I. 線形常微分方程式

■ 準備：行列ノルム　実数を成分とする n 次正方行列全体のなす線形空間を $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と書くとこれは n^2 次元ユークリッド空間と同一視できる．とくに，$X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ のユークリッドノルムは

$$|X|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tXX)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2} \tag{1.1}$$

で与えられる．一方，

$$|X|_{\mathrm{M}} := \sup\left\{\frac{|X\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}\,;\,\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}\right\} \tag{1.2}$$

とおく．ただし，右辺の $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドノルムである．

補題 1.1. 次が成り立つ：

(1) $|X|_{\mathrm{M}}$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ のノルムを与える．

(2) 行列 $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して $|XY|_{\mathrm{M}} \leqq |X|_{\mathrm{M}}\,|Y|_{\mathrm{M}}$ が成り立つ．

(3) 行列 $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ から得られる半正定値対称行列 ${}^tXX$ の最大の固有値を $\lambda\ (\geqq 0)$ とすると，$|X|_{\mathrm{M}} = \sqrt{\lambda}$.

(4) $(1/\sqrt{n})|X|_{\mathrm{E}} \leqq |X|_{\mathrm{M}} \leqq |X|_{\mathrm{E}}$.

(5) 写像 $|\cdot|_{\mathrm{M}}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は連続.

証明. 商 $|X\boldsymbol{v}|/|\boldsymbol{v}|$ は $\boldsymbol{v}$ をスカラ倍しても不変だから，$|X|_{\mathrm{M}} = \sup\{|X\boldsymbol{v}|\,;\,\boldsymbol{v} \in S^{n-1}\}$，ただし S^{n-1} は $\mathbb{R}^n$ の単位球面である．写像 $S^{n-1} \ni \boldsymbol{x} \mapsto |A\boldsymbol{x}| \in \mathbb{R}$ はコンパクト位相空間上で定義された連続関数だから，最大値をもつので，式 (1.2) の右辺は実数を一つ定める．これがノルムの性質 [1] と性質 (2) を満たすことは容易にわかる．

行列 $A := {}^tXX$ は半正定値対称行列なので，固有値 $\lambda_j\ (j = 1, \dots, n)$ は非負実数．とくに，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基 $[\boldsymbol{a}_j]$ で $A\boldsymbol{a}_j = \lambda_j \boldsymbol{a}_j$ となるものを取ることができる．いま，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + v_n\boldsymbol{a}_n$ と表すと，λ を最大の固有値として

$$\langle X\boldsymbol{v}, X\boldsymbol{v}\rangle = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2 \leqq \lambda\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$$

[*] 2017 年 06 月 13 日 (2017 年 6 月 20 日訂正)

[1] 零でない X に対して $|X|_{\mathrm{M}} > 0$，$|\alpha X|_{\mathrm{M}} = |\alpha|\,|X|_{\mathrm{M}}$，三角不等式.

が成り立つ．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積．この不等式は $\boldsymbol{v}$ が λ-固有ベクトルのときに等号を満たすので，(3) が成り立つ．一方，ユークリッドノルム (1.1) は直交行列による共役 $X \mapsto {}^tPXP\ (P \in \mathrm{O}(n))$ によって不変だから，${}^tXX$ を直交行列 P で対角化すれば $|X|_{\mathrm{E}} = \sqrt{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ なので，(4) が得られる．このことから，ノルム $|\cdot|_{\mathrm{E}}$ と $|\cdot|_{\mathrm{M}}$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に同じ位相を定める．とくに $|\cdot|_{\mathrm{M}}$ はユークリッド位相に関して連続となるので (5) が得られた. □

■ 準備：行列値関数の微分　領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ から $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ への写像（行列値関数）X は

$$X\colon U \ni \boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m) \mapsto X(\boldsymbol{u}) = \bigl(x_{ij}(\boldsymbol{u})\bigr)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

のように n^2 個の実数値関数 $x_{ij}(\boldsymbol{u})$（X の**成分**という）を用いて表すことができる．式 (1.3) の写像 X が C^∞-**級**（連続）であるとはすべての成分が C^∞-級（連続）であることとする．C^∞-級写像 $X(\boldsymbol{u})$ の各成分を u_j で偏微分して得られる行列値関数を X の u_j に関する偏導関数といって $\partial X/\partial u_j$ と書く．高階の偏導関数も同様に定義できる．

補題 1.2. 領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ で定義された C^∞-級写像 $X, Y\colon U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して，次が成り立つ.

