III. 正規直交枠

■ 1 次微分形式　多様体 S の点 P における接空間 $T_{\mathrm{P}}S$ の**双対空間**を $T^*_{\mathrm{P}}S$ と書く．すなわち

$$T^*_{\mathrm{P}}S := \{\omega_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}S \to \mathbb{R}, \omega_{\mathrm{P}} \text{ は線形写像 }\}.$$

とくに S が n 次元多様体ならば $T_{\mathrm{P}}S$, $T^*_{\mathrm{P}}S$ はともに n 次元の線形空間となっている．実際,

補題 3.1. $T_{\mathrm{P}}S$ の任意の基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ に対して

$$\omega^j(\boldsymbol{e}_k) = \begin{cases} 1 & (k=j) \\ 0 & (k\neq j)\end{cases}, \qquad (i,j=1,\dots,n)$$

を満たす $T^*_{\mathrm{P}}S$ の要素の組 $\{\omega^1,\dots,\omega^n\}$ がただひと組存在する．さらに $\{\omega^1,\dots,\omega^n\}$ は $T^*_{\mathrm{P}}S$ の基底になる．

補題 3.1 の $\{\omega^j\}$ を $T_{\mathrm{P}}S$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_k\}$ の**双対基底**という．とくに，P を含む S の局所座標系 $(u^1,\dots,u^n)$ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\dots,\frac{\partial}{\partial u^n}\right) \qquad \text{の双対基底を} \qquad (du^1,\dots,du^n)$$

と書く．

各点 P ごとに $T^*_{\mathrm{P}}S$ の要素 ω_{P} を対応させる規則 ω を 1 **次微分形式**という．微分形式 ω とベクトル場 X に対して $\omega(X)$ は S 上の関数を与えるが,「X が滑らかならば $\omega(X)$ は滑らか」であるときに ω は滑らかな 1 次微分形式であるという [1)]．局所座標系 $(u^1,\dots,u^n)$ を用いると，滑らかな 1 次微分形式 ω は，u^1,..., u^n の滑らかな関数 a_1, ..., a_n を用いて

$$\omega = a_1\,du^1 + \dots + a_n\,du^n \tag{3.1}$$

[*)] 2017 年 07 月 04 日 (2017 年 7 月 11 日訂正)
[1)] 以下，ベクトル場，微分形式はとくに断らないかぎり滑らかなものとする．

の形に書き表すことができる．一般に S 上の滑らかな関数 f に対して

$$df(X) := Xf \qquad (f \text{ の } X \text{ 方向の方向微分})$$

とおくと df は S 上の 1 次微分形式を与える．これを f の**外微分**または**全微分**という．局所座標系 (u^j) を用いれば,

$$df = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u^j}du^j$$

と表すことができる．

■ 2 次微分形式　以下，簡単のため S の次元 $n=2$ とする．積空間 $T_{\mathrm{P}}S\times T_{\mathrm{P}}S$ 上の反対称双線形形式全体のなすベクトル空間を $\wedge^2T^*_{\mathrm{P}}S$ と書く．各点 P に対して $\alpha_{\mathrm{P}}\in\wedge^2T^*_{\mathrm{P}}S$ を対応させる写像 α を 2 **次微分形式**という．とくに α が滑らかであるとは，任意の滑らかなベクトル場 X, Y に対して $\alpha(X,Y)$ が滑らかな関数となることである．2 つの 1 次微分形式 ω, μ と滑らかなベクトル場 X, Y に対して

$$\omega\wedge\mu(X,Y) := \omega(X)\mu(Y) - \omega(Y)\mu(X)$$

と定めると $\omega\wedge\mu$ は 2 次微分形式を与える．とくに S の次元が 2 であることに注意すると，S 上の任意の 2 次微分形式 α は，局所座標系 (u^1,u^2) のもとで，滑らかな関数 $\hat\alpha(u^1,u^2)$ を用いて

$$\alpha = \hat\alpha\,du^1\wedge du^2$$

と表される．

滑らかな 1 次微分形式 ω とベクトル場 X, Y に対して

$$d\omega(X,Y) := X\bigl(\omega(Y)\bigr) - Y\bigl(\omega(X)\bigr) - \omega([X,Y]) \tag{3.2}$$

と定めると $d\omega$ は 2 次微分形式を与える．この $d\omega$ を ω の**外微分**という．とくに（多様体 S の次元は 2 であることに注意すれば）

$$\omega = \omega_1\,du^1 + \omega_2\,du^2 \qquad \text{に対して} \qquad d\omega = \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial u^1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial u^2}\right)du^1\wedge du^2$$

