II. 可積分条件の応用

■ フロベニウスの定理

定理 2.1. 単連結領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^∞-級行列値関数 Ω, $\Lambda\colon U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O \qquad ((u,v) \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{ の座標}) \tag{2.1}$$

を満たすならば，任意の $(u_0,v_0) \in U$ と $X_0 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対して

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X\Omega, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = X\Lambda, \qquad X(u_0,v_0) = X_0 \tag{2.2}$$

を満たす C^∞-級行列値関数 $X\colon U \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ がただ一つ存在する．さらに

- $X_0 \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ なら，各 $(u,v) \in U$ に対して $X(u,v) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.
- U の各点で $\operatorname{tr}\Omega = \operatorname{tr}\Lambda = 0$ が成り立つならば，$\det X(u,v)$ は一定．とくに $X_0 \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ なら $X(u,v) \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ が U 上で成立する．
- U の各点で ${}^t\Omega + \Omega = O$, ${}^t\Lambda + \Lambda = O$，すなわち Ω, Λ は交代行列で，$X_0 \in \mathrm{O}(n)$（$X_0 \in \mathrm{SO}(n)$）ならば $X(u,v) \in \mathrm{O}(n)$ ($X(u,v) \in \mathrm{SO}(n)$) が U 上で成り立つ．
- U の各点で $J\Omega$，$J\Lambda$ （$J = \operatorname{diag}(-1,1,\dots,1)$）が交代行列であるとき，$X_0 \in \mathrm{SO}_+(n-1,1)$ ならば $X(u,v) \in \mathrm{SO}_+(n-1,1)$ である [1]．

定理 2.1 の証明 [2] は $U = \mathbb{R}^2$ の場合を考えれば十分である．実際，次の補題 2.2 と事実 2.3 から，座標変換により $U = \mathbb{R}^2$ と置き換えればよい．

補題 2.2. 領域 V, $U \subset \mathbb{R}^2$ の間の微分同相写像 $V \ni (\xi,\eta) \mapsto (u,v) \in U$ があたえられているとする．このとき，U 上の行列値関数 $\Omega = \Omega(u,v)$, $\Lambda = \Lambda(u,v)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}(\xi,\eta) &= \Omega\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \Lambda\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial v}{\partial \xi},\\
\widetilde{\Lambda}(\xi,\eta) &= \Omega\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \Lambda\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial v}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

とおく．方程式

$$\frac{\partial X}{\partial u} = X\Omega, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = X\Lambda, \qquad X(u_0,v_0) = X_0 \tag{2.4}$$

を満たす X に対して $\widetilde{X}(\xi,\eta) = X(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ とおくと，$\widetilde{X}$ は

$$\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \xi} = \widetilde{X}\widetilde{\Omega}, \qquad \frac{\partial \widetilde{X}}{\partial \eta} = \widetilde{X}\widetilde{\Lambda}, \qquad \widetilde{X}(\xi_0,\eta_0) = X_0 \tag{2.5}$$

を満たす．ただし $\bigl(u(\xi_0,\eta_0),v(\xi_0,\eta_0)\bigr) = (u_0,v_0)$.

さらに，(2.4) の可積分条件と (2.5) の可積分条件は同値である．

証明． チェイン・ルールから単純計算で導くことができるが，次のように考えると明らか：方程式 (2.5) は

$$dX = X\Theta, \qquad \Theta := \Omega\,du + \Lambda\,dv$$

と書き，微分形式の間の等式と見なすと，この等式は座標のとり方によらない．そこで，

$$\Theta = \Omega\,du + \Lambda\,dv = \widetilde{\Omega}\,d\xi + \widetilde{\Lambda}\,d\eta$$

と表すと，一次微分形式の座標変換法則から Ω, Λ, $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{\Lambda}$ は (2.3) を満たす．ここで

$$d\Theta = (\Omega_v - \Lambda_u)\,du \wedge dv, \qquad \Theta \wedge \Theta = (\Omega\Lambda - \Lambda\Omega)\,du \wedge dv$$