(1) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial u_j}(XY) = \frac{\partial X}{\partial u_j}Y + X\frac{\partial Y}{\partial u_j}$,

(2) $\displaystyle \frac{\partial}{\partial u_j}\det X = \mathrm{tr}\left(\widetilde{X}\frac{\partial X}{\partial u_j}\right)$,

(3) 各 $\boldsymbol{u}$ で $X(\boldsymbol{u})$ が正則ならば，$\displaystyle \frac{\partial}{\partial u_j}X^{-1} = -X^{-1}\frac{\partial X}{\partial u_j}X^{-1}$.

ただし $\widetilde{X}$ は X の余因子行列を表す.

証明. 行列の積の定義と積の微分公式から (1) が成り立つ．また $' = \partial/\partial u_j$ と書けば

$$O = (\mathrm{id})' = (X^{-1}X)' = (X^{-1})X' + (X^{-1})'X$$

から (3) を得る．ただし id は n-次単位行列.

行列 X を列ベクトルに分解して $X = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ と表すと，行列式が n 個の列ベクトルに対する n 重線形形式であることから [2]

$$(\det X)' = \det(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n) + \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2', \dots, \boldsymbol{x}_n) + \dots + \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n')$$

[2] 積の微分公式の証明を思い出すと，このことは容易に示すことができる.

となる．右辺の各項の，微分を含む列に関する余因子展開をすれば (2) が成り立つことがわかる． □

命題 1.3. 行列値の C^∞-級関数 $X(t)$ と $\Omega(t)$ が

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)\Omega(t), \qquad X(t_0) = X_0 \tag{1.4}$$

を満たしてるならば，

$$\det X(t) = (\det X_0)\exp\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}\Omega(\tau)\,d\tau \tag{1.5}$$

を満たす．とくに $X_0 \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ なら，すべての t に対して $X(t) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ である [3]．

証明． 補題 1.2 の (2) から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det X(t) &= \operatorname{tr}\left(\widetilde{X}(t)\frac{dX(t)}{dt}\right) = \operatorname{tr}\left(\widetilde{X}(t)X(t)\Omega(t)\right)\\ &= \operatorname{tr}\bigl(\det X(t)\Omega(t)\bigr) = \det X(t)\operatorname{tr}\Omega(t).\end{aligned}$$

ここで X の余因子行列 $\widetilde{X}$ は $\widetilde{X}X = X\widetilde{X} = (\det X)\,\mathrm{id}$ をみたすことを用いた．したがって，式 (1.5) の右辺を $\rho(t)$ と書くと $\frac{d}{dt}\bigl(\rho(t)^{-1}\det X(t)\bigr) = 0$, とくに $\det X(t) = k\rho(t)$ (k は定数) と書けるが，$X(t_0) = X_0$ から $k = \det X_0$ がわかる． □

系 1.4. 式 (1.4) において $\operatorname{tr}\Omega(t)$ が恒等的に零なら $\det X(t)$ は一定である．とくに $X_0 \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ なら X は $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ に値をとる関数となる [4]．

命題 1.5. 式 (1.4) において $\Omega(t)$ が交代行列すなわち ${}^t\Omega + \Omega = O$ が成り立っているとする．$X_0 \in \mathrm{O}(n)$ ($X_0 \in \mathrm{SO}(n)$)，すなわち X_0 が直交行列（行列式が 1 であるような直交行列）ならば，各 t に対して $X(t) \in \mathrm{O}(n)$（$X(t) \in \mathrm{SO}(n)$）である．

[3] $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,;\,\det A \neq 0\}$: 一般線形群; the general linear group.
[4] $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,;\,\det A = 1\}$: 特殊直交群; the special lienar group.

