるための必要十分条件は，ベクトル $f_u \times f_v$ が時間的（空間的）であることが必要十分である．ただし "$\times$" は定義 2.11 で与えられたベクトル積である．このことを示しなさい．

(2) $f(M)$ の点 $f(\mathrm{P})$ における接空間 $T_{f(\mathrm{P})}f(M)$ は $\{f_u(\mathrm{P}), f_v(\mathrm{P})\}$ を基底にもつ．とくに曲面が非退化なとき，第二基本型式 $I\!I$ は

$$I\!I(f_u, f_u) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{uu}),$$
$$I\!I(f_u, f_v) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{uv}),$$
$$I\!I(f_v, f_v) = \frac{1}{\delta}\det(f_u, f_v, f_{vv})$$

を満たす．このことを示しなさい．ただし $\delta = \varepsilon|\langle f_u \times f_v, f_u \times f_v\rangle|^{1/2}$, $\varepsilon = \pm 1$ である．

[20] 2 次元の場合は超曲面ではなく「曲面」という．

(3) 以下，(x_0, x_1, x_2) の代わりに (t, x, y) と書く．2 変数関数 $\varphi(x, y)$ によって $t = \varphi(x, y)$ とグラフ表示される R^3_1 の曲面が非退化であるとき，その平均曲率を φ とその偏導関数を用いて表しなさい．

III-3 第二基本型式の対称性（命題 3.22）を証明しなさい．
ヒント：微分公式

$$\frac{d}{dt}\langle\gamma(t), \sigma(t)\rangle = \left\langle\frac{d\gamma}{dt}(t), \sigma(t)\right\rangle + \left\langle\gamma(t), \frac{d\sigma}{dt}(t)\right\rangle$$

を用いる．

IV. 驚異の定理

今回は対象を，とくに 3 次元（擬）ユークリッド空間の曲面 [1] に限る．

■ ユークリッド空間の曲面（復習）　まず，ユークリッド空間の曲面の理論の復習をしよう [2]．$\mathbb{R}^3$ $(=\mathbb{R}^3_0)$ の曲面を，はめ込み

(4.1) $$f\colon U \ni (u,v) \longmapsto f(u,v) \in \mathbb{R}^3$$

でパラメータ表示しておく．ここで U は $\mathbb{R}^2$ の領域である．とくに，系 3.4 により，f がはめ込みであるための必要十分条件は U 上の各点で $\{f_u, f_v\}$ が一次独立となることである [3]．このとき，ベクトル積 $f_u \times f_v$ は U 上至るところで $\mathbf{0}$ にはならない [4] ので，単位法線ベクトルは

$$\nu := \pm\frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

で与えられる．

いま，点 P の十分小さい近傍をとれば f は単射になるので，U とその像 $f(U)$ を同一視しておく [5]．部分多様体 $f(U)$ の接平面 [6] への，$\mathbb{R}^3$ の内積の制限を曲面 $f(U)$ の**第一基本形式**または**誘導計量**という（第 III 節）．[曲線と曲面] にしたがって，第一基本形式を

(4.2) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$E := \langle f_u, f_u\rangle, \quad F = \langle f_u, f_v\rangle, \quad G = \langle f_v, f_v\rangle$$

[*] 2017 年 5 月 2 日 (2017 年 5 月 23 日訂正)

[1] 前回までの定義からすると超曲面だが，とくに次元が 2 なので曲面 surface とよぶことにする．

[2] 詳細は，たとえば「曲線と曲面（改訂版）」（梅原雅顕・山田光太郎）（裳華房）を参照してほしい．以下，これを [曲線と曲面] のように引用する．

[3] 下付きの添字は偏微分を表す：$f_u = \partial f/\partial u$, $f_v = \partial f/\partial v$.

[4] ここでのベクトル積は，定義 2.11 で定義した 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間におけるベクトル積ではなく，線形代数や力学の時間に学んだ，ユークリッド空間のベクトル積である：

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} := {}^t\!\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_0 & w_0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_0 & w_0 \\ v_1 & w_1\end{vmatrix}\right).$$

[5] 最初に与えられた領域 U 全体で f は単射ではないかもしれないが，今回は局所的な性質のみを考察したいので，このようにしても問題がない．

[6] 一般論としては「接空間」とよぶべきだが，ここでは 2 次元なのでとくに接平面 tangent plane とよぶ．

と表そう．ベクトル f_u, f_v を列ベクトルとみなせば

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}$$

と書けることに注意しておく．

誘導計量が (4.2) という形に「表される」のは次のような理由による．曲面 U 上の点 P を一つ固定したとき，接空間 $T_{\mathrm{P}}U$ $(= T_{f(\mathrm{P})}f(U))$ は $\{f_u, f_v\}$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間である．ここで，記号 du, dv で線形写像

$$du\colon T_{\mathrm{P}}M \to \mathbb{R} \qquad du(f_u) = 1, \quad du(f_v) = 0$$
$$dv\colon T_{\mathrm{P}}M \to \mathbb{R} \qquad dv(f_u) = 0, \quad dv(f_v) = 1$$

を表すと，$\{du, dv\}$ は $T_{\mathrm{P}}U$ 上の実数値線形形式全体がなす線形空間（すなわち $T_{\mathrm{P}}U$ の双対空間 dual space $T^*_{\mathrm{P}}U$）の基底となる．さらに

$$\begin{aligned} du^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= du(\boldsymbol{x})du(\boldsymbol{y}), \\ du\,dv(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= \frac{1}{2}\bigl(du(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) + du(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x})\bigr), \\ dv^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= dv(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

と定めると，du^2, $du\,dv$, dv^2 はそれぞれ $T_{\mathrm{P}}U$ 上の対称双線形形式を与える．とくにこれらは $T_{\mathrm{P}}U$ 上の対称双線形形式全体のなす線形空間の基底となっている．点 P における誘導計量は，$T_{\mathrm{P}}U$ の対称双線形形式なので，du^2, $du\,dv$, dv^2 の線形結合で書けるはずで，実際 $\boldsymbol{x} = x_1 f_u + x_2 f_v$, $\boldsymbol{y} = y_1 f_u + y_2 f_v$ に対して

$$\begin{aligned} ds^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle x_1 f_u + x_2 f_v, y_1 f_u + y_2 f_v\rangle \\ &= x_1 y_1 \langle f_u, f_u\rangle + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\langle f_u, f_v\rangle + x_2 y_2 \langle f_v, f_v\rangle \\ &= E du(\boldsymbol{x})du(\boldsymbol{x}) + F\bigl(du(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) + du(\boldsymbol{y})dv(\boldsymbol{x})\bigr) + G dv(\boldsymbol{x})dv(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となるので，(4.2) の表示が得られた．

この曲面のワインガルテン作用素 $W = -d\nu$（定義 3.21）は，f_u を $-\nu_u$, f_v を $-\nu_v$ に対応させる線形写像と見なすことができる．したがって，$T_{\mathrm{P}}U = T_{f(\mathrm{P})}f(U)$ の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列を $\hat{W}$ とすると，

(4.3) $$\begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}\hat{W}$$

と表される．

第二基本形式 $I\!I$ を（定義 3.21）にしたがって $I\!I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle$ で定義すると，

$$
\begin{aligned}
&L := I\!I(f_u,f_u) = \langle f_u, W(f_u)\rangle = -\langle f_u,\nu_u\rangle = \langle f_{uu},\nu\rangle,\\
&M := I\!I(f_u,f_v) = \langle f_u, W(f_v)\rangle = -\langle f_u,\nu_v\rangle = \langle f_{uv},\nu\rangle = I\!I(f_v,f_u),\\
&N := I\!I(f_v,f_v) = \langle f_v, W(f_v)\rangle = -\langle f_v,\nu_v\rangle = \langle f_{vv},\nu\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

を用いて

$$I\!I = L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表すことができる．

定理 4.1. ワインガルテン作用素 W の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列は

$$\hat{W} := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}, \qquad \widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

と表される．

証明. 行列 $\widehat{I}$ は第一基本形式（これは対称双線形形式であった）の基底 $\{f_u, f_v\}$ に関する表現行列だから，非退化性から $\widehat{I}$ は正則行列になる．式 (4.3) から

$$\widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t f_u \\ {}^t f_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_u & f_v \end{pmatrix}\hat{W} = \widehat{I}\,\hat{W}$$

より結論が得られた． □

定理 4.2 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** これまでの状況で，

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\
f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\
f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\
\nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} と W^i_j は次を満たす (u,v) の関数である：

$$
\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac12 E_u & \frac12 E_v & F_v - \frac12 G_u \\ F_u - \frac12 E_v & \frac12 G_u & \frac12 G_v \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.
$$

証明. 単位法線ベクトル ν の微分に関する式は (4.3) そのものである（ワインガルテンの公式[7] とよばれる）．はめ込み f の 2 階微分の等式を示そう．定義域 U の各点で $\{f_u, f_v, \nu\}$ は一次独立だから，f_{uu}，f_{uv}，f_{vv} はこれらの線形結合で表される：

$$
\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + A\nu \\
f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + B\nu \\
f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + C\nu.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

この係数を決定すればよい．いま (4.4)，f_u，f_v が ν と直交すること，および $\underline{\langle \nu,\nu\rangle = 1}$ から

$$A = L, \quad B = M, \quad C = N$$

を得る．また，(4.5) の両辺に f_u，f_v を内積すると，

$$
\begin{pmatrix} \langle f_u, f_{uu}\rangle & \langle f_u, f_{uv}\rangle & \langle f_u, f_{vv}\rangle \\ \langle f_v, f_{uu}\rangle & \langle f_v, f_{uv}\rangle & \langle f_v, f_{vv}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix}
$$

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
\langle f_u, f_{uu}\rangle &= \frac12 \langle f_u, f_u\rangle_u = \frac12 E_u \\
\langle f_u, f_{uv}\rangle &= \frac12 \langle f_u, f_u\rangle_v = \frac12 E_v \\
\langle f_u, f_{vv}\rangle &= \langle f_u, f_v\rangle_v - \langle f_{uv}, f_v\rangle = F_v - \frac12 G_u \\
\langle f_v, f_{uu}\rangle &= \langle f_v, f_u\rangle_u - \langle f_{vu}, f_u\rangle = F_u - \frac12 E_v \\
\langle f_v, f_{uv}\rangle &= \frac12 \langle f_v, f_v\rangle_u = \frac12 G_u \\
\langle f_u, f_{vv}\rangle &= \langle f_v, f_v\rangle_v = \frac12 G_v
\end{aligned}
$$

なので，結論が得られた． □

[7] ワインガルテンの公式：Weingarten formula.