を満たす．とくに，滑らかな関数 f に対して

$$d(df) = 0 \tag{3.3}$$

が成り立つ．

■ 正規直交枠　以下 (S, ds^2) を 2 次元リーマン多様体とする．開集合 $U \subset S$ 上の 2 つのベクトル場の組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が U の各点 P で $T_{\mathrm{P}}S$ の（内積 $\langle\ ,\ \rangle = ds^2$ に関する）正規直交基底を与えているとき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を**正規直交枠** [2] という．

補題 3.2. 2 次元リーマン多様体の任意の座標近傍 $(U; u^1, u^2)$ 上に正規直交枠が存在する．

証明．　基底 $\{\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2\}$ にグラム・シュミットの直交化を施せばよい（問題 III-1）．　□

補題 3.3. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) 上の点 P の近傍で定義された 2 つの正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ に対して P の近傍で定義された滑らかな関数 θ が存在して，

$$(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

となるものが存在する．

証明．　正規直交基底の間の変換行列は直交行列である．　□

■ リーマン接続と接続形式　2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の開集合 U 上に正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が与えられているとする．計量 ds^2 から定まるリーマン接続 ∇ に対して次が成り立つ：

補題 3.4. 任意のベクトル場 X に対して $\langle \nabla_X \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$ が成り立つ．また，

$$\mu(X) := \langle \nabla_X \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle$$

[2] 正規直交枠：an orthonormal frame

とおくと μ は U 上の 1 次微分形式で，

$$\nabla_X \boldsymbol{e}_1 = -\mu(X)\boldsymbol{e}_2, \qquad \nabla_X \boldsymbol{e}_2 = \mu(X)\boldsymbol{e}_1 \tag{3.5}$$

が成り立つ．

証明．　正規直交基であることから，$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$．したがって，(2.9) から

$$0 = X\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \langle \nabla_X \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle + \langle \boldsymbol{e}_i, \nabla_X \boldsymbol{e}_j \rangle \tag{3.6}$$

が成り立つ．とくに $i = j$ として，内積の対称性に注意すれば $\langle \nabla_X \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$ が得られる．さらに事実 2.5 から

$$\begin{aligned} \mu\left(X^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + X^2 \frac{\partial}{\partial u^2}\right) &= X^1 \mu\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) + X^2 \mu\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right) \\ &= \left(\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) du^1 + \mu\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right) du^2\right)(X) \end{aligned}$$

となるので，μ は 1 次微分形式．さらに，$\nabla_X \boldsymbol{e}_2$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の線形結合になるが，最初の結果から $\boldsymbol{e}_2$ 方向の成分は 0．したがって

$$\nabla_X \boldsymbol{e}_2 = \langle \nabla_X \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1 = \mu(X)\boldsymbol{e}_1.$$

さらに (3.6) に $i = 1$, $j = 2$ を代入すると

$$\nabla_X \boldsymbol{e}_1 = \langle \nabla_X \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle \boldsymbol{e}_2 = -\langle \nabla_X \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_2 = -\mu(X)\boldsymbol{e}_2$$

となって結論が得られた．　□

式 (3.5) を満たす 1 次微分形式 μ をリーマン接続 ∇ の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する**接続形式** [3] という．

補題 3.5. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式を μ とする枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の双対基底からなる 1 次微分形式の組 $\{\omega^1, \omega^2\}$ は

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \mu, \qquad d\omega^2 = -\omega^1 \wedge \mu$$

を満たす．

[3] 接続形式：the connection form

証明. 共変微分の性質 (2.9) から

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = \nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_2 - \nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1 = \mu(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \mu(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2.$$

したがって，(3.2) と $\omega^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j$ から

$$\begin{aligned}
d\omega^1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_1\omega^1(\boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_2\omega^1(\boldsymbol{e}_1) - \omega^1([\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]) \\
&= -\mu(\boldsymbol{e}_1), \\
(\omega^2 \wedge \mu)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) &= \omega^2(\boldsymbol{e}_1)\mu(\boldsymbol{e}_2) - \omega^2(\boldsymbol{e}_2)\mu(\boldsymbol{e}_1) = -\mu(\boldsymbol{e}_1) \\
d\omega^2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_1\omega^2(\boldsymbol{e}_2) - \boldsymbol{e}_1\omega^2(\boldsymbol{e}_1) - \omega^2([\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]) \\
&= -\mu(\boldsymbol{e}_2), \\
(\omega^1 \wedge \mu)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) &= \omega^1(\boldsymbol{e}_1)\mu(\boldsymbol{e}_2) - \omega^1(\boldsymbol{e}_2)\mu(\boldsymbol{e}_1) = \mu(\boldsymbol{e}_2).
\end{aligned}$$

