IV. 空間形の曲面

■ ユークリッド空間 正の整数 n に対して n 次元数空間 $\mathbb{R}^n$ は n 次元多様体である．とくに接空間 $T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ と同一視して標準的な内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考えれば，$(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ はリーマン多様体になる．これを**ユークリッド空間**[1]，計量 $\langle\ ,\ \rangle$ をユークリッド計量という．次のことが知られている[2]

- ユークリッド空間は，断面曲率が恒等的に 0 な完備単連結リーマン多様体である．
- ユークリッド空間の等長変換は
$$\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \qquad (A \in \mathrm{O}(n), \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n)$$
の形に表される．この変換をユークリッド変換，とくに $A \in \mathrm{SO}(n)$ のときは**向きをたもつユークリッド変換**という．

この講義ではとくに 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ を扱う．

■ 球面 正の定数 k に対して，4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の 3 次元部分多様体

$$S^3(k) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \frac{1}{k}\right\}, \tag{4.1}$$

すなわち半径 $1/\sqrt{k}$ の 3 次元球面[3] を考える．

- $S^3(k)$ の点 $\boldsymbol{x}$ における接空間は
$$T_{\boldsymbol{x}}S^3(k) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0\} = \boldsymbol{x}^{\perp}$$
である．とくにユークリッド内積を $T_{\boldsymbol{x}}S^3(k)$ に制限することで $S^3(k)$ はリーマン多様体とみなせる．
- $S^3(k)$ はコンパクト（したがって完備），単連結なリーマン多様体で，断面曲率は k である．
- $S^3(k)$ の等長変換は
$$S^3(k) \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in S^3(k) \qquad (A \in \mathrm{O}(4))$$
の形に表される．ここで $\boldsymbol{x} \in S^3(k)$ は $\mathbb{R}^4$ の列ベクトルとみなしている．とくに $A \in \mathrm{SO}(4)$ のときが**向きをたもつ等長変換**である．

■ 双曲空間 $\mathbb{R}^4_1$ で 4 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間[4]，すなわち，$\mathbb{R}^4$ に不定値内積（**ミンコフスキー内積**とよぶ）

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle &= -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ &= {}^t\boldsymbol{x}J\boldsymbol{y}\end{aligned} \qquad \left(J := \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

が付随しているものを表す．ここで $\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3), \boldsymbol{y} = {}^t(y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4_1$ は列ベクトルで，最初の成分の添字は 0 としている．正の定数 k に対して $\mathbb{R}^4_1$ の 3 次元部分多様体

$$H^3(-k) = \left\{\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \frac{-1}{k}, x_0 > 0\right\} \tag{4.2}$$

を**双曲空間**[5] という．

- $H^3(-k)$ の点 $\boldsymbol{x}$ における接空間は
$$T_{\boldsymbol{x}}H^3(-k) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = 0\} = \boldsymbol{x}^{\perp}$$
である．とくにミンコフスキー内積を $T_{\boldsymbol{x}}H^3(-k)$ に制限すると，正定値内積を与える．したがって $H^3(-k)$ はリーマン多様体とみなせる．
- $H^3(-k)$ は完備単連結なリーマン多様体で，断面曲率は $-k$ である．

---

[*] 2017 年 07 月 11 日 (2017 年 7 月 18 日訂正)
[1] ユークリッド空間 the Euclidean space
[2] 2017 年度幾何学特論 A1 参照.
[3] 球面：a sphere.
[4] ローレンツ・ミンコフスキー空間 the Lorentz-Minkowski space
[5] 双曲空間：the hyperbolic space

- $H^3(-k)$ の等長変換は
$$H^3(-k) \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in H^3(-k) \qquad (A \in \mathrm{O}_+(3,1))$$
の形に表される．とくに $A \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ のときが向きを保つ等長変換である．ただし
$$\mathrm{O}_+(3,1) = \{A \in (a_{ij})_{i,j=0,1,2,3} | {}^tAJA = J, a_{00} > 0\},$$
$$\mathrm{SO}_+(3,1) = \{A \in \mathrm{O}_+(3,1) \,|\, \det A = 1\}$$
である[6)]．

■ **空間形**　断面曲率が一定な完備リーマン多様体のことを**空間形**[7)] という．

事実 4.1. 断面曲率一定な完備，単連結かつ連結な 3 次元リーマン多様体[8)] は，球面 $S^3(k)$ $(k > 0)$，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$，双曲空間 $H^3(-k)$ $(k > 0)$ のいずれかに等長的である．