定理 4.2 にあらわれる Γ_{ij}^k $(i,j=1,2)$ を**クリストッフェル記号**または**接続係数**とよぶ [8]．

■ **驚異の定理**　3 次元ユークリッド空間の曲面のワインガルテン作用素の表現行列 $\hat{W}$（定理 4.1）の行列式はパラメータ (u,v) のとり方によらない．

定義 4.3. 3 次元ユークリッド空間の曲面に対して，そのワインガルテン行列の行列式

$$K_{\mathrm{ext}} := \det \hat{W}$$

を，**外的曲率・ガウス・クロネッカー曲率**という [9]．

次はガウスの**驚異の定理**として知られている [10]：

定理 4.4. 3 次元ユークリッド空間の曲面のガウス・クロネッカー曲率は

$$
\begin{aligned}
(4.6)\quad K_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{EG-F^2}\times&\\
\bigl(E(\Gamma_{22u}^1&+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^2\Gamma_{21}^1-\Gamma_{12v}^1-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1-\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1)\\
&+F(\Gamma_{22u}^2+\Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2\Gamma_{21}^2-\Gamma_{12v}^2-\Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2)\bigr)
\end{aligned}
$$

を満たす．ただし，曲面の座標系 (u,v) に関する第一基本形式を (4.2)，クリストッフェル記号を定理 4.2 のように書いた．

とくに K_{ext} は第一基本形式の情報のみによって定まる．

証明. 定理 4.2 の第 3 式，第 2 式をそれぞれ u，u で微分し，f_{uu}, f_{uv}, f_{vv}, ν_u, ν_v をまた定理 4.2 で f_u, f_v, ν で表す．$\langle f_{vvu}, f_u\rangle = \langle f_{uvv}, f_u\rangle$ なので，整理すると結論が得られる．□

式 (4.6) の左辺は曲面のワインガルテン作用素から定まる量だが，右辺は第一基本形式のみによって定まる．

[8] クリストッフェル記号：the Christoffel symbol; 接続係数：the coefficient of the connection．ただし $\Gamma_{21}^j=\Gamma_{12}^j$ としておく．

[9] 外的曲率：the extrinsic curvature; ガウス・クロネッカー曲率：the Gauss-Kronecker curvature．ユークリッド空間の曲面論で学ぶ**ガウス曲率**（たとえば [曲線と曲面] の第 8 節）のことであるが，このあとすぐ現れる「内的曲率」と区別するためにここでは別の名前で呼んでおく．

[10] 驚異の定理：Theorema Egregium

定義 4.5. 2 次元多様体上のリーマン計量 $ds^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ に対して [11]，(4.6) の右辺で定まる量を，リーマン計量の**ガウス曲率**という [12]．

定理 4.4 は，曲面のガウス・クロネッカー曲率 K_{ext} が，曲面をリーマン多様体とみなしたときのガウス曲率と一致することを示している．とくに，ガウス曲率 $K=K_{\mathrm{ext}}$ は，第一基本形式の係数 E, F, G を用いて

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad K = {}&\frac{E(E_vG_v-2F_uG_v+{G_u}^2)}{4(EG-F^2)^2}\\
&+\frac{F(E_uG_v-E_vG_u-2E_vF_v-2F_uG_u+4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2}\\
&+\frac{G(E_uG_u-2E_uF_v+{E_v}^2)}{4(EG-F^2)^2}-\frac{E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu}}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}
$$

と表される（[曲線と曲面] 参照）．

■ **ローレンツ・ミンコフスキー空間の空間的曲面の場合**　ユークリッド空間の曲面をお手本にして，ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^3$ の曲面を考える．とくに曲面が非退化なら，第一基本形式，単位法線ベクトル，ワインガルテン作用素，第二基本形式がユークリッド空間の場合と同様に定義できる．

以下，$\mathbb{R}_1^3$ の**空間的**曲面を考える．すると，第一基本形式（誘導計量）

$$
(4.8)\quad ds^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2
$$

$$
E:=\langle f_u,f_u\rangle,\quad F=\langle f_u,f_v\rangle,\quad G=\langle f_v,f_v\rangle
$$

は正定値なので，曲面上のリーマン計量を与えている．したがって R_1^3 の中にいることを忘れてリーマン計量のみから，ガウス曲率を定義 4.5 から求めることができる．このガウス曲率 K を定理 4.4 のような形でワインガルテン作用素を用いて計算したい．

曲面のパラメータ表示 $f\colon U\ni(u,v)\mapsto f(u,v)\in\mathbb{R}_1^3$ が空間的曲面を与え

[11] 多様体の各接空間上に内積が定義されているとき，その内積の族をリーマン計量 a Riemannian metric という．曲面の第一基本形式は曲面上の接平面の内積を与えているのでリーマン計量である．リーマン計量が与えられた多様体のことをリーマン多様体 a Riemannian manifold という．

[12] ガウス曲率：the Gaussian curvature.

ているとき，その法線ベクトル

$$f_u \times f_v$$

は時間的ベクトルである．ただし $\times$ はローレンツ・ミンコフスキー空間のベクトル積（定義 2.11）である．したがって，単位法線ベクトル

$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|\langle f_u \times f_v, f_u \times f_v\rangle|^{1/2}}$$

は時間的単位ベクトル，すなわち

$$\varepsilon := \langle \nu, \nu\rangle = -1$$

を満たしている．この単位法線ベクトル ν に対して，ワインガルテン作用素 $W := -d\nu$ を考えると，曲面上の各点 P で W_{P} は接平面の線形変換を与えている．さらに，

$$I\!I(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) := \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle = -\langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle$$

により第二基本形式を定めると，これは接平面上の対称双線形形式を与えるので，

$$I\!I = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表される．ただし

$$\begin{aligned}
L &:= I\!I(f_u, f_u) = -\langle f_u, W(f_u)\rangle = \langle f_u, \nu_u\rangle = -\langle f_{uu}, \nu\rangle,\\
M &:= I\!I(f_u, f_v) = -\langle f_u, W(f_v)\rangle = \langle f_u, \nu_v\rangle = -\langle f_{uv}, \nu\rangle = I\!I(f_v, f_u),\\
N &:= I\!I(f_v, f_v) = -\langle f_v, W(f_v)\rangle = \langle f_v, \nu_v\rangle = -\langle f_{vv}, \nu\rangle
\end{aligned}$$

である（ユークリッド空間の曲面の場合と符号が違う）．

定理 4.6. 以上の状況で

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + L\nu\\
f_{uv} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + M\nu\\
f_{vv} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + N\nu
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\nu_u &= -W_1^1 f_u - W_1^2 f_v\\
\nu_v &= -W_2^1 f_u - W_2^2 f_v
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，Γ_{jk}^i は第一基本形式 ds^2 のクリストッフェル記号（すなわち，定理 4.2 と同じもの）で W_j^i は

$$\begin{pmatrix} W_1^1 & W_2^1\\ W_1^2 & W_2^2\end{pmatrix} = \hat{W} = -\begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} L & M\\ M & N\end{pmatrix}.$$

で与えられる．

証明． 右側の式は，

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} {}^t f_u\\ {}^t f_v\end{pmatrix} J \begin{pmatrix} f_u & f_v\end{pmatrix}, \quad \widehat{I\!I} = -\begin{pmatrix} {}^t f_u\\ {}^t f_v\end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \nu_u & \nu_v\end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

に注意すれば (4.3) と同様に示される．左側の式のうち f_u, f_v の成分は定理 4.1 と全く同様，ν 成分は $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ と第二基本形式の定義式の符号の違いに注意すれば定理 4.1 と同様である． □

定理 4.6 に対して驚異の定理 4.4 と同様の議論を行うと，次がわかる：

定理 4.7. 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の曲面のパラメータ表示 $f\colon U \ni (u, v) \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}_1^3$ が空間的曲面を与えているとき，第一基本形式から定まるガウス曲率は

$$K = -\det \hat{W}$$

を満たす．ここで $\hat{W}$ はワインガルテン作用素の表現行列である．

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間の時間的曲面の場合 はめ込み $f(u, v)$ が $\mathbb{R}_1^3$ の時間的曲面を与えているときも，第一基本形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

が定義されるが，これは不定値計量である．しかし，非退化であることから，$EG - F^2 \neq 0$ が成り立っている．したがって定理 4.2 のようにクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k が定義され，ガウス曲率 K が (4.6) の右辺によって定義される．

一方，単位法線ベクトル ν は空間的なので，

$$\varepsilon := \langle \nu, \nu \rangle = 1$$

となっている．そこで，ワインガルテン作用素 $W := -d\nu$ および第二基本形式

$$I\!I(*, ()) := \langle *, W(*) \rangle = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

を定めると，次が成り立つ：

定理 4.8. 以上の状況で

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\nu \\ f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\nu \\ f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\nu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \nu_u &= -W^1_1 f_u - W^2_1 f_v \\ \nu_v &= -W^1_2 f_u - W^2_2 f_v \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，Γ^i_{jk} は第一基本形式 ds^2 のクリストッフェル記号（すなわち，定理 4.2 と同じもの）で W^i_j は

$$\begin{pmatrix} W^1_1 & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 \end{pmatrix} = \hat{W} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

で与えられる．

証明． 証明は定理 4.6 と全く同様．ただし $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ に注意する． □

したがって

定理 4.9. 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の時間的曲面のガウス曲率（第一基本形式に関するガウス曲率）K は

$$K = \det \hat{W}$$

を満たす．ここで $\hat{W}$ は曲面のワインガルテン作用素の表現行列である．

定理 4.7, 4.9 をまとめると，

系 4.10. 非退化なはめ込み

$$f \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$$

の単位法線ベクトルを ν，ワインガルテン作用素を $W := -d\nu$ とすると，第一基本形式に関するガウス曲率 K は

$$K = \langle \nu, \nu \rangle \det \hat{W}$$

を満たす．ただし $\hat{W}$ は W の接空間の基底に関する表現行列である．

問　題　IV

IV-1 3 次元ユークリッド空間の半径 r の球面のガウス曲率を求めなさい．

IV-2 次のパラメータ表示がユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面を与えるような (u,v) の範囲を求め，その範囲でガウス曲率を求めなさい．

$$f(u,v)=\bigl(\operatorname{sech} v\cos u, \operatorname{sech} v\sin u, v-\tanh v\bigr).$$

IV-3 2 次元多様体 M 上のリーマン計量 ds^2 が局所座標系 $(U;u,v)$ によって

$$ds^2=e^{2\sigma}(du^2+dv^2)\qquad(\sigma=\sigma(u,v)\in C^\infty(U))$$

と表されているとき，(u,v) を**等温座標系**または**共形座標系** とよぶ [13]．この座標系に関してクリストッフェルの記号 Γ_{ij}^k，ガウス曲率 K はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{11}^1=\sigma_u, &&\Gamma_{12}^1=\sigma_v, &&\Gamma_{22}^1=-\sigma_u,\\
&\Gamma_{11}^2=-\sigma_v, &&\Gamma_{12}^2=\sigma_u, &&\Gamma_{22}^2=\sigma_v\\
&K=-e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})
\end{aligned}$$

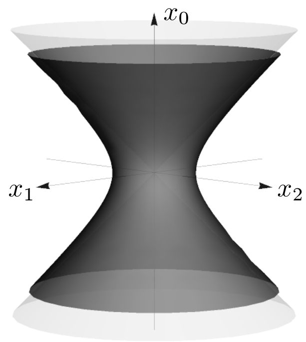
を満たすことを確かめなさい．

IV-4 3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間の部分集合

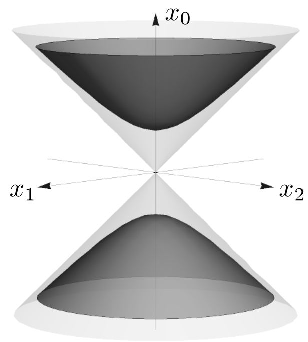
$$Q_c:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3_1 \mid \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle-c=0\}$$

のガウス曲率を求めなさい．

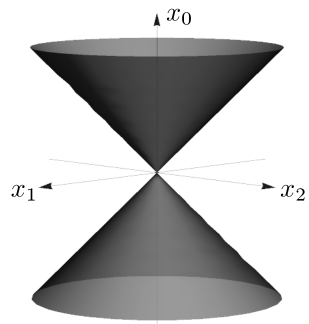
[13] 等温座標系：an isothermal coordinate system; 共形座標系：a conformal coordinate system. 一般に 2 次元リーマン多様体は，各点の近傍で等温座標系をもつ（[曲線と曲面] 第 15 節）．



Q_1



Q_{-1}



Q_0

V. 断面曲率

■ 驚異の定理の証明　第 IV 回では，3 次元（擬）ユークリッド空間の曲面に対してガウス曲率 K を定義し，

$$K = \varepsilon K_{\mathrm{ext}} \qquad \varepsilon = \langle \nu, \nu \rangle$$

を示した．ここで K_{ext} はワインガルテン作用素の（表現行列の）行列式，ν は単位法線ベクトルである．

ガウス曲率 K の定義は，式 (4.6) で，これはかなり複雑なので，もう少し「覚えやすい」形に書きなおそう．そのために驚異の定理（定理 4.4）の証明を思い出す．

領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ の 3 次元ユークリッド空間へのはめ込み $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトルを ν とすると，各点 P に対して $\mathbb{R}^3 = T_{f(\mathrm{P})}\mathbb{R}^3$ は

$$\mathbb{R}^3 = T_{f(\mathrm{P})} f(U) \oplus \mathbb{R}\nu(\mathrm{P}) \tag{5.1}$$

と直交直和に分解される．したがって $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} \qquad \bigl([\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} \in T_{f(\mathrm{P})} f(U), [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}\nu(\mathrm{P})\bigr)$$

と一意的に分解できる．$[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の（点 $f(\mathrm{P})$ における）**接成分** $[\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}}$ を**法成分**とよぶことにする[1)]．

曲面の接平面 $T_{f(\mathrm{P})} f(U)$ は $f_u(\mathrm{P})$, $f_v(\mathrm{P})$ ではられる平面だから，たとえば，ガウスの公式（定理 4.2 の左側の式）において，

$$\begin{aligned}
[f_{uu}]^{\mathrm{T}} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v, &\quad [f_{uu}]^{\mathrm{N}} &= L\nu \\
[f_{uv}]^{\mathrm{T}} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v, &\quad [f_{uv}]^{\mathrm{N}} &= M\nu \\
[f_{vv}]^{\mathrm{T}} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v, &\quad [f_{vv}]^{\mathrm{N}} &= N\nu
\end{aligned}$$

*)2017 年 5 月 9 日 (2016 年 5 月 30 日訂正)

1)接成分：the tangent component; 法成分：the normal component.