証明． 積の微分公式（補題 1.2 の (1)）から

$$\frac{d}{dt}(X\,{}^tX) = \frac{dX}{dt}{}^tX + X\,{}^t\!\left(\frac{dX}{dt}\right) = X\Omega\,{}^tX + X\,{}^t\Omega\,{}^tX = X(\Omega + {}^t\Omega){}^tX = O.$$

したがって $X\,{}^tX$ は一定なので，

$$X(t)\,{}^tX(t) = X(t_0)\,{}^tX(t_0) = X_0\,{}^tX_0 = \mathrm{id}\,.$$

すなわち ${}^tX(t) = X(t)^{-1}$ なので $X(t)$ は直交行列．直交行列の行列式は ± 1 なので，初期値 X_0 の行列式が $+1$ なら連続性から $\det X(t) = 1$． □

■ 準備：行列値関数のノルム 閉区間 $I = [a,b]$ で定義された連続関数 $X\colon I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 全体の集合を $C^0(I,\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ と書く．実数 k を固定したとき，$X \in C^0(I,\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ に対して，

$$||X||_{I,k} := \sup\left\{e^{-kt}|X(t)|_{\mathrm{M}}\,;\, t \in I\right\} \tag{1.6}$$

と定める．

補題 1.6. $||\cdot||_{I,k}$ は $C^0(I,\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ の完備なノルムを与える．

証明． 定数 k が 0 のときは通常の一様ノルム（完備なノルム）を与える．その場合の証明を真似ればよい． □

■ 線形常微分方程式の基本定理 ここでは，この講義で用いる形での基本定理を述べ，証明を与える．

命題 1.7. 区間 I で定義された C^∞-級行列値関数 $\Omega(t)$ と $t_0 \in I$ に対して，I 上で定義された C^∞-級関数 $X(t) = X_{t_0,\mathrm{id}}(t)$ で

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)\Omega(t), \qquad X(t_0) = \mathrm{id} \qquad (\mathrm{id}\text{ は }n\text{ 次の単位行列}) \tag{1.7}$$

を満たすものがただ一つ存在する．

証明． まず，一意性を示す．$X(t), Y(t)$ が (1.7) を満たしているとするとき，

$$Y(t) - X(t) = \int_{t_0}^{t}\bigl(Y'(\tau) - X'(\tau)\bigr)\,d\tau = \int_{t_0}^{t}\bigl(Y(\tau) - X(\tau)\bigr)\Omega(\tau)\,d\tau$$

が成り立つ．したがって任意の閉区間 $J \subset I$ に対して $t \in J$ なら

$$
\begin{aligned}
|Y(t)-X(t)|_{\mathrm{M}} &\leqq \left|\int_{t_0}^{t} \left|\bigl(Y(\tau)-X(\tau)\bigr)\Omega(\tau)\right|_{\mathrm{M}} d\tau\right| \\
&\leqq \left|\int_{t_0}^{t} |Y(\tau)-X(\tau)|_{\mathrm{M}}\, |\Omega(\tau)|_{\mathrm{M}}\, d\tau\right| \\
&= \left|\int_{t_0}^{t} e^{-k\tau}\, |Y(\tau)-X(\tau)|_{\mathrm{M}}\, e^{k\tau}\, |\Omega(\tau)|_{\mathrm{M}}\, d\tau\right| \\
&\leqq ||Y-X||_{J,k} \sup_J |\Omega|_{\mathrm{M}} \left|\int_{t_0}^{t} e^{k\tau}\, d\tau\right| \\
&= ||Y-X||_{J,k} \frac{\sup_J |\Omega|_{\mathrm{M}}}{|k|} e^{kt} \left|1-e^{-k(t-t_0)}\right|
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$J=[t_0,a]$, $k=2\sup_J |\Omega|_{\mathrm{M}}$ として $t \geqq t_0$ に注意すれば