に注意すると，可積分条件は 2 次微分形式の等式

$$d\Theta - \Theta \wedge \Theta = O$$

と書き換えられる．これも座標のとり方によらないので，結論が得られた． □

事実 2.3. $\mathbb{R}^2$ の単連結領域は $\mathbb{R}^2$ と微分同相である [3]．

[*] 2017 年 06 月 20 日 (2017 年 07 月 04 日訂正)
[1] $\mathrm{SO}_+(n-1,1) = \{A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,;\, {}^tAJA = \mathrm{id}, \det A = 1, a_{00} > 0\}$.
[2] 詳細は，梅原・山田「曲線と曲面（改訂版）」付録 B-9 を参照．
[3] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視すると，リーマンの写像定理より，$\mathbb{C}$ の単連結領域は $\mathbb{C}$ または単位円板と等角同値である．単位円板は $\mathbb{R}^2$ と微分同相なので事実 2.3 が得られる．

定理 2.1 の証明． 補題 2.2 と事実 2.3 から，$U=\mathbb{R}^2$，$(u_0,v_0)=(0,0)$ として一般性を失わない．

存在： まず，線形常微分方程式の基本定理（系 1.8）から，C^∞-級写像 $F\colon\mathbb{R}\to\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ で

$$\frac{dF}{du}(u)=F(u)\Omega(u,0)\qquad F(0)=X_0$$

を満たすものがただ一つ存在する．そこで，各 $u\in\mathbb{R}$ に対して，$G^u(v)$ を，線形常微分方程式

$$\frac{dG^u}{dv}(v)=G^u(v)\Lambda(u,v),\qquad G^u(0)=F(u)$$

の解とする．このとき，$X(u,v):=G^u(v)$ とおくと，これが求める解である．実際，常微分方程式の解は初期値に滑らかに依存するので $X(u,v)$ は (u,v) の C^∞-級行列値関数である．さらに，$G^u(v)$ の定義から

$$\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)=\frac{dG^u}{dv}(v)=G^u(v)\Lambda(u,v)=X(u,v)\Lambda(u,v) \tag{2.6}$$

が成り立つ．ここで，X が C^∞-級であることから，$X_{uv}=X_{vu}$ が成り立つことと，可積分条件 (2.1) から

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial X}{\partial u}-X\Omega\right)&=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\Omega-X\frac{\partial\Omega}{\partial v}\\
&=\frac{\partial}{\partial u}(X\Lambda)-\frac{\partial X}{\partial v}\Omega-X\frac{\partial\Omega}{\partial v}\\
&=\frac{\partial X}{\partial u}\Lambda+X\frac{\partial\Lambda}{\partial u}-\frac{\partial X}{\partial v}\Omega-X\frac{\partial\Omega}{\partial v}\\
&=X(\Lambda_u-\Omega_v)+\frac{\partial X}{\partial u}\Lambda-\frac{\partial X}{\partial v}\Omega\\
&=X(\Lambda_u-\Omega_v-\Lambda\Omega)+\frac{\partial X}{\partial u}\Lambda\\
&=-X\Omega\Lambda-\frac{\partial X}{\partial u}\Lambda\\
&=\left(\frac{\partial X}{\partial u}-X\Omega\right)\Lambda
\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，u を任意に固定したとき，変数 v に関する関数 $H(v):=X_u-X\Omega$ は常微分方程式

$$\frac{dH}{dv}(u,v)=H(u,v)\Lambda(u,v)$$

を満たすことがわかる．ここで $v=0$ とすると

$$\begin{aligned}
H(u,0)&=X_u(u,0)-X(u,0)\Omega(u,0)=(G^u)_u(u,0)-G^u(0)\Omega(u,0)\\
&=F'(u)-F(u)\Omega(u,0)=O
\end{aligned}$$