S は 2 次元なので，任意のベクトル場 X, Y に対して

$$d\omega^1(X, Y) = (\omega^2 \wedge \mu)(X, Y), \qquad d\omega^2(X, Y) = -(\omega^1 \wedge \mu)(X, Y)$$

が成り立つ． □

補題 3.6. 2 つの正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ と $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ が (3.4) で関係付けられているとき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式 μ と $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ に関する接続形式 $\tilde{\mu}$ は $\tilde{\mu} = \pm(\mu - d\theta)$ をみたす．

証明. 事実 2.5 と補題 3.4 からわかる（問題 III-2）． □

系 3.7. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式 μ に対して $d\mu(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ で与えられる関数は，正規直交枠のとり方によらない．

証明. 式 (3.4) のような正規直交枠 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ に関する接続形式を $\tilde{\mu}$ とすると，補題 3.6 と式 (3.3) から，2 次微分形式 $d\tilde{\mu} = \pm d\mu$．とくに

$$\begin{aligned}
d\tilde{\mu}(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2) &= \pm d\tilde{\mu}(\cos\theta\boldsymbol{e}_1 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2, -\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_2) \\
&= \pm d\tilde{\mu}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = d\mu(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

となり，結論が得られた． □

定義 3.8. 2 次元リーマン多様体の正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式を μ とするとき，

$$K := d\mu(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

をリーマン多様体の（内的な）ガウス曲率とよぶ[4)]．

第 II 回でリーマン曲率テンソル R を定義したが，ガウス曲率は R を用いて次のように表すことができる（問題 III-3）：

命題 3.9. 式 (2.11) で定義された曲率テンソル R を用いると，

$$K = \langle R(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle$$

が成り立つ．ただし $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は正規直交枠である．

さらに（2 次元リーマン多様体については）K はリーマン曲率テンソルの全情報を握っている．すなわち

事実 3.10. リーマン多様体 (S, ds^2), (S, dt^2) のガウス曲率が一致するならば，曲率テンソルは一致する．とくに，曲率テンソルの全ての成分が 0 となるための必要十分条件は，ガウス曲率が恒等的に 0 となることである．

この事実 3.10 の証明はここでは与えないが，曲率テンソルの対称性

$$\begin{gathered}
\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle, \\
R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0
\end{gathered}$$

と，次元が 2 であることから示すことができる．

■ **応用：平坦リーマン多様体の特徴付け** 前回の定理 2.9 を，ガウス曲率を用いて述べ直し，それに証明を与えよう．

定義 3.11. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) が**平坦**[5)] であるとは，ガウス曲率 K が恒等的に 0 となることである．

[4)] $\mathbb{R}^3$ の曲面のガウス曲率の定義とは定義がことなり，リーマン計量から定まる．ガウスの方程式からこれらは一致することがわかるが，区別が必要なときは「内的な」という語をつける．

[5)] 平坦：flat

補題 3.12. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の座標近傍 $(U; u^1, u^2)$ 上でリーマン計量が $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$ とかけていれば，U 上でガウス曲率は恒等的に 0 である．

証明. 仮定より，$\boldsymbol{e}_j := \partial/\partial u^j$ $(j = 1, 2)$ とおくと，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は正規直交枠を与える．とくに，補題 2.4 と (2.9) から

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2] = \nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_2 - \nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1 = 0.$$

したがって，接続形式 μ は

$$\begin{aligned}
\mu(\boldsymbol{e}_1) &= \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0, \\
\mu(\boldsymbol{e}_2) &= \langle \nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle = \boldsymbol{e}_2 \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{e}_2, \nabla_{\boldsymbol{e}_2}\boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_2, \nabla_{\boldsymbol{e}_1}\boldsymbol{e}_2 \rangle = 0
\end{aligned}$$

となり $d\mu$ は恒等的に零になるから $K = 0$. □

定理 3.13 (定理 2.9 再録)**.** 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) のガウス曲率が恒等的に零ならば，各点 $\mathrm{P} \in S$ の近傍 U 上の座標系 (x, y) で $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ となるものが存在する．