$$
||Y-X||_{J,k} \leqq \frac{1}{2} ||Y-X||_{J,k}
$$

となり， $||Y-X||_{J,k}=0$，したがって J 上で $Y=X$ となることがわかる．同様に，t_0 の左側の区間 $J'=[a,t_0]$ 上では，$t<t_0$ なので，$k=-2\sup_J |\Omega|_{\mathrm{M}}$ ととれば $Y=X$ となることがわかる．とくに J, J' のとり方は任意だったから，I 上で $Y=X$ となり一意性が示された．

次に存在を示す．区間 $J=[t_0,a] \subset I$ 上で関数列 $\{X_j\}$ を次で定義する：

$$
X_0(t)=\mathrm{id}, \qquad X_{j+1}(t)=\mathrm{id}+\int_{t_0}^{t} X_j(\tau)\Omega(\tau)\, d\tau \quad (j=0,1,2,\dots). \tag{1.8}
$$

ここで $k=2\sup_J |\Omega|_{\mathrm{M}}$ とおいて

$$
\begin{aligned}
|X_{j+1}(t)-X_j(t)| &\leqq \int_{t_0}^{t} |X_j(\tau)-X_{j-1}(\tau)|_{\mathrm{M}} |\Omega(\tau)|_{\mathrm{M}}\, d\tau \\
&\leqq e^{kt} ||X_j-X_{j-1}||_{J,k} \frac{\sup_J |\Omega|_{\mathrm{M}}}{k} = \frac{e^{kt}}{2} ||X_j-X_{j-1}||_{J,k},
\end{aligned}
$$

したがって $||X_{j+1}-X_j||_{J,k} \leqq \frac{1}{2}||X_j-X_{j-1}||_{J,k}$．ゆえに関数列 $\{X_j\}$ は，ノルム $||\cdot||_{J,k}$ に関するコーシー列となり，完備性（補題 1.6）からある $X \in C^0(J,\mathrm{M}_n)$ に収束することがわかる．漸化式 (1.8) から，この極限関数 X は

$$
X(t_0)=\mathrm{id}, \qquad X(t)=\mathrm{id}+\int_{t_0}^{t} X(\tau)\Omega(\tau)\, d\tau
$$

を満たすが，X が連続であることから，微積分の基本定理より $X'(t)=X(t)\Omega(t)$ $('=d/dt)$ を満たすことがわかる．区間 J は任意に取れるから，$I \cup \{t \geqq t_0\}$ における解の存在がわかった．点 t_0 の左側の区間でも同様に解の存在を示すことができる．

ここまでで，(1.7) を満たす微分可能な関数 $X(t)$ が存在することがわかった．

最後に X が C^∞-級であることを示す．$X'(t)=X(t)\Omega(t)$ なので X の導関数は連続．したがって X は C^1-級．ゆえに $X(t)\Omega(t)$ は C^1-級なので，$X'(t)$ は C^1-級．したがって $X(t)$ は C^2-級．この議論を繰り返せば $X(t)$ は任意の r に対して C^r-級であることがわかる． □

系 1.8. 区間 I 上の行列値 C^∞-級関数 $\Omega(t)$，$t_0 \in I$，$X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して，I 上で定義された行列値 C^∞-級 $X(t)=X_{t_0,X_0}(t)$ で