なので，常微分方程式の解の一意性から $H(u,v)=0$ が成り立つ．(u,v) は任意だから

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)=X(u,v)\Omega(u,v)$$

が成り立ち，$X(u,v)$ が結論を満たすことがわかった．

一意性： 初期条件 X_0 が零行列のとき，方程式 (2.2) の解 $X(u,v)$ が恒等的に零行列であることを示す．ここで $(u_0,v_0)=(0,0)$ としていたので $X(0,0)=O$ である．このとき，任意の $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\gamma(t)=(tu,tv)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とすると $\gamma(t)$ は原点を始点，(u,v) を終点とする $\mathbb{R}^2$ の線分を与えている．これに対して $F(t):=X(tu,tv)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t)&=uX_u(tu,tv)+vX_v(tu,tv)\\
&=X(tu,tv)(u\Omega(tu,tv)+v\Lambda(tu,tv))=F(t)\omega(t)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\omega(t)=u\Omega(tu,tv)+v\Lambda(tu,tv)$ である．これを F に関する常微分方程式と見なすと初期条件 $F(0)=X(0,0)=O$ より（解の一意性から）$F(t)$ は恒等的に零行列．とくに $X(u,v)=F(1)=O$ がわかる．ここで (u,v) は任意だったから X は恒等的に零．そこで (2.2) の 2 つの解 X, Y に対して $Z(u,v)=X(u,v)-Y(u,v)$ とおくと，これは，$X_0=O$ に関する (2.2) を満たすので Z は恒等的に零行列．したがって $X=Y$ となり一意性がわかる． □

■ 2 次元リーマン多様体のガウス曲率　定理 2.1 の応用を説明するために，2 次元リーマン多様体の性質をまとめておく [4]．

以下，S は 2 次元多様体，$\mathrm{P}\in S$ で $(U;u,v)$ を P を含む S の座標近傍とする．場合によっては座標系 (u,v) の代わりに，添字（上付き添字）を用いて (u^1,u^2) と書く．S (U) 上の C^∞-級関数全体の集合を $C^\infty(S)$ （$C^\infty(U)$）と書く．

□ 接空間と接ベクトル　このとき S の各点 P における接空間 $T_\mathrm{P}S$ は $\{(\partial/\partial u)_\mathrm{P},(\partial/\partial v)_\mathrm{P}\}$ で生成される 2 次元線形空間である．ここで $(\partial/\partial u)_\mathrm{P}$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_\mathrm{P}:C^\infty(U)\ni f\longmapsto\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{P})\in\mathbb{R}$$

[4] 詳細は，梅原・山田「曲線と曲面（改訂版）」第 3 章．

で与えられる線形写像である．一般に，接ベクトル $\boldsymbol{w}=a(\partial/\partial u)_{\mathrm{P}}+b(\partial/\partial v)_{\mathrm{P}}$ と P の近傍で定義された関数 f に対して

$$\boldsymbol{w}(f):=a\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\mathrm{P}}f+b\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\mathrm{P}}f$$

と定義する [5]．このことから $\boldsymbol{w}\in T_{\mathrm{P}}S$ は関数に作用する微分作用素と見なすことができる．積の微分公式から

$$\boldsymbol{w}(fg)=f(\mathrm{P})\boldsymbol{w}(g)+g(\mathrm{P})\boldsymbol{w}(f)\qquad(f,g\in C^\infty(U)) \tag{2.7}$$

が成り立つ．

点 P を含む異なる座標系 $(V;\xi,\eta)=(V;\xi^1,\xi^2)$ に対して，変換公式

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\mathrm{P}}&=\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)(\mathrm{P})\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)_{\mathrm{P}}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)(\mathrm{P})\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)_{\mathrm{P}}\\ \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\mathrm{P}}&=\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)(\mathrm{P})\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)_{\mathrm{P}}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)(\mathrm{P})\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)_{\mathrm{P}},\end{aligned}$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{\mathrm{P}}=\sum_{k=1}^2\left(\frac{\partial\xi^k}{\partial u^j}\right)(\mathrm{P})\left(\frac{\partial}{\partial\xi^k}\right)_{\mathrm{P}}\qquad(j=1,2) \tag{2.8}$$

が成り立つ．

□ **ベクトル場** 点 P の近傍 U 上の各点 Q に対して $X_{\mathrm{Q}}\in T_{\mathrm{Q}}S$ を対応させる規則を**ベクトル場**という．とくに $f\in C^\infty(U)$ に対して $(Xf)(\mathrm{Q})=X_{\mathrm{Q}}(f)$ により U 上の関数 Xf が定義される．任意の $f\in C^\infty(U)$ に対して Xf が C^∞-級となるとき，ベクトル場 X は C^∞-級であるという．この講義では，とくに断らない限り，ベクトル場は C^∞-級であるとする．とくに Q に対して $(\partial/\partial u)_{\mathrm{Q}}$ を対応させるベクトル場を $\partial/\partial u$ と書く．すると，座標近傍 $(U;u,v)=(U;u^1,u^2)$ 上のベクトル場 X は

$$X=X^1\frac{\partial}{\partial u}+X^2\frac{\partial}{\partial v}=\sum_{k=1}^2X^k\frac{\partial}{\partial u^k}\qquad(X^j\in C^\infty(U),j=1,2)$$