が成り立つ．驚異の定理 4.4 は，

$$\langle f_{vvu} - f_{uvv}, f_u \rangle = 0 \tag{5.2}$$

を変形することで得られる．実際

$$\begin{aligned}
f_{vvu} &= \frac{\partial}{\partial u} f_{vv} = \frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}} + \frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{N}} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + \frac{\partial}{\partial u}(N\nu) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + N\frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial u}\nu \\
f_{uvv} &= \frac{\partial}{\partial v} f_{uv} = \frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}} + \frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{N}} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + \frac{\partial}{\partial v}(M\nu) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{N}} + M\frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v}\nu
\end{aligned}$$

だが，ワインガルテンの公式

$$\nu_u = -W_1^1 f_u - W_1^2 f_v, \qquad \nu_v = -W_2^1 f_u - W_2^2 f_v$$

から

$$\begin{aligned}
[f_{vvu}]^{\mathrm{T}} &= \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - NW_1^1 f_u - NW_1^2 f_v, \\
[f_{uvv}]^{\mathrm{T}} &= \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - MW_2^1 f_u - MW_2^2 f_v
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，条件 (5.2) は

$$\begin{aligned}
0 = \langle f_{vvu} - f_{uvv}, f_u \rangle &= \left\langle [f_{vvu}]^{\mathrm{T}} - [f_{uvv}]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad - (NW_1^1 + MW_2^1)\langle f_u, f_u\rangle + (NW_1^2 + MW_2^2)\langle f_u, f_v\rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle \\
&\qquad - N(EW_1^1 + FW_1^2) + M(EW_2^1 + FW_2^2) \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle - (LN - M^2) \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle - (EG - F^2)\det\hat{W} \\
&= \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle - (EG - F^2)K_{\mathrm{ext}}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，E, F, G は第一基本形式，L, M, N は第二基本形式の成分で，$\hat{W} = (W_j^i)$ はワインガルテン作用素の表現行列，したがって

$$
\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1^1 & W_2^1 \\ W_2^2 & W_2^2 \end{pmatrix}
$$

が成り立つことを用いた（ここではとくにユークリッド空間の曲面を考えている）．このことから，(4.6) の右辺，すなわち第一基本形式 ds^2 から定まるガウス曲率は

$$
K = \frac{1}{EG - F^2}\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}[f_{vv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} - \left[\frac{\partial}{\partial v}[f_{uv}]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, f_u \right\rangle \tag{5.3}
$$

となることがわかる．

■ 共変微分　引き続きユークリッド空間の曲面のパラメータ表示 $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ を考える．

定義 5.1. 曲面上の**接ベクトル場**とは，U の各点 P に対して接ベクトル $X_{\mathrm{P}} \in T_{f(\mathrm{P})}f(U)$ を与える対応

$$
X\colon U \ni \mathrm{P} \longmapsto X_{\mathrm{P}} \in T_{f(\mathrm{P})}f(U)
$$

のことである．とくに，$T_{f(\mathrm{P})}f(U)$ 基底 $\{f_u(\mathrm{P}), f_v(\mathrm{P})\}$ を用いて

$$
X_{\mathrm{P}} = X_1(\mathrm{P})f_u(\mathrm{P}) + X_2(\mathrm{P})f_v(\mathrm{P})
$$

と書くと，P が決まるごとに $X_j(\mathrm{P})$ $(j = 1, 2)$ が定まるから X_1, X_2 は U 上で定義された関数である．これらが C^∞-級であるときベクトル場 X は**なめらか**であるという [2]．

微分 f_u, f_v は曲面上のなめらかなベクトル場である．一方，2 階微分 f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} は一般に接ベクトル場を与えない．

定義 5.2. パラメータ表示された曲面 $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ の接ベクトル場 X に対して

$$
\frac{\nabla}{\partial u}X := \left[\frac{\partial X}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}}
$$

とおき，X の u 方向の**共変微分**とよぶ [3]．さらに，もうひとつのベクトル場 $Y = Y_1 f_u + Y_2 f_v$ をとり，

$$
\nabla_Y X := Y_1\frac{\nabla}{\partial u}X + Y_2\frac{\nabla}{\partial v}X
$$

と定め，X の Y 方向の共変微分とよぶ．この記号に従えば，

$$
\frac{\nabla}{\partial u}X = \nabla_{\partial/\partial u}X, \qquad \frac{\nabla}{\partial v}X = \nabla_{\partial/\partial v}X
$$

と書けばよいことになる．

とくに，接ベクトル f_u, f_v の u-方向，v-方向の共変微分を f_u, f_v の線形結合として

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial u}f_u &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v & \nabla_{\partial/\partial u}f_v &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v \\
\nabla_{\partial/\partial v}f_u &= \Gamma_{21}^1 f_u + \Gamma_{21}^2 f_v & \nabla_{\partial/\partial v}f_v &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v
\end{aligned}
$$

[2] ベクトル場：a vector field; 接ベクトル場：a tangent vector field; なめらかな接ベクトル場：a smooth tangent vector field.

[3] 共変微分：the covariant derivative; 記号 ∇ は “nabla” と読む．まれに “atled” と読む人もいる．“The nabla is so-called because it looks like a harp; the Greek word for the Hebrew or Egyptian form of a harp is ‘nabla’” らしい：
http://www.chronicle.com/blognetwork/castingoutnines/2012/02/20/the-origin-of-the-nabla-symbol/

と表せば，係数 Γ^i_{jk} $(i,j=1,2)$ は定理 4.2 に現われるクリストッフェル記号にほかならない．この記号を用いれば，

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} X &= X_1 f_u + X_2 f_v = X_1\frac{\partial}{\partial u} + X_2\frac{\partial}{\partial v},\\ Y &= Y_1 f_u + Y_2 f_v = Y_1\frac{\partial}{\partial u} + Y_2\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= Y_1\nabla_{\partial/\partial u}X + Y_2\nabla_{\partial/\partial v}X\\ &= Y_1\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial u} + \Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^1_{12}X_2\right)f_u + \left(\frac{\partial X_2}{\partial u} + \Gamma^2_{11}X_1 + \Gamma^2_{12}X_2\right)f_v\right]\\ &\quad + Y_2\left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial v} + \Gamma^1_{21}X_1 + \Gamma^1_{22}X_2\right)f_u + \left(\frac{\partial X_2}{\partial v} + \Gamma^2_{21}X_1 + \Gamma^2_{22}X_2\right)f_v\right] \end{aligned}$$

と計算できる．すなわち，クリストッフェル記号がわかれば共変微分は定まったことになる．とくに $\Gamma^j_{12} = \Gamma^j_{21}$ $(j=1,2)$ に注意すれば

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} &\nabla_X Y - \nabla_Y X\\ &\quad = \left(X_1\frac{\partial Y_1}{\partial u} - Y_1\frac{\partial X_1}{\partial u} + X_2\frac{\partial Y_1}{\partial v} - Y_2\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)f_u\\ &\qquad + \left(X_1\frac{\partial Y_2}{\partial u} - Y_1\frac{\partial X_2}{\partial u} + X_2\frac{\partial Y_2}{\partial v} - Y_2\frac{\partial X_2}{\partial v}\right)f_v\\ &\qquad = [X,Y] \end{aligned}$$

となる．右辺の $[X,Y]$ は多様体上のベクトル場に対する**括弧積**，**交換子積**，**ブラケット積**，**リー括弧積**などとよばれるベクトル場同士の積で [4)]，リーマン計量によらず，多様体の構造のみから決まる量である．

とくに，クリストッフェル記号は第一基本形式 ds^2 の係数 E, F, G から定まるので，リーマン多様体 (U, ds^2) 上の量であることがわかる．このように，曲面を第一基本形式が与えるリーマン計量によりリーマン多様体とみなしたとき，そのリーマン多様体としての構造から定まる量のことを**内的** [5)]，リーマン計量のみからは定まらない量を**外的**という．

[4)] 括弧積：bracket; リー括弧積：the Lie bracket.
[5)] 内的：intrinsic；外的：extrinsic

例 5.3. ふたつのはめ込み

$$f_1\colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (u,v,0) \in \mathbb{R}^3, \quad f_2\colon \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto (\cos u, \sin u, v) \in \mathbb{R}^3$$

は同じ第一基本形式 $ds^2 = du^2 + dv^2$ を与えるが，f_1 の平均曲率は 0，f_2 の平均曲率は $\pm 1/2$ なので，平均曲率は外的な量である．一方，定理 4.4 より，ガウス曲率は第一基本形式で表すことができるので，内的な量である． ◇

共変微分を用いると，驚異の定理 4.4 の証明に現れた式 (5.3) は，

$$(5.6)\qquad K = \frac{1}{EG - F^2}\left\langle \nabla_{\partial/\partial u}\nabla_{\partial/\partial v}f_v - \nabla_{\partial/\partial v}\nabla_{\partial/\partial u}f_v, f_u\right\rangle,$$

と表すことができる．

補題 5.4. 曲面 $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 X, Y を (5.4) のように表しておくと，

$$\left\langle \nabla_X\nabla_Y Y - \nabla_Y\nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]}Y, X\right\rangle = (\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2)K$$

が成り立つ．ただし $[X,Y]$ は (5.5) の括弧積である．

証明． 単純計算（問題 V-1）． □

■ ユークリッド空間の超曲面の断面曲率 式 (5.6) をもとにして，ガウス曲率に対応する高次元リーマン多様体上の内的な量を構成する．整数 $n \geqq 3$ に対して，領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ のユークリッド空間へのはめ込み

$$f\colon U \ni (u^1,\dots,u^n) \longmapsto f(u^1,\dots,u^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

を考える [6)]．このとき，各点 $\mathrm{P} \in U$ において

$$(5.7)\qquad \{f_1(\mathrm{P}),\dots,f_n(\mathrm{P})\} := \{f_{u^1}(\mathrm{P}),\dots,f_{u^n}(\mathrm{P})\} \qquad \left(f_j = \frac{\partial f}{\partial u^j}\right)$$

は一次独立だから，単位法線ベクトル $\nu(\mathrm{P})$ を定めることができる（問題 V-2）．

[6)] ここで突然だが，テンソル解析の古来からの習慣にあわせて座標の添字を**上付き**にする．以下，添字の上下は意味をもつものとする．すなわち a^i と a_i は区別する．

ユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の超曲面 $f(U)$ の接空間への制限 ds^2 をはめ込み f の**誘導計量**または**第一基本形式**というのであった．各点 P において (5.7) は $T_{\mathrm{P}}f(U)$ の基底をなす．この基底に関する ds^2 の表現行列を

$$\widehat{I} := (g_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \qquad g_{ij} = \langle f_i, f_j\rangle \tag{5.8}$$