$$
\frac{dX(t)}{dt}=X(t)\Omega(t), \qquad X(t_0)=X_0 \tag{1.9}
$$

を満たすものがただひとつ存在する．とくに $X_{t_0,X_0}(t)$ は X_0 と t の関数とみなしたときに C^∞-級である．

証明． 記号の混乱を避けるため，命題 1.7 で得られた $X(t)$ を $Y(t)=X_{t_0,\mathrm{id}}(t)$ と書きなおす．

$$
X(t) := X_0 Y(t) = X_0 X_{t_0,\mathrm{id}}(t) \tag{1.10}
$$

と定めると，これは結論を満たす．逆に $X(t)$ が結論を満たすとする．命題 1.3 から各 t に対して $Y(t)$ は正則行列を与えるので，

$$
W(t) := X(t)Y(t)^{-1}
$$

とおけば，公式 (3) から

$$
\frac{dW}{dt}=\frac{dX}{dt}Y^{-1}-X(t)Y^{-1}\frac{dY}{dt}Y^{-1}=X\Omega Y^{-1}-XY^{-1}Y\Omega Y^{-1}=O.
$$

すなわち $W(t)$ は定行列：

$$
W(t)=W(t_0)=X(t_0)Y(t_0)^{-1}=X_0
$$

なので，Y は (1.10) と一致し，一意性が示せた． □

命題 1.9. 区間 I で定義された C^∞-級行列値関数 $\Omega(t)$，$B(t)$，$t_0 \in I$ および $X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して，I 上で定義された C^∞-級関数 $X(t)$

$$
\frac{dX(t)}{dt}=X(t)\Omega(t)+B(t), \qquad X(t_0)=X_0 \tag{1.11}
$$

を満たすものがただ一つ存在する．

証明． 命題 1.7 の解を $Y(t) := X_{t_0,\mathrm{id}}(t)$ と書く．このとき，

$$X(t) = \left(X_0 + \int_{t_0}^{t} B(\tau)Y^{-1}(\tau)\,d\tau\right)Y(t) \tag{1.12}$$

とおけば，X は (1.11) を満たす．逆に X が (1.11) を満たすならば，$W := XY^{-1}$ とすると $X = WY$ だから

$$X' = W'Y + WY' = W'Y + WY\Omega, \qquad X\Omega + B = WY\Omega + B$$

なので，$W' = BY^{-1}$ を満たす．とくに $W(t_0) = X_0$ だから，

$$W = X_0 + \int_{t_0}^{t} B(\tau)Y^{-1}(\tau)\,d\tau$$

となり (1.12) を得る． □

定理 1.10. 区間 I と領域 $U \subset \mathbb{R}^m$ の直積 $I \times U$ 上で定義された C^∞-級行列値関数 $\Omega(t,\boldsymbol{\alpha})$，$B(t,\boldsymbol{\alpha})$（$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$）が与えられているとき，$t_0 \in I$, $\boldsymbol{\alpha} \in U$, $X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $X(t) = X_{t_0,X_0,\boldsymbol{\alpha}}(t)$ で

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)\Omega(t,\boldsymbol{\alpha}) + B(t,\boldsymbol{\alpha}), \qquad X(t_0) = X_0 \tag{1.13}$$

を満たすものがただ一つ存在する．さらに

$$I \times I \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times U \ni (t,t_0,X_0,\boldsymbol{\alpha}) \mapsto X_{t_0,X_0,\boldsymbol{\alpha}}(t) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

は C^∞-級写像である．

証明． あたらしい行列値関数 $\widetilde{\Omega}(t,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) := \Omega(t+t_0,\boldsymbol{\alpha})$，$\widetilde{B}(t,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = B(t+t_0,\boldsymbol{\alpha})$ と未知関数の変換 $\widetilde{X}(t) := X(t+t_0)$ を用いれば，方程式 (1.13) は

$$\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = \widetilde{X}(t)\widetilde{\Omega}(t,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}), \qquad \widetilde{X}(0) = X_0, \qquad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} := (t_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) \tag{1.14}$$

と書き換えられる．各 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ に対して，方程式 (1.14) の解 $\widetilde{X}(t) = \widetilde{X}_{\mathrm{id},X_0,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}}$ が唯一存在することは命題 1.9 からわかるので，パラメータ $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ に関する微分可能性を確かめればよい．ここで $Z(t)$ を

$$\frac{dZ}{dt} = Z\widetilde{\Omega} + \widetilde{X}\frac{\partial\widetilde{\Omega}}{\partial\alpha_j}, \qquad Z(0) = O \tag{1.15}$$