の形に表される．

[5] すなわち u 方向の方向微分．多様体上では「方向微分」を「微分する方向」と同一視することにより，接ベクトルを定義する．

□ **括弧積** 2 つの C^∞-級ベクトル場 X,Y と C^∞-級関数 f に対して，Xf, Yf はともに C^∞-級関数なので，これらにそれぞれ Y,X を作用させることができる．

$$X=X^1\frac{\partial}{\partial u}+X^2\frac{\partial}{\partial v},\qquad Y=Y^1\frac{\partial}{\partial u}+Y^2\frac{\partial}{\partial v}$$

と表されているとき，

$$\begin{aligned}X(Yf)&=X\left(Y^1f_u+Y^2f_v\right)=X^1\left(Y^1f_u+Y^2f_v\right)_u+X^2\left(Y^1f_u+Y^2f_v\right)_v\\ &=X^1Y^1_uf_u+X^1Y^2_uf_v+X^2Y^1_vf_u+X^2Y^2_vf_v\\ &\qquad+X^1Y^1f_{uu}+X^1Y^2f_{uv}+X^2Y^1f_{uv}+X^2Y^2f_{vv}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}&(XY-YX)f=[X,Y]f,\\ &\qquad[X,Y]:=\left(X^1Y^1_u-Y^1X^1_u+X^2Y^1_v-Y^2X^1_v\right)\frac{\partial}{\partial u}\\ &\qquad\qquad+\left(X^1Y^2_u-Y^1X^2_u+X^2Y^2_v-Y^2X^2_v\right)\frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

と書ける．したがって $[X,Y]$ は C^∞-級ベクトル場を与える．これを X, Y の**括弧積**，**交換子積**という．定義から，次がわかる：

補題 2.4. (1) 写像 $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ は X, Y に関して線形．

(2) 任意のベクトル場 X,Y に対して $[Y,X]=-[X,Y]$.

(3) 任意のベクトル場 X,Y と関数 f に対して

$$[fX,Y]=f[X,Y]-(Yf)X,\qquad[X,fY]=f[X,Y]+(Xf)Y.$$

(4) 任意のベクトル場 X,Y,Z に対して

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

ただし右辺は，各点で零ベクトルを対応させるベクトル場である．

(5) 座標近傍 $(U;u^1,u^2)$ において

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k}\right]=0,\qquad(j,k=1,2).$$

□ **リーマン計量**　多様体 S 上の各点 P における接空間に（正定値）内積 g_{P} が定義されているとき，この内積の族 g を**リーマン計量**とよぶ．ベクトル場 X, Y に対して，それらの点 P での値 X_{P}，Y_{P} どうしの内積を考えることで，関数 $\mathrm{P} \mapsto g_{\mathrm{P}}(X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}})$ を考えることができる．とくに任意の C^∞-級のベクトル場に対してこの関数が C^∞-級となるとき，リーマン計量は C^∞-級であるという．この講義ではとくに断らない限り，リーマン計量は C^∞-級であるとする．

リーマン計量 g が与えられた多様体 (S, g) を**リーマン多様体**という．紛らわしさがないときは，記号を簡単にするため，$g(X, Y)$ のことを $\langle X, Y\rangle$ と書く．

座標近傍 $(U; u, v) = (U; u^1, u^2)$ において

$$E := \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \qquad F := \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \qquad G := \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

をリーマン計量 g の**成分**とよぶ．添字を用いて

$$g_{ij} := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle, \qquad (i, j = 1, 2)$$

と書くこともある [6]．

内積の対称性と正定値性から，2 次正方行列 (g_{ij}) は正定値対称行列．とくに $\det(g_{ij}) > 0$ だから，この行列は正則行列である．そこで，逆行列を

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \left(= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right)$$