と表すと，行列 $\widehat{I}$ は正定値な対称行列である．とくに $\det \widehat{I} > 0$ が成り立っている．そこで，$\widehat{I}$ の逆行列を上付き添字を用いて

$$\widehat{I}^{\,-1} = (g^{ij}) \qquad \text{すなわち} \qquad \sum_{j=1}^n g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i\neq k)\end{cases} \tag{5.9}$$

と書くことにする．

単位法線ベクトル場 ν を $(u^1,\dots,u^n)$ に対して $S^n = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,|\boldsymbol{x}|=1\}$ を対応させる写像とみなして，$W := -d\nu$ を**ワインガルテン作用素**とよんだ．各点 $\mathrm{P}\in U$ において W_{P} は $T_{\mathrm{P}}f(U)$ 上の線形変換で，その基底 (5.7) に関する表現行列を $\hat{W} = (W^i_j)$ と書く：

$$\frac{\partial\nu}{\partial u^j} = -W(f_j) = -\sum_{k=1}^n W^k_j f_k. \tag{5.10}$$

まとめて書けば

$$(\nu_1,\dots,\nu_n) = -(f_1,\dots,f_n)\hat{W}. \tag{5.11}$$

ワインガルテン作用素を用いて

$$I\!I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := \langle \boldsymbol{v}, W(\boldsymbol{w})\rangle$$

で**第二基本形式**を定めた．とくに，$I\!I$ の基底 (5.7) に関する表現行列を $\widehat{I\!I} = (h_{ij})$ と書くと，

$$h_{ij} := I\!I(f_i,f_j) = -\langle f_i,\nu_j\rangle = \langle f_{ij},\nu\rangle$$

となるので，$\widehat{I\!I}$ は対称行列である．すると

補題 5.5. 第一基本形式，第二基本形式，ワインガルテン作用素の基底 (5.7) に関する表現行列をそれぞれ $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$, $\hat{W}$ とすると，$\hat{W} := \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{I\!I}$ が成り立つ．

証明． 定理 4.1 と同じ（問題 V-3）． □

これらを用いると，定理 4.2 の高次元化が得られる：

定理 5.6. ここまでの記号のもと，$i,j = 1,\dots,n$ に対して

$$f_{ij} = \sum_{l=1}^n \Gamma^l_{ij} f_l + h_{ij}\nu, \qquad \nu_j = -\sum_{k=1}^n W^k_j f_k$$

が成り立つ．ただし Γ^k_{ij} は $\widehat{I}$ の成分から次のように得られる量である：

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \tag{5.12}$$

式 (5.12) を計量 ds^2 のクリストッフェル記号という．

証明． 第二式と f_{ij} の法成分については曲面の場合と全く同様．f_{ij} の接成分の係数 Γ^k_{ij} が (5.12) のように書けることを言えば良い．まず，結論の第一式左側の式に f_k を内積すると

$$\langle f_{ij}, f_k\rangle = \sum_{l=1}^n g_{kl}\Gamma^l_{ij}$$

を得る．一方，一般に g_{st} の u^l に関する微分を $g_{st,l}$ と書けば，

$$\begin{aligned}\langle f_{ij}, f_k\rangle &= \langle f_i, f_k\rangle_j - \langle f_i, f_{kj}\rangle = g_{ik,j} - \langle f_i, f_j\rangle_k + \langle f_{ik}, f_j\rangle \\ &= g_{ik,j} - g_{ij,k} + \langle f_{ik}, f_j\rangle = g_{ik,j} - g_{ij,k} + \langle f_k, f_j\rangle_i - \langle f_k, f_{ij}\rangle \\ &= g_{ik,j} - g_{ij,k} + g_{kj,i} - \langle f_{ij}, f_k\rangle.\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{l=1}^n g_{kl}\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) =: \Gamma_{ijk}$$

を得る．この両辺に g^{sk} をかけて $k=1$ から n までの和をとればよい． □

そこで，曲面の場合と同様に超曲面に接するベクトル場 X に対して

$$\nabla_{\partial/\partial u^j} X := \left[\frac{\partial X}{\partial u^j}\right]^{\mathrm{T}}$$

と定め，この ∇ を曲面上の共変微分という．共変微分は内的な量であるから，これを用いて，2 つのベクトル場 X, Y に対して

$$R_{X,Y} := \left\langle \nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X \right\rangle \tag{5.13}$$

と定めると，これは内的な量である [7]．

補題 5.7. リーマン多様体 (M, ds^2) の点 P を一つ固定する．2 組のベクトル場の組 $\{X, Y\}$ と $\{\widetilde{X}, \widetilde{Y}\}$ が

$$X_{\mathrm{P}} = \widetilde{X}_{\mathrm{P}}, \qquad Y_{\mathrm{P}} = \widetilde{Y}_{\mathrm{P}}$$

を満たすならば，$R_{X,Y}$ と $R_{\widetilde{X},\widetilde{Y}}$ は点 P で同じ値をとる．

証明． 局所座標系 $(u^1, \dots, u^n)$ を用いてベクトル場 X, Y を

$$X = \sum_{k=1}^{n} X^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \qquad Y = \sum_{k=1}^{n} Y^k \frac{\partial}{\partial u^k} \tag{5.14}$$

と表示したとき，値 $R_{X,Y}$ が，リーマン計量の情報（g_{ij}, Γ_{ij}^k とそれらの微分）および X, Y の成分のみで定まる（X, Y の成分の微分を含まない）ことを示せばよい（問題 V-4）． □

このことから，$X, Y \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して $R_{X,Y}$ は意味をもつ．

補題 5.8. リーマン多様体 (M, ds^2) の点 P と，$T_{\mathrm{P}}M$ の 2 次元の線形部分空間 Π_{P} を固定する．このとき， Π_{P} の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に対して

$$\frac{R_{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2}}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle^2} \tag{5.15}$$

は基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ のとり方によらない．

証明． 単純計算で示せるが，曲面のガウス曲率の表示式（補題 5.4） が X, Y のとり方によらず成立することと同じ理由による． □

[7] リーマン幾何学では $R(X,Y,Z,T) := \left\langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, T \right\rangle$ で定まる 4 階のテンソルを**曲率テンソル**とよぶが，ここで必要なのは式 (5.13) の形のみである．

定義 5.9. リーマン多様体 (M, ds^2) の点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ の 2 次元線形部分空間 Π_{P} に対して

$$K(\Pi_{\mathrm{P}}) := \frac{R_{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2}}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle - \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle^2} \qquad \left(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \text{ は } \Pi_{\mathrm{P}} \text{ の基底}\right)$$

と定め，Π_{P} に対する**断面曲率** [8] という．

曲面の場合の驚異の定理は，次の形で高次元化される（次回の講義参照）：

定理 5.10. 次元 n の多様体 M のはめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ の誘導計量 ds^2 によって M をリーマン多様体と見なす．このとき，$T_{\mathrm{P}}M$ における 2 次元部分空間 Π_{P} に対する断面曲率は

$$K(\Pi_{\mathrm{P}}) = \det \begin{pmatrix} I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\ I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle & \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle \end{pmatrix}$$
$$\left(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \text{ は } \Pi_{\mathrm{P}} \text{ の基底}\right)$$

を満たす．ただし $I\!I$ は f の第二基本形式である．

■ ローレンツ・ミンコフスキー空間の空間的超曲面の断面曲率

ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の空間的曲面 $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ は，誘導計量によりリーマン多様体とみなせるから，定義 5.9 によって断面曲率が定義される．曲面の場合と同じように驚異の定理が成り立つ [9]．

定理 5.11. 次元 n の多様体 M の空間的はめ込み $f\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ の誘導計量 ds^2 によって M をリーマン多様体と見なす．このとき，$T_{\mathrm{P}}M$ における 2 次元部分空間 Π_{P} に対する断面曲率は

$$K(\Pi_{\mathrm{P}}) = -\det \begin{pmatrix} I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\ I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & I\!I(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\rangle & \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1\rangle & \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\rangle \end{pmatrix}$$
$$\left(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \text{ は } \Pi_{\mathrm{P}} \text{ の基底}\right)$$

を満たす．ただし $I\!I$ は f の第二基本形式である．

[8] 断面曲率：the sectional curvature

[9] この場合，単位法線ベクトルが時間的 ($\langle \nu, \nu \rangle = -1$) であることに注意せよ．

問　題　V

V-1　補題 5.4 に証明を与えなさい.

V-2　一般に, $\mathbb{R}^n$ の領域 U のユークリッド空間へのはめ込み $f\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$ や, ローレンツ・ミンコフスキー空間への非退化なはめ込み $h\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ が具体的に与えられたとき, その単位法線ベクトルを計算するにはどうしたらよいか, 手順を説明しなさい.

V-3　補題 5.5 に証明を与えなさい.

V-4　ベクトル場 X, Y が (5.14) のように表示されているとき, 式 (5.13) の $R_{X,Y}$ の値を X^k, Y^k $(k = 1, \dots, n)$ を用いて表しなさい（補題 5.7）.

VI. 球面・双曲空間

■ リーマン多様体　一般に，可微分多様体 M の各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ に**正定値な**内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{P}}$ が与えられており，これが次の意味で滑らかであるとき，組 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を**リーマン多様体**とよぶ [1]：

> M 上の任意のなめらかなベクトル場 X, Y に対して
>
> $$M \ni \mathrm{P} \longmapsto \langle X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}} \rangle_{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}$$
>
> が滑らかな関数となる．ただし $X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}$ はそれぞれベクトル場 X, Y の P における値（$T_{\mathrm{P}}M$ の元）を表している．この関数を単に $\langle X, Y \rangle$ と書くことにする．

ここに現れる内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をリーマン多様体の**リーマン計量**とよぶ．

第 V 回に見たように，リーマン多様体上には**共変微分** [2] や**断面曲率**が定義される．

各点における接空間に正定値とは限らない非退化内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられた多様体を**擬リーマン多様体**，とくに内積の符号が $(*, 1)$ のときを**ローレンツ多様体**とよぶ [3]．

この講義では，リーマン多様体や擬リーマン多様体の一般論は扱わず，特別なリーマン多様体の具体例を挙げる．リーマン多様体の一般論（リーマン幾何学）は第 3, 4 クォーターの幾何学特論 C1/D1 で扱う．

■ ユークリッド空間　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は，各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ と同一視してユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えることで，リーマン多様体となる．とくに，$\mathbb{R}^n$ の標準的な座標 $(x^1, \dots, x^n)$ を考えると，この

[*] 2017 年 5 月 16 日 (2017 年 5 月 23 日訂正)

[1] リーマン多様体：a Riemannian manifold. リーマン計量：a Riemannian metric

[2] リーマン接続 the Riemannian connection, レヴィ・チヴィタ接続 the Levi-Civita connection ともよばれる．

[3] 擬リーマン多様体：a pseudo-Riemannian manifold; ローレンツ多様体：a Lorentzian manifold.