の唯一の解とすると，$Z = \partial\widetilde{X}/\partial\alpha_j$ が成り立つ（問題 I-2）．とくに，命題 1.9 の証明から

$$Z = \frac{\partial\widetilde{X}}{\partial\alpha_j} = \left(\int_0^t \widetilde{X}(\tau)\frac{\partial\widetilde{\Omega}(\tau,\tilde{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial\alpha_j}Y^{-1}(\tau)\,d\tau\right)Y(t)$$

が成り立つ．ただし $Y(t)$ は $Y'(t) = Y(t)\widetilde{\Omega}(t,\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$, $Y(0) = \mathrm{id}$ を満たす唯一の行列値関数．この形から Y は $(t,\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ に関する C^∞-級関数であることがわかる． □

■ 応用：空間曲線の基本定理　応用として，空間曲線の基本定理を示そう[5)]．区間 $I \in \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ が正則曲線である，とは $\dot{\gamma} \neq \mathbf{0}$ が I 上で成立することである．このとき，パラメータを適切に取り替えれば $\gamma'(s)$ が単位ベクトルとなるようにできる．ただし $' = d/ds$．この s を**弧長パラメータ**という．弧長パラメータ s で表示された空間曲線が $\gamma''(s) \neq \mathbf{0}$ を満たしているとする．このとき，

$$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s), \qquad \boldsymbol{n}(s) := \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \qquad \boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e(s)} \times \boldsymbol{n}(s)$$

とすると，$\{\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\}$ は各 s ごとに $\mathbb{R}^3$ の正の向きの正規直交基底を与えている．これを**フルネ枠**[6)] という．これらのベクトルを列ベクトルとみなして並べると，

$$\mathcal{F}(s) := (\boldsymbol{e}(s),\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{b}(s)) \in \mathrm{SO}(3) \tag{1.16}$$

となる．この s の関数 $\mathcal{F}$ をフルネ枠ということもある．

以上の状況で，

$$\kappa(s) := |\gamma''(s)| > 0, \qquad \tau(s) := -\left\langle \boldsymbol{b}'(s),\boldsymbol{n}(s)\right\rangle$$

とおき，これらをそれぞれ曲線 γ の**曲率**，**捩率**という[7)]．これらを用いると

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

5) 詳細は，梅原・山田「曲線と曲面（改訂版）」，第 5 節.
6) フルネ枠：the Frenet frame.
7) 曲率：the curvature；捩率：the torsion.

が成り立つ．

命題 1.11. 空間曲線の曲率・捩率は $\mathbb{R}^3$ の変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$）で不変である．逆に弧長によってパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma_1(s)$, $\gamma_2(s)$ が共通の曲率，捩率を持つならば，$\gamma_2 = A\gamma_1 + \boldsymbol{b}$（$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$）が成り立つ．

証明． 空間曲線 γ_1 の曲率を κ, τ，フルネ枠を $\mathcal{F}_1$ とする．直交行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\gamma_2 = A\gamma_1 + \boldsymbol{b}$ のフルネ枠は $\mathcal{F}_2 = A\mathcal{F}_1$ となる．したがって，$\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ は同じ方程式 (1.17) を満たすので，γ_1 と γ_2 は共通の曲率，捩率をもつ．

