2017 年 7 月 11 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 1B （MTH.B406）講義資料 4

お知らせ

- 第 1 回に配布した「授業日程」の日付が間違っていました．
  第 6 回講義の日付：7 月 24 日 ⇒ 7 月 25 日（カレンダー通り）

前回までの訂正

- 講義ノート 25 ページ，補題 3.1，2 行目：$\omega^j(\boldsymbol{e})_k \Rightarrow \omega^j(\boldsymbol{e}_k)$
- 講義ノート 25 ページ，下から 6 行目：$T_{\mathrm{P}}S \Rightarrow T^*_{\mathrm{P}}S$
- 講義ノート 27 ページ，脚注 2：orthornormal ⇒ orthonormal
- 講義ノート 28 ページ，8 行目：

$$X^1\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)X^2\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad X^1\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)+X^2\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)$$

- 講義ノート 29 ページ，3 行目：$\omega^i(\boldsymbol{e}_j)=\delta^k_j \Rightarrow \omega^i(\boldsymbol{e}_j)=\delta^i_j$
- 講義ノート 29 ページ，4 行目：

$$\boldsymbol{e}_1\omega^1(\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_2\omega^2(\boldsymbol{e}_1)-\omega^1([\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_1\omega^1(\boldsymbol{e}_2)-\boldsymbol{e}_2\omega^1(\boldsymbol{e}_1)-\omega^1([\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2])$$

- 講義ノート 29 ページ，下から 9 行目：$\tilde{\mu}=\pm(\mu+d\theta) \Rightarrow \tilde{\mu}=\pm(\mu-d\theta)$
- 講義ノート 31 ページ，8 行目：$-\langle\nabla\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle \Rightarrow \langle\nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle$
- 講義ノート 32 ページ，下から 9 行目：$-\alpha\boldsymbol{a}_2\,du+-\beta\boldsymbol{a}_2\,dv \Rightarrow -\alpha\boldsymbol{a}_2\,du-\beta\boldsymbol{a}_2\,dv$
- 講義ノート 32 ページ，下から 5 行目：$\omega:=\boldsymbol{a}_1\omega^1+\boldsymbol{a}^2\omega^2 \Rightarrow \omega:=\boldsymbol{a}_1\omega^1+\boldsymbol{a}_2\omega^2$
- 講義ノート 33 ページ，下から 5, 6 行目：$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{2}}_2\} \Rightarrow \{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$（2 箇所）
- 講義ノート 33 ページ，下から 3 行目：$d\omega^1=d\omega^2=0 \Rightarrow d\tilde{\omega}^1=d\tilde{\omega}^2=0$
- 講義ノート 33 ページ，下から 2 行目：$dx=\omega^1$, $dy=\omega^2 \Rightarrow dx=\tilde{\omega}^1$, $dy=\tilde{\omega}^2$
- 講義ノート 35 ページ，6 行目：$\partial/partialu^2 \Rightarrow \partial/\partial u^2$

授業に関する御意見

- 計算ルールを追いかけるのに大変さを感じています．析り紙（原文ママ：折り紙？）の “だまし船” をよく連想します．
  山田のコメント： 一般に「方程式が立つ」のは「だまし船」みたいな仕組みですね．一つの量を 2 つの見方で見るから等式ができるわけで．
- 前回授業後に質もに伺ったものですが，解決しました．ありがとうございます． **山田のコメント：** とくに何もしていません．
- 今ぐらいが一番面白いです． **山田のコメント：** どれくらい?

質問と回答

質問： p 26, 27 の 2 次微分形式についてですが，多様体 S の次元が n $(n \geqq 3)$ のときは，なめらかな $n-1$ 次微分形式 ω とベクトル場 $X_1, \dots, X_n$ について $d\omega(X_1,\dots,X_n) :=$ (以下略) としてこの $d\omega$ を ω の外微分と定義するのでしょうか．そうすると $d(d(\dots df))$ (n 回) $= 0$ となるのでしょうか．

お答え： 一般に n 次元多様体の k 次（$k \leqq n$）微分形式の外微分の定義が必要ですね．「多様体入門」のような書物を調べてみて下さい．いずれにせよ，一般の状況で $d(d\omega)=0$ が成り立ちます．すなわちいつでも “2 回外微分したら零”．理由は偏微分の順序交換.

質問： 向き付けられたリーマン多様体上で，接続形式 μ は同じ向きの正規直交枠に対して（完全形式の差をのぞいて）不変になると思います．つまり，μ がド・ラーム・コホモロジーの元として定まることと，ガウス曲率が 0 であることが同値になると思います．この視点から何か面白い話題がありますか? あれば教えて下さい.

お答え： 一般に μ は微分形式として大域的に定義できません．（大域的に定義されるための必要十分条件は？）ちなみに「ガウス・ボンネの定理の証明」（「曲線と曲面（改訂版）」第 13 節）をみて何か感じませんか?

質問： p. 29，下から 2 行目：$\pm d\tilde{\mu} = (\cos\theta \boldsymbol{e}_1 + \sin\theta \boldsymbol{e}_2, -\sin\theta \boldsymbol{e}_1 + \cos\theta \boldsymbol{e}_2) = \pm d\tilde{\mu}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ どうしてこの間が等号になるのかが分かりません.

お答え： 2 次微分形式の双線形性と交代性，それから $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

質問： 唯一存在する記号として ∃1 と ∃! を見たことがありますが，どちらが正しいのでしょうか?

お答え： どちらも使われるようです．なお，この記号は「略記法」で，正式な文書では使わないようです.

■授業日程（改訂版） 2017.07.11

		授業内容
06 月 13 日	1	線形常微分方程式
06 月 20 日	2	可積分条件の応用
06 月 27 日	休	休講
07 月 04 日	3	正規直交枠
07 月 11 日	4	空間形の曲面
07 月 18 日	5	曲面論の基本定理
07 月 25 日	6	空間形の平均曲率一定曲面の等長対応
08 月 01 日	7	平均曲率一定曲面の構成