座標から定まる基底ベクトル場

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$$

は正規直交系となる．言い換えれば

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$

すなわち

$$\langle\ ,\ \rangle = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 \tag{6.1}$$

と表すことができる．とくにリーマン計量の成分 g_{ij} は座標 x^j の値によらない定数だから，(5.12) のクリストッフェル Γ_{ij}^k はすべて 0 になる．このことから，断面曲率 $K(\Pi_{\mathrm{P}})$ が，接空間の 2 次元部分空間 Π_{P} によらず恒等的に 0 となることがわかる．

一般に，次のことが知られている：

事実 6.1. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の点 P の近傍で，リーマン計量が (6.1) の形になるような局所座標系 $(x^1, \dots, x^n)$ が存在するための必要十分条件は，P の近傍で断面曲率が恒等的に 0 となることである．

証明はフロベニウスの定理の簡単な応用問題である．第 2 クォーターの幾何学特論 B1 で少しコメントする．

■ 球面　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$S^n(k) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \frac{1}{k} \right\} \tag{6.2}$$

を考える．ただし k は正の定数である．第 III 回の記号（式 (3.3) 参照）を用いれば，$S^n(k) = Q_{1/k}$ である．とくに $1/k > 0$ としているので，$S^n(k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ のなめらかな超曲面を与える．とくに誘導計量を考えれば $S^n(k)$ は リーマン多様体と見なすことができる．

点 $\boldsymbol{x}$ における単位法線ベクトルは $\nu\sqrt{k}\boldsymbol{x}$ となるので，ワインガルテン作用素 W は

$$W(\boldsymbol{v}) = -\sqrt{k}\boldsymbol{v} \qquad \left(\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}S^n(k) = \boldsymbol{x}^{\perp}\right)$$

で与えられる．

したがって，第二基本形式の定義（第 V 回）と「驚異の定理」の高次元版（定理 5.10）から，

定理 6.2. 正の定数 k に対して (6.2) で定義される $S^n(k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ のコンパクトな部分多様体である．さらに，任意の点 $\boldsymbol{x} \in S^n(k)$ における $T_{\boldsymbol{x}}S^n(k)$ の 2 次元部分空間 $\Pi_{\boldsymbol{x}}$ に関する断面曲率は

$$K(\Pi_{\boldsymbol{x}}) = k$$

となる．

この $S^n(k)$ を，**曲率 k の n 次元球面**，とくに $S^n := S^n(1)$ を n **次元単位球面**という [4]．

■ **双曲空間**　ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の部分集合

$$(6.3)\quad H^n(-k) := \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t(x^0, x^1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\frac{1}{k}, x^0 > 0 \right\}$$

を考える．ただし k は正の定数である．第 III 回の記号（式 (3.3) 参照）を用いれば，$H^n(-k)$ は $Q_{-1/k}$ のうち x^0 座標が正の部分である [5]．とくに $1/k > 0$ としているので，$H^n(-k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ のなめらかな超曲面を与える．とくに問題 III-1 で見たように，誘導計量は正定値なので $H^n(-k)$ はリーマン多様体と見なすことができる．

点 $\boldsymbol{x}$ における単位法線ベクトルは $\nu = \sqrt{k}\boldsymbol{x}$ となるので，ワインガルテン作用素 W は

$$W(\boldsymbol{v}) = -\sqrt{k}\boldsymbol{v} \qquad \left(\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}}S^n(k) = \boldsymbol{x}^{\perp}\right)$$

[4] 曲率 k の n 次元球面：the n-sphere of (sectional) curvature k; n 次元単位球面：the unit n-sphere.

[5] 二葉双曲面 $Q^{-1/\sqrt{k}}$ の点 $(x^0, \dots, x^n)$ は $|x^0| \geqq 1/\sqrt{k}$ を満たすので，$x^0 > 0$ の部分と $x^0 < 0$ の部分に別れる．これらの部分はそれぞれ連結である．

で与えられる．したがって，第二基本形式の定義（第 V 回）と「驚異の定理」の高次元版（定理 5.11）から，

定理 6.3. 正の定数 k に対して (6.3) で定義される $H^n(-k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の連結かつ非コンパクトな部分多様体である．さらに，任意の点 $\boldsymbol{x} \in H^2(-k)$ における $T_{\boldsymbol{x}}H^n(-k)$ の 2 次元部分空間 $\Pi_{\boldsymbol{x}}$ に関する断面曲率は

$$K(\Pi_{\boldsymbol{x}}) = -k$$

となる．

この $H^n(-k)$ を，**曲率 $-k$ の n 次元双曲空間**，とくに $H^n := H^n(-1)$ を n **次元双曲空間**という [6]．

球面と双曲空間は断面曲率一定なリーマン多様体である．事実 6.1 に対応して次が成り立つ．

事実 6.4. 正の実数 k に対して，断面曲率が一定値 k（$-k$）を持つ n 次元リーマン多様体 M は，局所的には $S^n(k)$（$H^n(-k)$）に等長的である．すなわち，M の任意の点 P に対して P の近傍 U と，リーマン計量をたもつ単射 $f\colon U \to S^n(k)$ $(f\colon U \to H^n(-k))$ が存在する．

事実 6.1 と同様に事実 6.4 もフロベニウスの定理の応用として示すことができる（幾何学特論 B1）．

■ **測地線と完備性**　（擬）ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}_t$ の非退化な超曲面 M の単位法線ベクトルを ν とすると，

$$\mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}M \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}$$

なる直交直和分解が存在する．すなわち，任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_t = T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^{n+1}_t$ は

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} \qquad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} \in T_{\mathrm{P}}M, \quad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}$$

と一意的に分解できる．とくに，内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を用いれば

$$(6.4)\qquad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, \nu \rangle \nu, \qquad [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{v}]^{\mathrm{N}} = \boldsymbol{v} - \varepsilon \langle \boldsymbol{v}, \nu \rangle \nu$$

[6] 曲率 k の n 次元双曲空間：the n dimensional hyperbolic space of (sectional) curvature k, the hyperbolic n-space of curvature k; n 次元双曲空間：the hyperbolic n-space.

で与えられる．ここで $\varepsilon = \langle \nu, \nu \rangle = \pm 1$ である．

超曲面 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}_t$ 上のパラメータ付けられた C^∞-曲線

$$\gamma\colon \mathbb{R} \supset I \ni t \longmapsto \gamma(t) \in M \subset \mathbb{R}^{n+1}_t$$

を考える．ただし I は数直線上の区間である．各 $t \in I$ に対して

$$\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) \in T_{\gamma(t)}M$$

を曲線 γ の t における**速度ベクトル**[7] という．とくに，至るところで速度ベクトルが零ベクトルにならない曲線を**正則曲線**[8] という．

加速度ベクトル $\ddot\gamma(t)$ は超曲面の接ベクトルになるとは限らない．そこで，超曲面に接する部分を

$$\frac{\nabla}{dt}\dot\gamma(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) := [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} \in T_{\gamma(t)}M \tag{6.5}$$

と書き，$\dot\gamma$ の（曲線の方向への）**共変微分**という．

補題 6.5. 超曲面[9] 上の曲線 γ に対して

$$\frac{d}{dt}\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle = 2\left\langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right\rangle$$

が成り立つ．

証明． 速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は $T_{\gamma(t)}M$ に含まれるから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle &= 2\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle = 2\left\langle [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}} + [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{N}}, \dot\gamma(t)\right\rangle \\ &= 2\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle = 2\left\langle [\ddot\gamma(t)]^{\mathrm{T}}, \dot\gamma(t)\right\rangle = 2\left\langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\right\rangle.\end{aligned}$$

□

第 V 回で述べた共変微分 ∇ は M 上ベクトル場の微分であったが，ここでの微分は曲線上で定義されたベクトルの微分となっている．超曲面 M の局所座標系 $(u^1, \dots, u^n)$ を用いて M を $f(u^1, \dots, u^n)$ とパラメータ表示して，

$$\gamma(t) = f\big(u^1(t), \dots, u^n(t)\big)$$

[7] 速度ベクトル：the veolocity vector; 加速度ベクトル：the acceleration vector.
[8] 正則曲線：a regular curve.
[9] ここでは（擬）ユークリッド空間の超曲面に対して証明するが，一般にリーマン多様体，擬リーマン多様体でも補題 6.5 は成り立つ．

と表すと，

$$\dot\gamma = \sum_{j=1}^n \frac{du^j}{dt}\frac{\partial f}{\partial u^j} \tag{6.6}$$

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d^2u^j}{dt^2} + \sum_{k,l=1}^n \Gamma^j_{kl}\frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt}\right)\frac{\partial f}{\partial u^j} \tag{6.7}$$

となる．ここで Γ^j_{kl} は式 (5.12) で与えたクリストッフェル記号の $\gamma(t)$ における値を表す．このように $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ は，曲線の局所座標とクリストッフェル記号のみを用いて表示できるので，超曲面の内的概念であり，リーマン多様体上の概念と見なすことができる．

定義 6.6. リーマン多様体上の曲線 γ が**測地線**であるとは[10]，$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ が恒等的に零ベクトルとなることである．また，$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ が γ と一次従属であるとき，γ は**準測地線**であるという．

定義 6.6 は擬リーマン多様体に対しても有効だが，ここでは深入りしない．測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存するが，準測地線であることは，パラメータのとり方によらない．

補題 6.7. リーマン多様体 M 上の測地線 $\gamma(t)$ に対して

$$\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle$$

は t によらず一定である．

証明． 補題 6.5 から，測地線なら $(d/dt)\langle \dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 0$. □

命題 6.8. リーマン多様体上の正則曲線 γ が準測地線であるとき，γ のパラメータを適切にとりなおして測地線にすることができる．

証明． 曲線 γ の定義域 I 上に t_0 を一つとって固定し，

$$s(t) := \int_{t_0}^t \langle \dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau)\rangle^{1/2}\, d\tau\colon I \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6.8}$$

[10] 測地線：a geodesic；準測地線：a pregeodesic.

とおくと，$\dot\gamma \neq \mathbf{0}$（正則性）と計量が正定値であることから

$$ds/dt = \langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2} > 0.$$

したがって $s\colon I \to s(I)$ は微分同相写像を与えている．そこで，逆関数 $t = t(s)$ を考え $\tilde\gamma(s) = \gamma\bigl(t(s)\bigr)$ とおくと

$$\tilde\gamma'(s) := \frac{d\tilde\gamma}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{ds/dt}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}}$$

である．このことから $\tilde\gamma$ の速度ベクトル $\tilde\gamma'(s)$ の大きさは 1 であることがわかる [11]．さらに微分して [12]，

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tilde\gamma'}\tilde\gamma' &= \left[\frac{d}{ds}\tilde\gamma'\right]^{\mathrm{T}} = \left[\frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\tilde\gamma'\right]^{\mathrm{T}} = \frac{dt}{ds}\left[\frac{d}{dt}\frac{\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}}\right]^{\mathrm{T}}\\
&= \frac{dt}{ds}\left[\frac{\ddot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}} - \frac{\langle\dot\gamma,\ddot\gamma\rangle\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{3/2}}\right]^{\mathrm{T}} = \frac{dt}{ds}\left(\frac{[\ddot\gamma]^{\mathrm{T}}}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}} - \frac{\left\langle[\ddot\gamma]^{\mathrm{T}},\dot\gamma\right\rangle\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{3/2}}\right)\\
&= \frac{dt}{ds}\left(\frac{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}} - \frac{\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma\rangle\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

ここでもとの曲線 γ は準測地線と仮定していたので $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \sigma(t)\dot\gamma$ となる関数 $\sigma(t)$ が存在する．したがって，

$$\nabla_{\tilde\gamma'}\tilde\gamma' = \frac{dt}{ds}\left(\frac{\sigma\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{1/2}} - \frac{\langle\sigma\dot\gamma,\dot\gamma\rangle\dot\gamma}{\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle^{3/2}}\right) = \mathbf{0}$$

となり，$\tilde\gamma$ は測地線になることがわかる． □

閉区間 $I := [a,b]$ で定義されたリーマン多様体 $(M,\langle\ ,\ \rangle)$ 上の曲線 $\gamma(t)$ の**長さ** [13] とは

(6.9) $$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle^{1/2}\,dt$$

のことである．とくに M 上の 2 点 P, Q を結ぶ区分的になめらかな曲線全体を $\mathcal{C}_{\mathrm{P,Q}}$ と書くとき

(6.10) $$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) := \inf_{\gamma\in\mathcal{C}_{\mathrm{P,Q}}}\mathcal{L}(\gamma)$$

[11] 速度ベクトルが単位ベクトルとなるような曲線のパラメータ s を弧長パラメータという．

[12] 本当はきちんと「内的」に計算すべきだが，簡単のため，超曲面における計算をした．

[13] 長さ：length.