逆に γ_1，γ_2 が共通の曲率，捩率を持つならば，フルネ枠 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$ はともに (1.17) を満たす．ここで $\mathcal{F}$ を (1.17) の $\mathcal{F}(t_0) = \mathrm{id}$ をみたす唯一の解とすると，系 1.8 の証明から $\mathcal{F}_j(t) = \mathcal{F}_j(t_0)\mathcal{F}(t)$ $(j = 1, 2)$ と表されることがわかる．とくに $\mathcal{F}_j \in \mathrm{SO}(3)$ だから，$\mathcal{F}_2(t) = A\mathcal{F}_1(t)$ $(A := \mathcal{F}_2(t_0)\mathcal{F}_1(t_0)^{-1} \in \mathrm{SO}(3))$ と書ける．この等式の第一列から $\gamma_2'(s) = A\gamma_1'(t)$ なので，これを積分して結論が得られた． □

定理 1.12 (空間曲線の基本定理)**.** 区間 I で定義された C^∞-級関数 $\kappa(s)$, $\tau(s)$ が与えられていて，I 上で $\kappa(s) > 0$ とすると，弧長をパラメータとする曲線 $\gamma(s)$ で曲率と捩率がそれぞれ κ，τ となるものが存在する．さらにこのような曲線は $\mathbb{R}^3$ の変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ （$A \in \mathrm{SO}(3)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$）で写り合うものを同一視すれば唯一である．

証明． 一意性は命題 1.11 で示した．存在を示す：$\Omega(s)$ を (1.17) のように定義し，$\mathcal{F}(s)$ を (1.17) と $\mathcal{F}(s_0) = \mathrm{id}$ を満たす解とする．Ω は交代行列だから，命題 1.5 から $\mathcal{F}(s) \in \mathrm{SO}(3)$ が分かる．そこで $\mathcal{F}$ の列ベクトルを $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ とし，

$$\gamma(s) := \int_{s_0}^{s} \boldsymbol{e}(\sigma)\, d\sigma$$

とすると $\mathcal{F}$ は γ のフルネ枠で，κ, τ はそれぞれ γ の曲率，捩率である（問題 I-3） □

■ 線形偏微分方程式系の可積分条件　領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-級行列値関数 $\Omega(u,v)$，$\Lambda(u,v)$ が与えられているとき，$(u_0, v_0) \in U$ を固定して，行列値関数 $X(u,v)$ を未知関数とする偏微分方程式系の初期値問題

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X\Omega, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = X\Lambda, \qquad X(u_0, v_0) = X_0 \tag{1.18}$$

を考える．

命題 1.13. 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の行列値関数 $X(u,v)$ が (1.18) を満たすとき，$X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が正則行列なら，U 上の各点で X は正則行列である．とくに Ω, Λ が交代行列かつ $X_0 \in \mathrm{SO}(n)$ なら $X \in \mathrm{SO}(n)$ が U 上で成り立つ．

証明． 領域 U は連結なので，任意の $(u,v) \in U$ に対して，(u_0, v_0) と (u,v) を結ぶ連続曲線 γ が存在する：

$$\gamma\colon [0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \in U, \qquad \gamma(0) = (u_0, v_0), \quad \gamma(1) = (u,v).$$

とくに γ の像はコンパクトだから，有限個の U に含まれる円板で覆うことができる．とくに各円板内で γ を修正することにより γ は C^∞-級の曲線であるとしてよい．

このとき $\widetilde{X}(t) := X \circ \gamma(t) = X\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ とおくと，(1.18) より

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = \widetilde{X}\left(\frac{du}{dt}\Omega + \frac{dv}{dt}\Lambda\right), \qquad \widetilde{X}(0) = X_0$$

を満たす．したがって，命題 1.3 から $\widetilde{X}(1)$ の行列式は零でない．(u,v) は任意なので X は正則行列に値をとる関数である．後半は命題 1.5 から従う． □

補題 1.14. 正則行列に値をもつ行列値関数 $X\colon U \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ が (1.18) を満たすならば，

$$\Omega_v - \Lambda_u = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega \tag{1.19}$$

が成り立つ．

証明． 式 (1.18) の第一式を v で，第二式を u で微分すると

$$X_{uv} = X_v\Omega + X\Omega_v = X(\Lambda\Omega + \Omega_v), \quad X_{vu} = X_u\Lambda + X\Lambda_u = X(\Omega\Lambda + \Lambda_u).$$