以下，実数 κ に対して
$$M^3(\kappa) := \begin{cases} S^3(\kappa) & (\kappa > 0) \\ \mathbb{R}^3 & (\kappa = 0) \\ H^3(\kappa) & (\kappa < 0) \end{cases}$$
で断面曲率一定 κ（「定曲率 κ」ということがある）の単連結 3 次元空間形を表すことにする．

■ **ユークリッド空間の曲面**　まず $\mathbb{R}^3$ の曲面を考えよう[9)]．ここでは，2 次元多様体 S から $\mathbb{R}^3$ への**はめ込み**[10)] $f\colon S \to \mathbb{R}^3$ を**曲面**[11)] ということにする．

[6)] 双曲空間 $H^3(-k)$ は「二葉双曲面」の「上半分」になっている．等長変換の条件 "$a_{00} > 0$" は，この上半分を上半分に移すための条件である．

[7)] 空間形：a space form

[8)] この事実は 3 次元に限らず，一般次元のリーマン多様体で成立する．

[9)] このあたりの議論は,「曲線と曲面（改訂版）」（梅原・山田）の第 13 節，151 ページ以降を参照.

[10)] 多様体 S から M への C^∞ 級写像 f がはめ込み an immersion であるとは，各点 $\mathrm{P} \in S$ で微分写像 $df_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}S \to T_{f(\mathrm{P})}M$ が単射となることである．このとき，とくに $df_{\mathrm{P}}\colon T_{\mathrm{P}}S \to df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \subset T_{f(\mathrm{P})}M$ は線形同型を与える．

[11)] 曲面：a surface

曲面 $f\colon S \to \mathbb{R}^3$ が与えられたとき，各点 $\mathrm{P} \in S$ に対して，$df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ は $\mathbb{R}^3 = T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間だから，その直交補空間 N_{P} は 1 次元．したがって，各点 $\mathrm{P} \in S$ に対して
$$T_{f(\mathrm{P})}\mathbb{R}^3 = df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \oplus N_{\mathrm{P}}$$
と直交直和分解される．とくに各点 P の近傍 U で，f の像にそってなめらかな単位ベクトル場 $U \ni \mathrm{Q} \mapsto \nu_{\mathrm{Q}}$ で $N_Q = \mathbb{R}\nu_{\mathrm{Q}}$ と書けるものが存在する．この ν を曲面 f の**単位法線ベクトル場**[12)] という[13)]．単位法線ベクトル場 ν を用いれば，先に挙げた直交直和分解は
$$T_{f(\mathrm{P})}\mathbb{R}^3 = df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \tag{4.3}$$
と書くことができる．

多様体 S 上のベクトル場 X は，
$$\hat{X} : S \ni \mathrm{P} \longmapsto df_{\mathrm{P}}(X_{\mathrm{P}}) =: \hat{X}_{\mathrm{P}} \in df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \subset T_{\mathrm{P}}\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \tag{4.4}$$
により S 上の $\mathbb{R}^3$ に値をとるベクトル値関数を誘導する．この $\hat{X}$ を X に対応する曲面の**接ベクトル場**とよぶことにする[14)]

以下，S の局所座標系 $(U; u, v)$ を一つ固定する．このとき，曲面 $f\colon S \to \mathbb{R}^3$ は U 上では $\mathbb{R}^3$ に値をとる (u, v) に関するベクトル値関数と見なすことができ，
$$\widehat{\frac{\partial}{\partial u}} = df\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial f}{\partial u} = f_u, \qquad \widehat{\frac{\partial}{\partial v}} = df\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{\partial f}{\partial v} = f_v$$
となる．とくに，ベクトル積 $\times$ を用いて
$$\nu := \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$$

[12)] 単位法線ベクトル場：the unit normal vector field

[13)] 多様体 S が向き付け可能なら，S 上でなめらかな単位法線ベクトル場 ν が存在する．この講義では主に S が $\mathbb{R}^2$ の単連結領域である場合を考えるので，以下，単位法線ベクトル場は S 全体で定義されていると見なす．

[14)] この講義でのみ用いる用語.