を P, Q の**距離**という．

事実 6.9. 連結なリーマン多様体 M 上に (6.10) により $d\colon M\times M\to\mathbb{R}$ を定義すると

- d は M 上の距離関数を与える．
- 距離 d から定まる M の位相は，M に多様体として与えれた位相と一致する．
- 曲線 $\gamma\colon[a,b]\to M$ の長さ $\mathcal{L}(\gamma)$ が $d(\gamma(a),\gamma(b))$ と一致するならば，γ のパラメータを適当に変更すれば測地線となる．

常微分方程式の一般論から，次のことがわかる：

定理 6.10. リーマン多様体 M 上の点 P とベクトル $\boldsymbol{v}\in T_{\mathrm{P}}M$ に対して，正の実数 ε と測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ で

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(0) = \mathrm{P}, \qquad \dot\gamma_{\boldsymbol{v}}(0) = \boldsymbol{v}$$

を満たすものがただひとつ存在する．

証明． 点 P のまわりの局所座標 $(u^1,\dots,u^n)$ をとる．この座標系で表示された曲線 $\gamma(t) = (u^1(t),\dots,u^n(t))$ が測地線であるための必要十分条件は，(6.7) より

(6.11) $$\frac{d^2u^j}{dt^2} + \sum_{k,l=1}^n \Gamma_{kl}^j\frac{du^k}{dt}\frac{du^l}{dt} = 0 \qquad (j = 1,\dots,n)$$

が成り立つことである．さらに点 P の座標を $(u_0^1,\dots,u_0^n)$ として，ベクトル [14]

$$\boldsymbol{v} = v^1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_{\mathrm{P}} + \cdots + v^n\left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_{\mathrm{P}}$$

とすると，条件 $\gamma(0) = \mathrm{P}$, $\dot\gamma(0) = \boldsymbol{v}$ は

(6.12) $$u^j(0) = u_0^j, \qquad \frac{du^j}{dt}(0) = v^j$$

と同値．クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は $(u^1,\dots,u^n)$ の関数だから，式 (6.11) は n 個の 1 変数関数 $u^j(t)$ に関する 2 階の正規型常微分方程式なので，$t = 0$ で初期条件 (6.12) を満たす解がただ一つ存在する（常微分方程式の基本定理）． □

[14] $(\partial/\partial u^j)_{\mathrm{P}}$ は局所座標系から誘導される $T_{\mathrm{P}}M$ の標準基底を表す．M が $\mathbb{R}_t^{n+1}$ の超曲面である場合は，はめ込み $f\colon M\to\mathbb{R}_t^{n+1}$ の微分 $\partial f/\partial u^j$ と思ってよい．

定義 6.11. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ が**完備**[15] であるとは，任意の測地線が区間 $(-\infty, +\infty)$ で定義されていることである．

リーマン多様体の完備性は多様体のさまざまな性質と関係がある：

事実 6.12 (ホップ・リノーの定理)**.** 連結なリーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ に対して次は同値である．

- $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ は定義 6.11 の意味で完備である．
- M 上のある点 P を出発する全ての測地線が $(-\infty, \infty)$ で定義される．
- 式 (6.10) で定義された距離関数 d が完備な距離を与える．
- M 上の任意の発散する道[16] の長さが無限大．
- M の距離 d に関する任意の有界集合は相対コンパクト．

さらに，$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ が完備ならば，M 上の 2 点 P, Q を結ぶ測地線で，長さが $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ となるものが存在する．

例 6.13 (ユークリッド空間における測地線)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ をリーマン多様体とみなし，標準座標系を局所座標ととると，クリストッフェル記号はすべて 0 になる．したがって，測地線の方程式 (6.11) は $d^2u^j/dt = 0$ $(j = 1, \dots, n)$ となり $u^j(t)$ は t に関する一次式，すなわち，測地線は

$$\gamma(t) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}$$

の形をしている．すなわち，速度 $\boldsymbol{v}$ が一定であるような直線である．この式は $t \in \mathbb{R}$ で意味をもつから，ユークリッド空間は完備である．とくに 2 点を結ぶ線分の長さが距離を与えている． $\diamondsuit$

例 6.14 (球面の測地線)**.** 簡単のため単位球面 $S^n = S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を考えよう．点 P を，球面の中心（原点）からの位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ と同一視する．ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}S^n$ は $\boldsymbol{p}$ に直交するベクトルである．とくに $\boldsymbol{v}$ を単位ベクトル（$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1$）にとると，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$ で正規直交系をなす．そこで，

$$\gamma(t) = (\cos t)\boldsymbol{p} + (\sin t)\boldsymbol{v}$$

[15] 完備：complete.
[16] 曲線 $\gamma\colon [0, \infty) \to M$ が**発散する道** divergent path であるとは，M の任意のコンパクト集合 K に対して，ある数 t_K が存在して $\gamma([t_k, \infty))$ が $M \setminus K$ に含まれることである．

とおくと，次のことが成り立つ：

- $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$，すなわち $\gamma(t)$ は S^n 上の曲線である．
- $\ddot{\gamma}(t) = -\gamma(t)$, すなわち $\ddot{\gamma}(t)$ は点 $\gamma(t)$ で球面の接空間に直交する．
- $\gamma(0) = \boldsymbol{p}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v}$.
- γ の像 $\gamma(\mathbb{R})$ は球面 S^n と，原点をとおり $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}\}$ ではられる平面との共通部分である．

このような，球面と，その中心を通る平面との共通部分として得られた円を**大円**という[17]．一般の半径の球面の，単位速さとは限らない測地線も具体的に表示でき，(問題 VI-1）その定義域は $\mathbb{R}$ 全体なので，$S^n(k)$ は完備である[18]． $\diamondsuit$

例 6.15 (双曲空間の測地線)**.** 簡単のため $H^n = H^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ を考えよう．点 P を位置ベクトル $\boldsymbol{p}$ と同一視する．ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}H^n$ は $\boldsymbol{p}$ に直交するベクトル（空間的ベクトル）である．とくに $\boldsymbol{v}$ を単位ベクトル（$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 1$）にとると，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{v}$ で正規直交系をなす．そこで，

$$\gamma(t) = (\cosh t)\boldsymbol{p} + (\sinh t)\boldsymbol{v}$$

とおくと，次のことが成り立つ：

- $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -1$，すなわち $\gamma(t)$ は H^n 上の曲線である．
- $\ddot{\gamma}(t) = \gamma(t)$, すなわち $\ddot{\gamma}(t)$ は点 $\gamma(t)$ で双曲空間の接空間に直交する．
- $\gamma(0) = \boldsymbol{p}$, $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{v}$.
- γ の像 $\gamma(\mathbb{R})$ は双曲空間 H^n と，原点をとおり $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}\}$ ではられる平面との共通部分である．

$\diamondsuit$

定理 6.16. 双曲空間 $H^n(-k)$ は完備である．

[17] 大円：a great circle.
[18] 実は S^n はコンパクトなので，事実 6.12 から完備性は自動的に従う．

■ **空間形**

定義 6.17. 断面曲率が一定で完備なリーマン多様体のことを**空間形**または**リーマン空間形**という[19].

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$，球面 $S^n(k)$，双曲空間 $H^n(-k)$ はいずれも空間形である.

事実 6.18. 連結かつ単連結な空間形は $\mathbb{R}^n$，$S^n(k)$，$H^n(-k)$ のいずれかである.

[19] 空間形：a space form；リーマン空間形：a Riemannian space form.

問　題　VI

VI-1 球面 $S^n(k)$ の点 $\boldsymbol{p}$ における速度が $\boldsymbol{v} \in T_{\mathrm{P}}S^n(k)$ となる測地線を具体的に表示しなさい.

VI-2 例 6.15 を確かめなさい.

VI-3
- 球面 $S^n = S^n(k)$ の 2 点 P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ としたとき，P, Q の距離は
$$d(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \arccos k \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle$$
であることを示しなさい.
- 双曲空間 $H^n(-k)$ の 2 点間の距離を求める公式を作りなさい.
- わが町大岡山（北緯 35.607472 度，東経 139.685610 度）と華の都パリ（北緯 48.858582 度，東経 2.294438 度）の地球（球面とみなす）上での距離を求めなさい.

VII. 等長変換・モデル

(2017 年 5 月 30 日訂正)

■ **等長変換**　リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ のあいだの写像 $f\colon M \to M'$ が**等長写像**である [1] とは，任意の $\mathrm{P} \in M$ と $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in T_{\mathrm{P}}M$ に対して

$$\langle df(\boldsymbol{v}), df(\boldsymbol{w})\rangle' = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle$$

が成り立つ，すなわち f の微分写像が内積を保つことである．

補題 7.1. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の次元が等しいとき，等長写像 $f\colon M \to M'$ は局所微分同相，すなわち，任意の $\mathrm{P} \in M$ に対して P の M における近傍 U が存在して $f|_U\colon U \to f(U)$ が微分同相写像になる．

証明． 各点 P に対して $(df)_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}M \to T_{f(\mathrm{P})}M'$ は内積を保つ線形写像である．とくに

$$\langle (df)_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x}), (df)_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{x})\rangle' = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$$

なので $(df)_{\mathrm{P}}$ の核は零空間．したがって $(df)_{\mathrm{P}}$ は単射．さらに $T_{\mathrm{P}}M$ と $T_{f(\mathrm{P})}M'$ は同じ次元を持つので，次元定理より $(df)_{\mathrm{P}}$ は全射であることがわかる．すなわち微分写像が全単射であるから，P の近傍で微分同相である．□

補題 7.2. 等長写像は共変微分を保つ．すなわち，写像 $f\colon M \to M'$ がリーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の間の等長写像ならば，M の任意のベクトル場 X, Y に対して

$$\nabla'_{df(X)} df(Y) = df(\nabla_X Y)$$

が成り立つ．ただし ∇ と ∇' はそれぞれ $(M, \langle\ ,\ \rangle)$, $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の共変微分である．

*) 2017 年 5 月 23 日

1) 等長写像：an isometry.

証明． 簡単のため M と M' が同じ次元を持つ場合を考える [2] とくに $\mathrm{P} \in M$ の近傍 U で $f|_U$ は微分同相写像を与えている．とくに P の近傍の座標系と $f(\mathrm{P})$ の近傍の座標系で共通のものをとることができる．とくに f の等長性から，計量の成分 (g_{ij}) (超曲面の場合は式 (5.8))，それらからきまるクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k （式 (5.12)）は共通なので，それらから定まる共変微分も共通である．□

測地線の方程式 (6.11) も共変微分（クリストッフェル記号）から決まるから，次がわかる：

系 7.3. 写像 $f\colon M \to M'$ がリーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(M', \langle\ ,\ \rangle')$ の間の等長写像ならば，M の任意の測地線 γ に対して $f \circ \gamma$ は M' の測地線となる．

定義 7.4. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ からそれ自身への微分同相写像 f で等長写像となっているものを $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の**等長変換**という．

定義から次はすぐにわかる（問題 VII-1）：

補題 7.5. リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の等長変換全体は写像の合成に関して群をなす．

補題 7.5 の群を，リーマン多様体 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ の**等長変換群**という [3][4]．

■ **擬直交行列**　空間型の等長変換群を特定するために，擬直交行列の復習をしておこう．正の整数 n と整数 $0 \leqq t \leqq n$ に対して

$$\mathrm{O}(n,t) := \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t A J_{n-t,t} A = J_{n-t,t} \right\} \qquad J_{n-t,t} = \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_{n-t} \end{pmatrix}$$

を**擬直交行列群**，その要素を擬直交行列とよぶ．ただし $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ は実数を成分とする n 次正方行列全体の集合である．

2) この講義で必要なのは $\dim M = \dim M'$ の場合のみ．そうでない場合は M' の部分集合 $f(U)$ に制限して考えればよい．

3) 等長変換群：the isometry group.