と書くことにする．

別の座標系 $(V; \xi^1, \xi^2)$ に対するリーマン計量 g の成分を $\tilde{g}_{ij}$ と書くと，

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial u^j} \tilde{g}_{kl}, \qquad g^{ij} = \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial u^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial u^j}{\partial \xi^l} \tilde{g}^{kl}$$

が成り立つ．

[6] 高次元で考えるのならばこの記法が便利

□ **共変微分とクリストッフェル記号**　リーマン多様体 (S, g) 上の 2 つのベクトル場に対してベクトル場を対応させる双線形写像

$$\nabla \colon (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

が**リーマン接続**または**レビ・チビタ共変微分**であるとは，任意のベクトル場に対して

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{2.9}$$

を満たすことである．

事実 2.5. リーマン多様体上にはただ一つリーマン接続が定まる．さらに，任意のベクトル場 X, Y と関数 f に対して

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \qquad \nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$$

が成り立つ [7]．

事実 2.6. 局所座標系 $(U; u^1, u^2)$ 上でリーマン計量 g の成分 (g_{ij}) と，その逆行列 (g^{ij}) を用いて，

$$\nabla_{\partial/\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{jk} \frac{\partial}{\partial u^l}, \qquad \Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} g^{lm} (g_{mk,j} + g_{jm,k} - g_{jk,m})$$

と書ける．ただし $_{,j}$ は変数 u^j に関する微分を表す．

事実 2.6 の 3 添字記号 Γ^i_{jk} をリーマン接続 ∇ の座標系 (u^1, u^2) に関する**クリストッフェル記号**という．次が成り立つ（問題 II-1）：

系 2.7. クリストッフェルの記号は次を満たす：

(1) $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$,

(2) $\sum_{l=1}^{2} \left(g_{li} \Gamma^l_{jk} + g_{lj} \Gamma^l_{ik} \right) = g_{ij,k}$.

[7] 事実 2.5 自体は高次元のリーマン多様体，擬リーマン多様体に対して成立する．リーマン幾何学の入門コースならどこでも学ぶ．

ことなる座標系 (ξ^1, ξ^2) に関するクリストッフェル記号を $\tilde{\Gamma}^a_{bc}$ $(a, b, c = 1, 2)$ と表すと，(u^1, u^2) に関するクリストッフェル記号 Γ^i_{jk} との間に次の関係が成り立つ：

$$\sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \xi^a}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial u^i \partial u^j} + \sum_{a,b} \frac{\partial \xi^b}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^c}{\partial u^j} \tilde{\Gamma}^a_{bc}. \tag{2.10}$$

実際，

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial/\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} &= \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial u^k} = \sum_{a,k} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \xi^a}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial \xi^a}, \\
\nabla_{\partial/\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} &= \nabla_{\partial/\partial u^i} \sum_a \frac{\partial \xi^a}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial \xi^a} \\
&= \sum_a \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial}{\partial \xi^a} + \sum_{a,c} \frac{\partial \xi^a}{\partial u^j} \nabla_{(\partial \xi^c/\partial u^i)(\partial/\partial \xi^c)} \frac{\partial}{\partial \xi^a} \\
&= \sum_a \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial}{\partial \xi^a} + \sum_{a,c} \frac{\partial \xi^a}{\partial u^j} \frac{\partial \xi^c}{\partial u^i} \nabla_{\partial/\partial \xi^c} \frac{\partial}{\partial \xi^a} \\
&= \sum_a \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial}{\partial \xi^a} + \sum_{a,c} \frac{\partial \xi^a}{\partial u^j} \frac{\partial \xi^c}{\partial u^i} \tilde{\Gamma}^b_{ac} \frac{\partial}{\partial \xi^b} \\
&= \sum_a \left(\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial u^i \partial u^j} + \sum_{b,c} \frac{\partial \xi^b}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^c}{\partial u^j} \tilde{\Gamma}^a_{bc} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^a}.
\end{aligned}$$

■ 平坦性とユークリッド座標　ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.11}$$

と定め，R をリーマン接続 ∇ に関する**曲率テンソル**という．

補題 2.8. 任意のベクトル場 X, Y, Z と関数 f に対して

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z \tag{2.12}$$

が成り立つ．

とくに，局所座標系 (u^1, u^2) 上で

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

と表すと，

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k R^l_{kij} \frac{\partial}{\partial u^l}, \tag{2.13}$$

$$R^l_{kij} \frac{\partial}{\partial u^l} = \sum_k R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}$$