とおけば，ν は曲面の単位法線ベクトル場を与える．

各点 P における接ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_{\mathrm{P}}S$ に対して

$$ds^2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) := \langle df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}), df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{w})\rangle \tag{4.5}$$

とすると ds^2 は S 上のリーマン計量を与える．この計量を f の**誘導計量**あるいは**第一基本形式**とよぶ．微分写像 df で $T_{\mathrm{P}}S$ と $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ を同一視すると，この計量は $\mathbb{R}^3$ のリーマン計量を $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ に制限したものと見なすことができる．

とくに，局所座標系 (u,v) を用いれば，

$$\begin{aligned} &ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ &\qquad E := \langle f_u, f_u\rangle, \quad F := \langle f_u, f_v\rangle, \quad G := \langle f_v, f_v\rangle \end{aligned} \tag{4.6}$$

と表すことができる [15]．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の共変微分 D（リーマン接続）は，ベクトル値関数の微分と見なすことができる：

$$D_\xi \eta = d_\xi \eta = \begin{pmatrix} d_\xi \eta^1 \\ d_\xi \eta^2 \\ d_\xi \eta^3 \end{pmatrix}.$$

ただし ξ, η は $\mathbb{R}^3$ のベクトル場で，$\eta = {}^t(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ と 3 つの関数の組で表されているとする．さらに η の各成分が S 上で定義された関数で，$\eta_{\mathrm{P}} \in T_{f(\mathrm{P})}\mathbb{R}^3$ とみなしたとき，S のベクトル場 X に対して

$$D_X \eta := d_X \eta = \begin{pmatrix} d_X \eta^1 \\ d_X \eta^2 \\ d_X \eta^3 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

と定める．局所座標系 (u,v) で $\eta = \eta(u,v)$ と表されているときは，

$$D_{\partial/\partial u}\eta = \frac{\partial \eta}{\partial u}, \qquad D_{\partial/\partial v}\eta = \frac{\partial \eta}{\partial v} \tag{4.8}$$

[15]「曲線と曲面」第 7 節の記号．

である．

一般に $\mathbb{R}^3$ のベクトル η_{P} を $T_{f(\mathrm{P})}\mathbb{R}^3$ の要素とみなすと，(4.3) により $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ のベクトル（接成分）$[\eta_{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}}$ と $\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}$ のベクトル（法成分）$[\eta_{\mathrm{P}}]^{\mathrm{N}}$ に一意的に分解できる．とくに

$$\begin{aligned} &\eta_{\mathrm{P}} = [\eta_{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}} + [\eta_{\mathrm{P}}]^{\mathrm{N}}, \\ &\qquad [\eta_{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}} = \eta_{\mathrm{P}} - \langle \eta_{\mathrm{P}}, \nu_{\mathrm{P}}\rangle\,\nu_{\mathrm{P}}, \quad [\eta_{\mathrm{P}}]^{\mathrm{N}} = \langle \eta_{\mathrm{P}}, \nu_{\mathrm{P}}\rangle\,\nu_{\mathrm{P}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

である．

多様体 S 上の 2 つのベクトル場 X, Y に対して $D_X\hat{Y}$ は f に沿った $\mathbb{R}^3$ のベクトル場を与えているが，(4.3) により

$$D_X\hat{Y} = \widehat{\nabla_X Y} + h(X,Y)\nu \tag{4.10}$$

を満たす S 上のベクトル場 $\nabla_X Y$ と関数 $h(X,Y)$ が存在する．ただし ˆ は (4.4) で与えられる $T_{\mathrm{P}}S$ と $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ の同一視である．この $\nabla : (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ を，曲面 f の**誘導接続**，$h(X,Y)$ を**第二基本形式**という．

補題 4.2. 式 (4.10) で与えられる ∇ は，曲面 f の誘導計量 ds^2 に関するレビ・チビタ接続である．さらに，各点 $\mathrm{P} \in S$ に対して h は $T_{\mathrm{P}}S$ 上の対称双線形形式を与える．