4) ここでは深入りしないが，等長変換群には位相空間の構造を与えることができ，とくに単位元を含む連結成分はリー群，すなわち群構造に加えて多様体の構造をもつ．この講義では，空間型の等長変換群を考えるが，これは具体的に表示でき，多様体の構造も入れることができる（注意**??** 参照）ので，以上のことは深入りしない．

事実 7.6.

- 擬直交行列の行列式は ± 1 である．とくに
$$\mathrm{SO}(n,t) := \{A \in \mathrm{O}(n,t) \mid \det A = 1\}$$
は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群である．
- $t \geqq 1$ のとき，擬直交行列の左上の $t \times t$ 行列の行列式の絶対値は 1 以上である．とくに，$t = 1$ のときは一番左上の成分の絶対値が 1 以上である．
$$\mathrm{O}_+(n,t) := \left\{A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n,t) \,\middle|\, \det A_{11} \geqq 1\right\}$$
は $\mathrm{O}(n,t)$ の部分群となる（問題 II-2 参照）．ただし，A_{11}, A_{22} はそれぞれ t 次，$(n-t)$ 次の正方行列である．

とくに $\mathrm{O}(n,t)$ には $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次元多様体の構造が入り，群演算（積と逆）は C^∞-級写像を与えている．すなわち $\mathrm{O}(n,t)$ はリー群である．

事実 7.7. リー群 $\mathrm{O}(n,t)$ は連結でない．とくに

- $t = 0$ のとき，$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(n,0)$ の単位元を含む連結成分は $\mathrm{SO}(n)$ である．
- $t \geqq 1$ のとき $\mathrm{O}(n,t)$ は，行列式，左上の小行列式の符号によって 4 つの連結成分にわかれる．とくに，単位元を含む連結成分は $\mathrm{SO}(n,t) \cap \mathrm{O}_+(n,t)$ である．

擬直交行列の定義から，次のことがわかる：

補題 7.8. 正方行列 A が $\mathrm{O}(n,t)$ の要素であるための必要十分条件は $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots \boldsymbol{a}_n)$ を列ベクトルに分解したとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n_t$ の正規直交基底をなす，すなわち
$$\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle = \begin{cases} -1 & (1 \leqq j = k \leqq t) \\ +1 & (t+1 \leqq j = k \leqq n) \\ \ \ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$
となることである．

補題 7.9. 擬直交行列 $A \in \mathrm{O}(n,t)$ の転置 ${}^tA$ も $\mathrm{O}(n,t)$ の要素である．

証明． 仮定より $J{}^tAJA = \mathrm{id}$ ($J = J_{n-t,t}$, id は単位行列) だから $A^{-1} = J{}^tAJ$ が成り立つ．とくに $\mathrm{id} = AA^{-1} = AJ{}^tAJ$ なので，両辺に右から J をかけると，$AJ{}^tA = J$ となる． □

これらを合わせると次が得られる．

系 7.10. 正方行列 A が $\mathrm{O}(n,t)$ の要素であるための必要十分条件は，A の行ベクトル（の転置）が正規直交基底をなすことである．

補題 7.11. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の時間的列ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n)$ と行列 $A \in \mathrm{O}(n+1,1)$ に対して
$${}^t(y_0, \dots, y_n) := A\boldsymbol{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
と書くと，
$$\operatorname{sgn} y_0 = \operatorname{sgn} x_0 \operatorname{sgn} a_{00} \qquad \left(\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \\ \ \ 0 & (x = 0) \end{cases}\right)$$
である．とくに x_0 と y_0 が同符号をもつための必要十分条件は $A \in \mathrm{O}_+(n+1,1)$ となることである．

証明． 行列 A の最初の行からなる行ベクトルの転置 $\boldsymbol{a} := {}^t(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n})$ は $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = -1$ を満たしている．
$$\boldsymbol{a} = a_{00}\boldsymbol{e}_0 + \vec{a}, \qquad \boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e}_0 + \vec{x} \qquad (\boldsymbol{e}_0 = {}^t(1,0,\dots,0))$$
と分解しておけば，$-1 = -a_{00}^2 + |\vec{a}|^2$，また，$\boldsymbol{x}$ が時間的であることから $-x_0^2 + |\vec{x}|^2 < 0$．したがって

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n \\
&= a_{00}x_0 + \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \geqq a_{00}x_0 - |\vec{a}|\,|\vec{x}| = a_{00}x_0 - \sqrt{a_{00}^2 - 1}|\vec{x}| \\
&> a_{00}x_0 - \sqrt{a_{00}^2 - 1}|x_0| \geqq a_{00}x_0 - |a_{00}|\,|x_0|, \\
y_0 &\leqq a_{00}x_0 + |\vec{a}|\,|\vec{x}| = a_{00}x_0 + \sqrt{a_{00}^2 - 1}|\vec{x}| \\
&< a_{00}x_0 + \sqrt{a_{00}^2 - 1}|x_0| \leqq a_{00}x_0 + |a_{00}|\,|x_0|
\end{aligned}$$

が成り立つ．このことから結論が得られる．ここで，空間的ベクトル $\vec{x}, \vec{a}$ に対するシュワルツの不等式を用いた． □

■ **擬直交変換**　内積（一般に正定値とは限らない，非退化内積）$\langle\ ,\ \rangle$ をもつベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ で

$$\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V)$$

を満たすものを**擬直交変換**という．擬直交行列の定義から，次は明らか：

補題 7.12. 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n_t$ の変換

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad A \in \mathrm{O}(n,t)$$

は擬直交変換で，$\mathbb{R}^n_t$ の擬直交変換はこの形のものに限る．

■ **ユークリッド空間の等長変換**

補題 7.13. 直交行列 $A \in \mathrm{O}(n)$ と定ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の変換

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

は等長変換である．

証明. 写像 f の逆写像は $f^{-1}(\boldsymbol{y}) = A^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})$ で与えられるので f は全単射．以下，f が等長写像であることを示す．点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ における写像 f の微分写像 $(df)_{\boldsymbol{x}}$ は

$$(df)_{\boldsymbol{x}}X = AX \qquad (X \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n)$$

と表される．実際，$\gamma(0) = \boldsymbol{x}$, $\dot\gamma(0) = X$ となるような $\mathbb{R}^n$ の曲線 γ をとると，

$$(df)_{\boldsymbol{x}}X = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\circ\gamma(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (A\gamma(t) + \boldsymbol{b}) = A\dot\gamma(0) = AX.$$

したがって，

$$\langle (df)_{\boldsymbol{x}}X, (df)_{\boldsymbol{x}}Y \rangle = \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle .$$

すなわち f は等長変換である． □

したがって，$\mathbb{R}^n$ の等長変換群は $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(A \in \mathrm{O}(n))$ の形の写像全体を含む．次の定理から，実は等長変換はこの形に限る：

定理 7.14. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の等長変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \qquad A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

と書ける．

証明. 等長変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，$\boldsymbol{b} := f(\boldsymbol{0})$ とおき，$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}$ とおくと，$\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}$ は等長変換であり（補題 7.13），等長変換の合成はまた等長変換である（補題 7.5）から，g は等長変換で，とくに $g(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を満たす．この写像 g の原点における微分写像

$$(dg)_{\boldsymbol{0}}\colon T_{\boldsymbol{0}}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

は内積を保つ線形写像（直交変換）なので，

$$(dg)_{\boldsymbol{0}}X = A\boldsymbol{x} \qquad A \in \mathrm{O}(n)$$

となる行列 A が存在する．そこで $h(\boldsymbol{x}) := A^{-1}g(\boldsymbol{x})$ とおく．すると，A^{-1} も直交行列だから，h は $\mathbb{R}^n$ の直交変換で，

$$h(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \qquad (dh)_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{id} \tag{7.1}$$

を満たしている．以下，h が恒等写像であることを示そう．原点 $\boldsymbol{0}$ を初速度 $\boldsymbol{v}$ で出発する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = t\boldsymbol{v}$$

と書ける（補題 6.13）．ここで，等長変換 h により測地線は測地線に移されるから（補題 7.3），$\tilde\gamma = h\circ\gamma$ はまた測地線である．とくに (7.1) から $\tilde\gamma(0) = \boldsymbol{0}$, $\dot{\tilde\gamma}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{v}$ が成り立つ．すなわち $\tilde\gamma(t)$ は $\gamma(t)$ と同じ初期条件を満たす測地線だから，

$$h(t\boldsymbol{v}) = \tilde\gamma(t) = \gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = t\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ．とくに $t = 1$ とすれば

$$h(\boldsymbol{v}) = \tilde\gamma(1) = \gamma_{\boldsymbol{v}}(1) = \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

となり，h が恒等写像であることがわかる．すなわち

$$\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{x}) = A^{-1}g(\boldsymbol{x}) = (A^{-1})(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b})$$

だから $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ である． □

■ 双曲空間　次に双曲空間の等長変換を決定しよう．双曲空間 $H^n(-k)$ は

$$H^n(-k) = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t\{(x^0, \dots, x^n)\} \in \mathbb{R}^{n+1}_1, \middle| \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\frac{1}{k},\ x^0 > 0 \right\}$$

で定義された $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の超曲面とみなしている．

補題 7.15. 行列 $A \in \mathrm{O}_+(n+1,1)$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と定めると，f は $H^n(-k)$ の等長変換を与える．ただし，

$$\mathrm{O}_+(n+1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n+1,1) \middle| a_{00} > 0 \right\}$$

である．

証明． 写像 f は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ から $\mathbb{R}^{n+1}_1$ への写像だが，定義域を $H^n(-k)$ に制限すると，$f(H^n(-k)) = H^n(-k)$ で，微分同相写像 $f\colon H^n(-k) \to H^n(-k)$ を与えている．実際，$A \in \mathrm{O}(n+1,1)$ から $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ に対して

$$\langle f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -\frac{1}{k}.$$

また，$\boldsymbol{x} = {}^t(x^0, \dots, x^n)$，$f(\boldsymbol{x}) = {}^t(y^0, \dots, y^n)$ とおくと $x_0 > 0$，$a_{00} > 0$ から，$y_0 > 0$ であることがわかる（補題 7.11）．したがって，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{H}^n(-k)$ であることがわかる．さらに $g(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，これが f の逆写像となるので，f は $H^n(-k)$ から自分自身への微分同相写像を与えている．

さらに，点 $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ に対して

$$(df)_{\boldsymbol{x}}X = AX \qquad X \in T_{\boldsymbol{x}}H^n(-k)$$

が成り立つ（補題 7.13 の証明参照）なので，

$$\langle (df)_{\boldsymbol{x}}X, (df)_{\boldsymbol{x}}Y \rangle = \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

となり，f が等長写像であることが示された． □

定理 7.16. 双曲空間 $H^n(-k)$ の等長変換は

$$H^n(-k) \ni \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x} \in H^n(-k) \qquad (A \in \mathrm{O}_+(n+1,1))$$

と書ける．

証明． $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底を

$$\boldsymbol{e}_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

と書くと，これらはローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の正規直交基をなしている．とくに

$$\boldsymbol{x}_0 := \frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{e}_0 \in H^n(-k)$$

となっている．与えられた等長変換 $f\colon H^n(-k) \to H^n(-k)$ による $\boldsymbol{x}_0$ の像を $\boldsymbol{y}_0 := f(\boldsymbol{x}_0)$ と書くと，

$$\boldsymbol{a}_0 := \sqrt{k}\boldsymbol{y}_0 = \sqrt{k}f(\boldsymbol{x}_0)$$

は時間的単位ベクトルである．

ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ は点 $\boldsymbol{x}_0$ における $H^n(-k)$ の接空間の正規直交基底になっている．したがって，f が等長変換であることから

$$\boldsymbol{a}_j := (df)_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_j) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

