2017 年 7 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 1B （MTH.B406）講義資料 6

お知らせ

- 次回，8 月 1 日が最終回となります．
- 提出物は今回が最終です．8 月 1 日には成績を報告いたします．

前回までの訂正

- 講義ノート 50 ページ，9 行目：

$$\frac{\partial g_1^1}{\partial v} - \frac{\partial g_2^1}{\partial u} = \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right], \boldsymbol{e}_1 \right\rangle + \dots \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial g_1^1}{\partial v} - \frac{\partial g_2^1}{\partial u} = \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right], \boldsymbol{e}_1 \right\rangle + \dots$$

- 講義ノート 50 ページ，下から 8 行目：$K = \dfrac{\beta_v - \alpha_u}{g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2} \Rightarrow K = \dfrac{\beta_u - \alpha_v}{g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2}$
- 講義ノート 54 ページ，4 行目：h が性質 5.7 をもつ $\Rightarrow$ h が性質 (5.7) をもつ
- 講義ノート 54 ページ，下から 4 行目：$M^3(\kappa) = S^3(1/c^2) \subset \mathbb{R}^4$ $(\kappa = 1/c^2,\ c > 0) \Rightarrow M^3(\kappa) = S^3(c^2) \subset \mathbb{R}^4$ $(\kappa = c^2,\ c > 0)$ $M^3(\kappa) = S^3(1/c^2) \subset \mathbb{R}^4$ $(\kappa = 1/c^2,\ c > 0)$
- 講義ノート 55 ページ，4 行目：Ω の (1,3)-成分：$cg_2^2 \Rightarrow cg_1^2$
- 講義ノート 55 ページ，下から 5 行目：第二基本形式を ⇒ 第二基本形式 h を
- 講義ノート 55 ページ，一番下 (5.5) 式：左辺に二乗がつく，というご指摘がありましたが，それは誤りで，印刷された式が正しいのです．
- 講義ノート 56 ページ，1 行目：曲面の**外的曲率** 4) ガウスの ... ⇒ 曲面の**外的曲率** 4) という．ガウスの ...
- 講義ノート 56 ページ，一番下：$S^3\left(\dfrac{1}{c^2}\right) \Rightarrow S^3(c^2)$
- 講義ノート 57 ページ，下から 13 行目：(??) から ω が ⇒ 補題 5.1 から ω が

授業に関する御意見

- 内的と外的曲率が入れ物によって異なるというのはとても面白いです．この授業を受けてから驚異の定理をいろいろな解釈で考えられているように感じます．
  山田のコメント： それが目標の一つかも．
- 自学に配慮された課題に助けられています．手を動かすことは大事と実感します．
  山田のコメント： そのとおりなのですが，なかなか良い問題が作れません．
- 非常に暑い．早く冬こないかなぁ　**山田のコメント：** ねぇ．

質問と回答

質問： 今回の問題のように $\mu = \alpha\,du + \beta\,dv$ の α や β を計算する場合はリーマン接続 ∇ を求めてそこから計算するしかないのでしょうか.

お答え： μ を求めることとリーマン接続を求めることは同値ですから,「リーマン接続を求めてから μ を定める」というのは今ひとつ分かりにくいですね．実際に $\nabla \boldsymbol{e}_j$ を求めて，ということなのでしょうが．授業できちんと説明していませんでしたが，正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の双対基底の場 $\{\omega_1, \omega_2\}$ を求めて補題 3.5 を用いれば μ が求まります（「曲線と曲面（改訂版）」第 13 節参照).

例：$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\,du\,dv + dv^2$ でリーマン計量が与えられている（問題 V-1）とき,

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\sec\frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right), \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}\csc\frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とおけば，これは正規直交基底の場を与えています．その双対基底 $\{\omega^1, \omega^2\}$ は $\omega^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$ を満たす 1 次微分形式の組だから，簡単な計算により,

$$\omega^1 = \cos\frac{\theta}{2}(du + dv), \qquad \omega^2 = \sin\frac{\theta}{2}(du - dv)$$

が双対基底の場を与えます．ここで

$$d\omega^1 = \frac{\theta_u - \theta_v}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,du \wedge dv, \quad d\omega^2 = \frac{\theta_v - \theta_u}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,du \wedge dv$$

なので，これらがそれぞれ $\omega^2 \wedge \mu$, $-\omega^1 \wedge \mu$ となるような微分形式を見つければよい.

質問： 授業で説明されていたのを聞き逃してしまったのですが，$df = (g_1^1\boldsymbol{a}_1 + g_1^2\boldsymbol{a}_2)\,du + (g_2^1\boldsymbol{a}_1 + g_2^2\boldsymbol{a}_2)\,dv =: \xi$ とおいたとき，$d\xi = 0$ であれば $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ の存在を示せるということの理由は何でしょうか.

お答え： Poincaré の補題（定理 1.16).

質問： 講義ノート V，式 (5.1) の $\mu := \alpha\,du + \beta\,dv$ についてですが，α と β はどこの元なのでしょうか．補題 5.2 の式を見ると $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$ ではありそうですが.

お答え： μ は 1 次微分形式なので，α, β は (u, v) の実数値関数です．補題 5.2 をみてどうして実数でないと思ったのでしょう.

質問： 初歩的な質問で恐縮ですが，2 階対称テンソルを $A_1\,du^2 + A_2\,du\,dv + A_3\,dv^2$ と表示する方法は，反対称双線形形式を $A\,du \wedge dv$ と表示する方法に対応するものでしょうか．もし“対称”という条件を除けば $A_1\,du \cdot du + A_2\,du \cdot dv + A_3\,dv \cdot du + A_4\,dv \cdot dv$ のような表示ができるという事でよろしいでしょうか.

お答え： 後半の “·” はテンソル積の意味ですね．対称テンソルを表示するときは du と dv の対称積 $du\,dv := \frac{1}{2}(du \otimes dv + dv \otimes du)$ を用いるのが普通.「曲線と曲面（改訂版)」138 ページの脚注 7 参照.

質問： 多様体の場合,「ある命題が局所座標系のとり方によらずなり立つ」ということは「その命題は global になり立つ」と考えてよいのでしょうか?

お答え： 命題の内容にもよるのではないでしょうか.

質問： 直交直和分解と書くべきつもりのところを不用意に直和分解と書いてしまいました．以後気をつけます.

お答え： 気にしないで下さい．この講義では扱いませんが，ある種の部分多様体論では，直交でない直和分解を使う場面があるので，山田が気にしているのです.

質問： 一般的に内積が定義されている空間で直和分解がある場合には，グラム・シュミットの直交化を利用して直交直和分解ができると考えて正しいでしょうか?

お答え： どういう形の定理が考えられますか? ステートメントを書いて見ましょう.

質問： コダッチテンソルは他にどのような例がありますか?

お答え： たとえば共形平坦多様体のスカウテン・テンソル.

質問： 授業内容の参考文献を教えて下さい.

お答え：「曲線と曲面（改訂版)」第 12, 13 節と付録 B-9．その他曲面論の教科書には多かれ少なかれ説明があります.