この 2 つは等しいから X が正則であることと合わせて，結論を得る． □

等式 (1.19) を (1.18) の**可積分条件**，**適合条件**[8] この講義は次の定理の応用が中心となる：

定理 1.15. 単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-級行列値関数 $\Omega(u,v)$, $\Lambda(u,v)$ が (1.19) を満たすとする．このとき，任意の $(u_0, v_0) \in U$ と $X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して (1.18) を満たす C^∞-級行列値関数 $X\colon U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ で $X(u_0, v_0) = X_0$ となるものが唯一存在する．

証明は次回紹介する[9]．

[8] 可積分条件：the integrability condition；適合条件：the compatibility condition.
[9] 詳細は，梅原・山田「曲線と曲面（改訂版）」付録 B-9.

■ 応用：ポアンカレの補題

定理 1.16 (ポアンカレの補題)**.** 単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の 1 次微分形式

$$\omega = \alpha(u,v)\,du + \beta(u,v)\,dv$$

が閉形式，すなわち $d\omega = 0$ を満たすならば，U 上の C^∞-級関数 f で $df = \omega$ となるものが存在する．このような f は定数の差を除いて一意的である．

証明． 外微分の定義から $d\omega = (\beta_u - \alpha_v)\,du \wedge dv$ となるので，仮定は $\beta_u - \alpha_v = 0$ と同値．ここで，1×1-行列値関数 $\xi(u,v)$ を未知関数とする偏微分方程式系

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \xi\alpha, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \xi\beta, \qquad \xi(u_0, v_0) = 1 \tag{1.20}$$

を考えると，閉形式であるという条件から (1.19) が満たされるので，定理 1.15 より関数 $\xi(u,v)$ で (1.20) を満たすものが存在する．とくに命題 1.3 から $\xi = \det \xi$ は零にならないことがわかる．とくに $\xi(u_0,v_0) = 1 > 0$ なので U 上で $\xi > 0$ が成り立つ．そこで $f := \log \xi$ とおくと，これが結論を満たす．

最後に，結論をみたす 2 つの関数 f, g があったならば，$d(f-g) = 0$ が成り立つので，U の連結性から $f - g$ は定数．したがって一意性が示された． □

問　題　I

I-1　次数 n の正方行列 J を

$$J := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(-1, 1, \dots, 1)$$

で定める．ただし $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ は対角成分が $a_1, \dots, a_n$ であるような対角行列を表す．さらに

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n,1) &:= \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,;\, {}^tAJA = J\} \\ \mathrm{SO}(n,1) &:= \{A \in \mathrm{O}(n,1)\,;\, \det A > 0\} \\ \mathrm{SO}_+(n,1) &:= \{A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathrm{SO}(n,1)\,;\, a_{00} > 0\} \end{aligned}$$

とする．区間 I 上で定義された C^∞-級行列値関数 $\Omega(t)$ が

$$\Omega J + J^t\Omega = O$$

を満たしているならば，$X_0 \in \mathrm{SO}_+(n,1)$ に対して，方程式 (1.13) を満たす $X(t)$ は $\mathrm{SO}_+(n,1)$ に値をとる．このことを示しなさい．

I-2　式 (1.15) の Z は $\partial\widetilde{X}/\partial\alpha_j$ と一致することを示しなさい．

I-3　定理 1.12 の証明を完成させなさい．

I-4　$\mathbb{R}^2$ の領域 U, V を

$$U := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}, \qquad V := U \setminus \{(t,0)\,;\, t \leqq 0\}$$

で定めると V は単連結領域だが U はそうではない．いま

$$\omega := \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) du + \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) dv$$

とおく．

(1)　ω が閉形式であることを示しなさい．

(2)　V 上の関数 f で $df = \omega$ となるものをひとつ求めなさい．

(3)　U 上で $df = \omega$ となる関数は存在するか．