とおけば $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $T_{\boldsymbol{y}_0}H^n(-k)$ の正規直交基を与えている．特に $T_{\boldsymbol{y}_0}H^n(-k)$ は $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{a}_0/\sqrt{k}$ の直交補空間だから，$\{\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の正規直交基底を与えている．とくに $\boldsymbol{a}_0 = {}^t(a_{00}, \dots, a_{0n})$ と書くと，$\boldsymbol{a}_0/\sqrt{k} \in H^n(-k)$ から $a_{00} > 0$．したがって，これらを並べた $(n+1)$ 次正方行列

$$A := (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

は $\mathrm{O}_+(n+1,1)$ の元を与える．とくにその逆行列 A^{-1} は，各 $j = 0, 1, \dots, n$ に対して $\boldsymbol{a}_j$ を $\boldsymbol{e}_j$ に写す線形写像を与えている．そこで $g := A^{-1}f$ とおく．すると

$$g(\boldsymbol{x}_0) = A^{-1}\boldsymbol{y}_0 = A^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{a}_0\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}A^{-1}\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{x}_0,$$
$$(dg)_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_j) = A^{-1}(df)_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j.$$

とくに $\boldsymbol{x} \mapsto A^{-1}\boldsymbol{x}$ が等長変換であること（補題 7.15）から g は等長変換で，

$$g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0, \qquad (dg)_{\boldsymbol{x}_0} = \mathrm{id} \tag{7.2}$$

を満たしている．

ここで，時刻 $t=0$ で点 $\boldsymbol{x}_0$ を速度 $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{x}_0}H^n(-k)$ で通過する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ を考える：

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \left(\cosh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\boldsymbol{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\sinh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}.$$

系 7.3 より $\tilde{\gamma} := g \circ \gamma_{\boldsymbol{v}}$ も測地線で，(7.2) より，$t=0$ で点 $\boldsymbol{x}_0$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過することがわかる．したがって，測地線の一意性より

$$g(\gamma_{\boldsymbol{v}}(t)) = \tilde{\gamma}(t) = \gamma_{\boldsymbol{v}}(t) \tag{7.3}$$

が成り立つ．ここで，$H^n(-k)$ の完備性とホップ・リノーの定理（事実 6.12）から，任意の点 $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ に対して，$\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}$ を結ぶ測地線が存在する．すなわち，ある $\boldsymbol{v}$ と t が存在して $\boldsymbol{x} = \gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ と書ける [5] ので，対応

$$\mathbb{R} \times T_{\boldsymbol{x}_0}H^n(-k) \ni (t\boldsymbol{v}) \longmapsto \gamma_{\boldsymbol{v}}(t) \in H^n(-k)$$

は全射．したがって (7.3) から g は恒等写像でなければならない．したがって

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}) = A^{-1}f(\boldsymbol{x})$$

となり，結論が得られた． □

■ **球面**　双曲空間の場合と全く同様の議論で，次がわかる（問題 VII-3：

定理 7.17. 行列 $A \in \mathrm{O}(n+1)$ に対して，写像 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ は球面 $S^n(k) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の等長変換を与える．逆に，球面の等長変換はこの形に書ける．

■ **球面・双曲空間のモデル**　ここでは，球面・双曲空間を 1 次元高い次元の（擬）ユークリッド空間の超曲面とみなした．一方，これらの多様体の適切な座標系をとることで，外の空間を「忘れる」ことができる．

例 7.18 (球面の立体射影)**.** 球面 $S^n = S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上の「北極」$\mathrm{N} := (0,0,\dots,1)$ 「南極」$\mathrm{S} := (0,0,\dots,-1)$ を考え，

$$\pi_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1-x^{n+1}}(x^1,\dots,x^n), \qquad \pi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1+x^{n+1}}(x^1,\dots,x^n)$$

[5] この場合は，$\boldsymbol{x}$ から具体的に $\boldsymbol{v}$ と t が求まるので，ホップ・リノーの定理を持ちださなくてもよい（問題 VII-2）．

と定めると，

$$\pi_{\mathrm{N}} \colon S^n \setminus \{\mathrm{N}\} \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi_{\mathrm{S}} \colon S^n \setminus \{\mathrm{S}\} \to \mathbb{R}^n$$

は微分同相写像を与える．とくに $\mathbb{R}^n$ の標準座標 $(u^1,\dots,u^n)$ は $S^n \setminus \{\mathrm{N}\}$, $S^n \setminus \{\mathrm{S}\}$ の局所座標系を与える．この局所座標系に関する S^n の計量の表示は

$$ds^2 = \frac{4}{(1+|u|^2)^2}\left((du^1)^2 + \dots + (du^n)^2\right) \qquad |u| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (u^j)^2}$$

で与えられる [6]． ♢

例 7.19 (双曲空間の立体射影)**.** 双曲空間 $H^n = H^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n+1}_1$ に対して

$$\pi(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{1+x^0}(x^1,\dots,x^n)$$

と定めると，

$$\pi \colon H^n \to D^n = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\boldsymbol{X}| < 1\}$$

は微分同相写像を与える．とくに $\mathbb{R}^n$ の標準座標 $(u^1,\dots,u^n)$ は H^n 座標系を与える．この局所座標系に関する S^n の計量の表示は

$$ds^2 = \frac{4}{(1-|u|^2)^2}\left((du^1)^2 + \dots + (du^n)^2\right) \qquad |u| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (u^j)^2}$$

で与えられる． ♢

[6] とくに，座標系 (u^j) 上でのユークリッド的な角度と，リーマン計量 ds^2 による角度は一致する．このような座標系 $(u^1,\dots,u^n)$ を**共形座標**，共形座標が取れるようなリーマン多様体を**共形平坦**である，という．

問　題　VII

VII-1　補題 7.5 に証明を与えなさい.

VII-2　双曲空間 $H^n(-k)$ 上の点

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}{}^t(1, 0, \dots, 0)$$

と $\boldsymbol{x} \in H^n(-k)$ を結ぶ測地線の $\boldsymbol{x}_0$ における速度ベクトルを求めなさい.

VII-3　定理 7.17 を証明しなさい.

VII-4　例 7.18 の真似をして，定曲率 k の球面の共形座標を求めなさい.

VIII. ローレンツ空間形

■ ローレンツ多様体　多様体 M の次元を n とする．M の各点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}M$ に，符号数 $(n-1,n)$ の内積（ミンコフスキー内積）$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{P}}$ が与えられていて，次の意味で滑らかであるとする：

任意の C^∞-級ベクトル場 X, Y に対して次の写像は C^∞-級：

$$\langle X, Y\rangle : M \ni \mathrm{P} \longmapsto \langle X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}\rangle_{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}.$$

このとき，組 $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を**ローレンツ多様体**とよぶ [1]．

例 8.1. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^n_1$ は，各接空間を $\mathbb{R}^n_1$ と同一視すれば，ローレンツ多様体であることがわかる．◇

例 8.2. 正の整数 n と 正の実数 k に対して

$$S^n_1(k) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_1 \tag{8.1}$$

とおく．これは，第 III 回で挙げた二次曲面 $Q_{1/\sqrt{k}}$ である（式 (3.3)）．特に，$S^n_1(k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の滑らかなかつ連結な超曲面で，点 $\boldsymbol{x} \in S^n_1(k)$ における単位法線ベクトルは $\nu := \sqrt{k}\boldsymbol{x}$ である．とくに $\langle \nu, \nu\rangle = 1$ なので単位法線ベクトルは空間的．したがって，計量の接空間への制限の符号は $(n-1,1)$ となり，$S^n_1(k)$ がローレンツ多様体であることがわかる．これを**ド・ジッター空間**または**ド・ジッター時空**という [2]　◇

例 8.3. 正の整数 n と 正の実数 k に対して $\mathbb{R}^{n+1}_2$ の部分集合

$$H^n_1(-k) := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1}_2 \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{k}} \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_2 \tag{8.2}$$

とおく．すると，特に，$H^n_1(-k)$ は $\mathbb{R}^{n+1}_2$ の滑らかなかつ連結な超曲面で，点 $\boldsymbol{x} \in H^n_1(-k)$ における単位法線ベクトルは $\nu := \sqrt{k}\boldsymbol{x}$ である．とくに

*) 2017 年 5 月 30 日
[1] ローレンツ多様体：a Lorentzian manifold.
[2] ド・ジッター空間：the de Sitter space. 反ド・ジッター空間：the anti de Sitter space.

$\langle \nu, \nu\rangle = -1$．接空間は ν の直交補空間だから，定理 1.24 から計量の接空間への制限の符号は $(n-1,1)$ となり，$H^n_1(-k)$ がローレンツ多様体であることがわかる．れを**反ド・ジッター空間**または**反ド・ジッター時空**という．◇

■ ローレンツ空間形　ローレンツ多様体にはリーマン多様体と同様な方法で共変微分が定義できるので，接空間の非退化な 2 次元線形部分空間に対して**断面曲率**を定義することができる．

例 8.4. ローレンツ・ミンコフスキー空間の断面曲率は恒等的に 0 である．◇

例 8.5. ド・ジッター空間 $S^n_1(k)$ の断面曲率は恒等的に k である．これは，定理 5.11 の類似を用いれば示すことができる．◇

例 8.6. 反ド・ジッター空間 $H^n_1(-k)$ の断面曲率は恒等的に $-k$ である．◇

一方，ローレンツ多様体の共変微分の概念を用いれば，測地線も定義できる．測地線 $\gamma(t)$ に対して $\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle$ は t によらず一定なので（補題**??**），とくに $\dot\gamma$ の因果特性は測地線上で変化しない．速度ベクトルが空間的（時間的，光的）な測地線を**空間的測地線**（**時間的測地線**，**光的測地線**）という [3]

例 8.7. ローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^n_1$ の，時刻 $t=0$ で点 $\boldsymbol{p}$ を速度 $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{p}}\mathbb{R}^n_1$ で通過する測地線は

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$$

である．実際 $\ddot\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{0}$ だから $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は測地線である．

◇

例 8.8. ド・ジッター空間 $S^n_1(k)$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ （すなわち $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ となる零でないベクトル）をとり，

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle|}\,(>0)$$

とおく．このとき，時刻 $t=0$ で点 $\boldsymbol{x}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表示される：

[3] 空間的測地線：a space-like geodesic, 時間的測地線：a time-like geodesic, 光的測地線：a light-like geodesic.

- $\boldsymbol{v}$ が空間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cos\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sin\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が時間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cosh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sinh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が光的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}.$$

実際，これらの曲線 $\gamma(t) := \gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = [\ddot\gamma]^{\mathrm{T}} = [k\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

である [4]． ♢

例 8.9. 反ド・ジッター空間 $H^n_1(-k)$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ （すなわち $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ となる零でないベクトル）をとり，

$$|\boldsymbol{v}| := \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle|} (> 0)$$

とおく．このとき，時刻 $t = 0$ で点 $\boldsymbol{x}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過する測地線 $\gamma_{\boldsymbol{v}}$ は次のように表示される：

- $\boldsymbol{v}$ が空間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cosh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sinh\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が時間的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \sqrt{k}\left(\left(\cos\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{k}} + \left(\sin\sqrt{k}|\boldsymbol{v}|t\right)\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right).$$

- $\boldsymbol{v}$ が光的，すなわち $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ のとき，

$$\gamma_{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}.$$

[4] 第 VI 回で与えた超曲面の測地線の表示は，超曲面の計量が不定値であっても，非退化であれば成立する．

実際，これらの曲線 $\gamma(t) := \gamma_{\boldsymbol{v}}(t)$ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = [\ddot\gamma]^{\mathrm{T}} = [k\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

である [5]． ♢

ローレンツ多様体の任意の測地線が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるとき，ローレンツ多様体は**完備**であるという [6]．完備，断面曲率一定のローレンツ多様体を**ローレンツ空間型**とよぶ．

例 8.1 のローレンツ・ミンコフスキー空間，例 8.2 のド・ジッター空間，例 8.3 の反ド・ジッター空間はそれぞれ断面曲率 0，正，負の空間型を与えている．

[5] 第 VI 回で与えた超曲面の測地線の表示は，超曲面の計量が不定値であっても，非退化であれば成立する．

[6] ローレンツ計量は，直接距離を誘導しないので，距離空間としての完備性とここで述べた完備性の関係（ホップ・リノーの定理 **??**）はそのままの形では成立しない．