と書ける．式 (2.13) の R^l_{kij} を曲率テンソルの**成分**という．とくに曲率テンソル R が任意のベクトル場 X, Y, Z に対して恒等的に 0 になるための必要十分条件は R の成分がすべて 0 となることである．クリストッフェルの記号を用いれば，

$$R^l_{kij} = \Gamma^l_{jk,i} - \Gamma^l_{ik,j} + \sum_m \left(\Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} \right) \tag{2.14}$$

と書ける．

定理 2.9. 2 次元リーマン多様体 (S, g) 上の各点 P の近傍で，クリストッフェル記号が恒等的に消えるような座標系が存在するための必要十分条件は，曲率テンソルが恒等的に 0 となることである．

証明. 必要性は式 (2.14) からわかるので，十分性を示す．点 P の単連結な近傍の座標系 (u^1, u^2) をとったとき，クリストッフェル記号 $\tilde{\Gamma}^a_{bc}$ が恒等的に 0 となるような局所座標系 (ξ^1, ξ^2) の存在を示す．そのような座標系が存在するならば，(2.10) より

$$\sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \xi^a}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial u^i \partial u^j}$$

を満たすことに注意し，4 個の未知関数 $(x^a_k)_{a,k=1,2}$ に関する微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \begin{pmatrix} x^1_1 & x^1_2 \\ x^2_1 & x^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1_1 & x^1_2 \\ x^2_1 & x^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma^1_{1j} & \Gamma^1_{2j} \\ \Gamma^2_{1j} & \Gamma^2_{2j} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

を考える．もしも曲率テンソルが恒等的に零ならば (2.15) の可積分条件は満たされる（問題 II-2）．したがって，(u^1_0, u^2_0) で正則行列 X_0 を初期条件とする (2.15) の解が存在する．ここで系 2.7 (1) から

$$x^1_1\, du^1 + x^1_2\, du^2, \qquad x^2_1\, du^1 + x^2_2\, du^2$$

は閉形式．したがってポアンカレの補題（定理 1.16）から

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial u^j} = x_j^a$$

を満たす関数 ξ^a（$a=1,2$）が存在する．初期条件 X_0 が正則行列なら，ヤコビアン $\partial(\xi^1,\xi^2)/\partial(u^1,u^2)$ は 0 でないので，(ξ^1,ξ^2) は P の近傍での座標系を与える．さらに (2.10) より，クリストッフェルの記号は

$$\sum_{a,b} \frac{\partial \xi^b}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^c}{\partial u^j} \tilde{\Gamma}_{bc}^a = 0 \qquad (i,j=1,2)$$

を満たしている．このことと $\partial(\xi^1,\xi^2)/\partial(u^1,u^2) \neq 0$ から $\tilde{\Gamma}_{bc}^a = 0$ であることがわかる（問題 II-3）. □

問　題　II

II-1　系 2.7 に証明をつけなさい．

II-2　曲率テンソルが恒等的に 0 ならば，方程式 (2.15) の可積分条件が満たされることを示しなさい．

II-3　変数 (u^1,u^2) の関数 ξ^1, ξ^2, $\tilde{\Gamma}_{bc}^a$ が

$$\sum_{a,b} \frac{\partial \xi^b}{\partial u^i} \frac{\partial \xi^c}{\partial u^j} \tilde{\Gamma}_{bc}^a = 0 \qquad (i,j=1,2)$$

を満たしているとする．$\partial(\xi^1,\xi^2)/\partial(u^1,u^2) \neq 0$ のもとで $\tilde{\Gamma}_{bc}^a$ $(a,b,c=1,2)$ は 0 であることを示しなさい．

II-4　定理 2.9 を用いて，2 次元リーマン多様体 (S,g) の曲率テンソルが恒等的に零ならば，各点 $\mathrm{P} \in S$ の座標近傍 $(U;u^1,u^2)$ で，リーマン計量の成分が $g_{ij}=\delta_{ij}$，すなわちリーマン計量が

$$g = (du^1)^2 + (du^2)^2$$

と書けるものが存在することを示しなさい．