2017 年 7 月 18 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 1B （MTH.B406）講義資料 5

前回までの訂正

- 講義ノート 37 ページ，4 行目：ユークリッド計量という．という．次の ⇒ ユークリッド計量という．次の
- 講義ノート 40 ページ，1 行目：$df_{\mathrm{P}}(T_{f(\mathrm{P})}S) \Rightarrow df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$
- 講義ノート 40 ページ，12 行目（(4.4) 式）：$df_{\mathrm{P}}(X_{\mathrm{P}}) \in \hat{X}_{\mathrm{P}} = df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \Rightarrow df_{\mathrm{P}}(X_{\mathrm{P}}) =: \hat{X}_{\mathrm{P}} \in df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$
- 講義ノート 43 ページ，3 行目から 5 行目：

$$\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= X\left\langle \hat{Y},\hat{Z}\right\rangle = \left\langle D_X\hat{Y},\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},D_XZ\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\nabla_X Y} + h(X,Y)\nu,\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},\widehat{\nabla_X Z} + h(X,Z)\nu\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\nabla_X Y},\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},\widehat{\nabla_X Z}\right\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + Y\nabla_X Z.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= X\left\langle \hat{Y},\hat{Z}\right\rangle = \left\langle D_X\hat{Y},\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},D_X\hat{Z}\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\nabla_X Y} + h(X,Y)\nu,\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},\widehat{\nabla_X Z} + h(X,Z)\nu\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\nabla_X Y},\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},\widehat{\nabla_X Z}\right\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle.
\end{aligned}$$

- 講義ノート 43 ページ，10 行目：$\nabla_X Y - \nabla_X Y = [X,Y] \Rightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$
- 講義ノート 45 ページ，8 行目：$k = -c^2 \Rightarrow k = c^2$
- 講義ノート 45 ページ，11 行目，12 行目，13 行目：$T_{f(\mathrm{P})H^3(-c^2)} \Rightarrow T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2)$
- 講義ノート 45 ページ，15 行目：$T_{\mathrm{P}}H^3(-c^2) \Rightarrow T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2)$
- 講義ノート 46 ページ，10 行目：$+c\hat{Y}D_Xf = c\hat{Y}\hat{X} \Rightarrow +c\left\langle \hat{Y},D_Xf\right\rangle + c\left\langle \hat{Y},\hat{X}\right\rangle$
- 講義ノート 47 ページ，3 行目，行列 Ω の $(3,1)$ 成分：$cg_2^2 \Rightarrow cg_1^2$

授業に関する御意見

- Levi-Civita さんは一人なのですね．日本語でレビチビタと・ドット無しで書かれているのをたまに見かけるのでそんな気はしておりました．

  山田のコメント： Tullio Levi-Civita, 1873–1941.
- 前から思っていたのですが，正規直交基底という言葉は多義的な印象を受けるので，単位直交基底と呼んだ方が良いと思いますが，どうでしょう?

  山田のコメント： 「正規」が色々な意味で使われている，ということでしょうか．Orthonormal basis の訳語ですからね . . .
- 直和分解をすると，内積を利用して抽出したい成分を取り出すのに便利であることがわかりました．

  山田のコメント： 「直交」直和分解です．直交のある・なしの違いはよいでしょうか．
- 私が不慣れなだけだと思いますが，ベクトル場に関する計算（接続形式やリーマン接続など）難しく感じます．復習して慣れようと思います．

  山田のコメント： 本当はもう少しシステマティックに導入すべきでしょうが，「曲面論の基本定理」という目的に限ったので ad hoc な扱いをしてしまっています．分かりにくいかもしれません．

質問と回答

質問： 第一基本形式という呼び方は高次元の場合でも使われますか?

お答え： はい.「誘導計量」と同じくらいは使われます．第一基本形式の代わりに誘導計量といっている文脈でも「第二基本形式」と言ったりするので，ちょっと違和感がありますね.

質問： 今回の舞台は $\mathbb{R}^3$, S^3, ^{3} 内の曲面でしたが，一般に 3 次元リーマン多様体内の 2 次曲面（原文ママ：2 次元部分多様体のことか?）や n 次元リーマン多様体内の 2 次元曲面，n 次元リーマン多様体内の k 次元曲面といったふうに一般化していくとそれぞれどのくらいまで言えるのか気になりました.

お答え： 外の空間 (ambient space) の対称性が十分高い場合はいろいろと面白い話題がありますが，一般にしてしまうと一般に「一般的なこと」しか言えません．それでも特殊な話題（極小部分多様体など）は多様体の幾何学に使えたりはするのですが.

質問： はめこまれた部分多様体に沿ったベクトル場の良い記法などありますでしょうか?

お答え： 人や本によってそれぞれですね．はめ込み $f\colon M \to N$ に対して，f^*TN で N の接束を f で引き戻したもの（M 上のベクトル束になる）を表すとき「f に沿ったベクトル場」は，その切断，すなわち $\Gamma(f^*TN)$ の元と見なすことができます.

質問： $\emptyset(n)$ のリー代数は n 次交代行列全体ですが，$\emptyset(n,p)$ のリー代数には名前がついていないのでしょうか?

お答え： 「$\emptyset(n,p)$（擬直交群）のリー代数」という名前が付いています.