証明. 点 P の単連結な近傍 U の P を原点 $(0, 0)$ とする座標系 (u, v) と，正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，この正規直交枠に関する接続形式を μ とする．μ は U 上の 1 次微分形式だから，

$$\mu = \alpha\, du + \beta\, dv$$

とかける．ただし α, β は (u, v) の滑らかな関数である．すると

$$d\mu = (\beta_u - \alpha_v)\, du \wedge dv$$

なので，仮定から

$$\beta_u - \alpha_v = 0 \tag{3.7}$$

が成り立つ．

これらを用いて，2×2-行列に値をもつ未知関数 $\mathcal{F}$ に関する微分方程式

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda, \quad \mathcal{F}(0, 0) = \mathrm{id} \tag{3.8}$$
$$\Omega := \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda := \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．式 (3.7) から

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = (\alpha_v - \beta_u)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = O$$

なので，定理 2.1 の仮定 (2.1) を満たしている．領域 U は単連結にとっていたから，式 (3.8) をみたす $\mathcal{F}\colon U \to \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ がただ一つ存在する．さらに Ω, Λ はともに交代行列に値をとり，初期条件が $\mathrm{id} \in \mathrm{SO}(2)$ なので，$\mathcal{F}$ は $\mathrm{SO}(2)$ に値をとる．そこで，$\mathcal{F}$ を列ベクトルに分解して

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$$

とすると，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は (u, v) の滑らかなベクトル値関数で，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基を与える．とくに

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{a}_1 &= (\boldsymbol{a}_1)_u\, du + (\boldsymbol{a}_1)_v\, dv = -\alpha \boldsymbol{a}_2\, du - \beta \boldsymbol{a}_2\, dv \\
&= -\mu \boldsymbol{a}_2, \\
d\boldsymbol{a}_2 &= \mu \boldsymbol{a}_1
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbb{R}^2$ に値をとる $U \subset S$ 上の 1 次微分形式

$$\omega := \boldsymbol{a}_1\omega^1 + \boldsymbol{a}_2\omega_2$$

を考える．ただし $\{\omega^1, \omega^2\}$ は正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の双対基底である．補題 3.5 から

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\boldsymbol{a}_1 \wedge \omega^1 + \boldsymbol{a}_1 d\omega^1 + d\boldsymbol{a}_2 \wedge \omega^2 + \boldsymbol{a}_2 d\omega^2 \\
&= -\boldsymbol{a}_2\mu \wedge \omega^1 + \boldsymbol{a}_1 d\omega^1 + \boldsymbol{a}_1\mu \wedge \omega^2 + \boldsymbol{a}_2 d\omega^2 = 0.
\end{aligned}$$

したがって，ポアンカレの補題（定理 1.16）から

$$df = \omega, \qquad f(0,0) = \mathbf{0}$$

を満たす $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ が唯一存在する．この写像は

$$df(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \qquad df(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a}_2$$

を満たしているので，各点 $\mathrm{Q} \in U$ に対して

$$(df)_{\mathrm{Q}}\colon T_{\mathrm{Q}}S \longrightarrow T_{f(\mathrm{Q})}\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

は内積を保つ．そこで $f(u,v) = (x,y)$ とおくと，(x,y) は結論をみたす局所座標系を与えている． □

定理 3.13 **の別証明**. ガウス曲率が恒等的に 0 であることから，$d\mu = 0$．したがって，点 P の単連結な近傍で $\mu = d\theta$ となるような関数 θ が存在する（ポアンカレの補題，定理 1.16）．そこで (3.4) のようにして正規直交枠 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}_2}\}$ をとると，この枠に関する接続形式 $\tilde{\mu}$ は恒等的に零である．そこで，$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}_2}\}$ の双対基底を $\{\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2\}$ とすると，補題 3.5 から

$$d\tilde{\omega}^1 = d\tilde{\omega}^2 = 0$$

が成り立つ．したがって，ポアンカレの補題（定理 1.16）から $dx = \tilde{\omega}^1$, $dy = \tilde{\omega}^2$ となるような関数 (x,y) がとれる．これが求める座標である（問題 III-4）． □

問　題　III

III-1　2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の座標近傍 $(U; u^1, u^2)$ 上で，リーマン計量の係数を

$$E := g_{11}, \qquad F := g_{12} = g_{21}, \qquad G := g_{22}$$

と書くとき，$\{\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2\}$ にグラム・シュミットの直交化を施して得られる正規直交枠 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を $\partial/\partial u^1$, $\partial/\partial u^2$, E, F, G を用いて表しなさい.

III-2　補題 3.6 を示しなさい.

III-3　命題 3.9 を示しなさい.

III-4　定理 2.9 の「別証明」で得られた (x, y) が結論を満たすことを確かめなさい.

III-5　第 II 回の補足：「定理 2.1 の高次元化」に相当する定理のステートメントを書きなさい（証明する必要はない）.