2017 年 7 月 4 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 1B （MTH.B406）講義資料 3

前回までの訂正

- 講義ノート 13 ページ，3 行目：$M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$
- 講義ノート 14 ページ，7 行目：

$$\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi} = \widetilde{X}\widetilde{\Omega}, \quad \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi} = \widetilde{X}\widetilde{\Lambda}, \quad X(\xi_0,\eta_0) = X_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi} = \widetilde{X}\widetilde{\Omega}, \quad \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \eta} = \widetilde{X}\widetilde{\Lambda}, \quad \widetilde{X}(\xi_0,\eta_0) = X_0$$

- 講義ノート 15 ページ，15 行目：$\partial X \partial v \Rightarrow \dfrac{\partial X}{\partial v}$
- 講義ノート 17 ページ，4 行目：$T_{\mathrm{P}}M \Rightarrow T_{\mathrm{P}}S$
- 講義ノート 17 ページ，6 行目：

$$\boldsymbol{w}(fg) = f(\mathrm{P})\boldsymbol{w}(f) + g(\mathrm{P})\boldsymbol{w}(g) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}(fg) = f(\mathrm{P})\boldsymbol{w}(g) + g(\mathrm{P})\boldsymbol{w}(f)$$

- 講義ノート 17 ページ，8 行目：$(V,\xi^1,\eta^1) \Rightarrow (V,\xi^1,\xi^2)$
- 講義ノート 17 ページ，14 行目：$T_{\mathrm{Q}}M \Rightarrow T_{\mathrm{Q}}S$
- 講義ノート 18 ページ，下から 8 行目：$p \Rightarrow \mathrm{P}$
- 講義ノート 19 ページ，14 行目：$(j=1,2) \Rightarrow (i,j=1,2)$
- 講義ノート 22 ページ，6 行目：式 (2.14) ⇒ 式 (2.13)
- 講義ノート 24 ページ，下から 5 行目：

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1j}^1 & \Gamma_{1j}^2 \\ \Gamma_{2j}^1 & \Gamma_{2j}^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u^j}\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{1j}^1 & \Gamma_{2j}^1 \\ \Gamma_{1j}^2 & \Gamma_{2j}^2 \end{pmatrix}$$

授業に関する御意見

- 授業が難しいと感じているのでしっかり復習しようと思います．
  山田のコメント： すみません，こちらの準備の具合かもしれません．
- 定理 2.1 の証明で曲線と曲面の付録の方法も見てみました．授業の方法の法が手順は多そうですが，個人的には好きです．
  山田のコメント： そう？ でも本質的には同じなんですよね．
- 添字と式と記号を追いかけることに大変さを感じますが，慣れたいと思っています．
  山田のコメント： 無理しないようにしましょう．
- ホモトピー楽しいです． **山田のコメント：** そうですか．

質問と回答

質問： ある種の曲率が 0 であることと，ある種の可積分条件の間には何らかの対応があるかもしれないということを前に聞きましたが，平均曲率が 0 であることはどのような可積分条件と対応するのでしょうか.

お答え： 曲面上の座標関数 (x, y, z) が（誘導計量に関するラプラシアンに対して）調和であること，平均曲率が 0 であることは同値．調和関数の方程式は，コーシー・リーマン方程式の可積分条件ですよね（時間があったら説明します）.

質問： 可積分の話は難しかったのですが，3 変数以上のときにも統一した理論はありますか?

お答え： 多変数の行列値関数についてもまったく同じ定理が成り立ちます．ステートメントを考えてみましょう.

質問： 平坦な場合，問題 II-4 から局所的には標準的なユークリッド空間とみなせるということがわかると思いますが，この他に平坦ならではの特徴はあるのでしょうか?

お答え： 測地線が一次式でかけるような座標系が存在する．簡単なので証明してみましょう.

質問： 講義ノート II, 20 ページの式 (2.9) において $X \langle Y, Z\rangle$ とありますが，どこの元なのでしょうか.

お答え： （多様体上の）関数．実際，ベクトル場 Y, Z に対して $\langle Y, Z\rangle$ は関数を与える．それを X 方向に方向微分したもの.

質問： 領域とは連結な位相空間のことでしょうか.

お答え： 位相空間 X の領域とは X の連結な開集合のことです.

質問： 行列のユークリッドノルム，行列ノルム，行列値関数のノルムと 3 つのノルムが使い分けられています.（証明したいものとかの）目的に応じてノルムの条件をみたすものが考案されたということでしょうか．たとえば行列に与えられるノルムの中で “自然なもの” と認識されるものはありますか?

お答え： 最初の 2 つと 3 つ目のものは性質が違いますね（ノルムをとる対象が違う)．ユークリッドノルムと行列ノルムは同値ですから，どちらも標準的といってよいと思います.