証明． 後半：多様体 S 上のベクトル場 X, Y と関数 φ に対して

$$\begin{aligned} h(X,Y) - h(Y,X) &= \left\langle D_X\hat{Y} - D_Y\hat{X}, \nu\right\rangle = \left\langle [\hat{X},\hat{Y}], \nu\right\rangle = \left\langle \widehat{[X,Y]}, \nu\right\rangle, \\ h(\varphi X, Y) &= \left\langle D_{\varphi X}\hat{Y}, \nu\right\rangle = \varphi\left\langle D_X\hat{Y}, \nu\right\rangle = \varphi h(X,Y) \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，ベクトル場の括弧積が可微分写像と可換であることと，S のベクトル場 W に対して $\hat{W}$ と ν が直交することを用いた．最初の等式から h の対称性がわかる．また，$X = \sum X^j(\partial/\partial u^j)$，$Y = \sum Y^j(\partial/\partial u^j)$（$(u,v) = (u^1, u^2)$）と表示すると，第二の等式から

$$h(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{2} X^i Y^j h\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

となり，$h(X,Y)$ の点 P における値は X, Y の P での値にしかよらないので，後半の結論が得られた．前半：第 II 回の (2.9) を確かめればよい．多様体 S の計量 ds^2 の

内積を $\mathbb{R}^3$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ と同じ記号で表す[16]．すると，S のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$
\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= X\left\langle \hat{Y},\hat{Z}\right\rangle = \left\langle D_X\hat{Y},\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},D_X\hat{Z}\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\nabla_X Y} + h(X,Y)\nu,\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},\widehat{\nabla_X Z}+h(X,Z)\nu\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\nabla_X Y},\hat{Z}\right\rangle + \left\langle \hat{Y},\widehat{\nabla_X Z}\right\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle .
\end{aligned}
$$

ここで，S のベクトル場 W に対して，$\hat{W}$ と ν が直交することを用いた．また，h の対称性を用いれば，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\nabla_X Y} - \widehat{\nabla_Y X} &= D_X\hat{Y} - D_Y\hat{X} - h(X,Y)\nu + h(Y,X)\nu \\
&= D_X\hat{Y} - D_Y\hat{X} = [\hat{X},\hat{Y}] = \widehat{[X,Y]}
\end{aligned}
$$

となるので，$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ となり，結論が得られた． □

補題 4.3. 曲面 $f\colon S\to\mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場 ν と S のベクトル場 X, Y に対して，

$$
\langle D_X\nu,\nu\rangle = 0, \qquad \left\langle D_X\nu,\hat{Y}\right\rangle = -h(X,Y)
$$

が成り立つ．

証明． 等式 $\langle\nu,\nu\rangle=1$ が S 上で成り立つので，X で微分すれば最初の等式が得られる．後半は，$\hat{Y}$ と ν が直交することに注意して，

$$
\left\langle D_X\nu,\hat{Y}\right\rangle = X\left\langle \nu,\hat{Y}\right\rangle - \nu D_X\hat{Y} = -\nu D_X\hat{Y} = -h(X,Y) \qquad \square
$$

■ **ユークリッド空間の曲面の正規直交枠**　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面 $f\colon S\to\mathbb{R}^3$ に対して，単位法線ベクトル場 ν をとり，曲面の誘導計量を $ds^2=\langle\ ,\ \rangle$，第二基本形式を h と書く．

補題 4.2 から，リーマン多様体 (S,ds^2) のレビ・チビタ接続 は誘導接続 ∇ に一致する．

[16] 本質的に同じ内積なので混乱の恐れはないはず．

座標近傍 $(U;u,v)$ 上で S の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ をとり，対応する接続形式を $\mu=\alpha\,du+\beta\,dv$ とする（補題 3.4）．この状況で

$$
\boldsymbol{a}_1 := \hat{\boldsymbol{e}}_1 = df(\boldsymbol{e}_1), \qquad \boldsymbol{a}_2 := \hat{\boldsymbol{e}}_2 := df(\boldsymbol{e}_2), \qquad \boldsymbol{a}_3 := \nu \tag{4.11}
$$

とすると，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は (u,v) のベクトル値関数で，各 $(u,v)\in U$ において $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基を与える．必要なら ν を反対向きにすれば，この正規直交基は正の向きとしてよい．このとき，写像

$$
\mathcal{F}: U\ni(u,v)\longmapsto \mathcal{F}(u,v)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\in \mathrm{SO}(3)
$$

が定まる．この写像を曲面 f に**適合した正規直交枠**ということにする．

命題 4.4. $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義されたユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面 $f\colon U\to\mathbb{R}^3$ に適合した正規直交枠 $\mathcal{F}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ は

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda, \\
\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -h_1^1 \\ -\alpha & 0 & -h_1^2 \\ h_1^1 & h_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad
\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -h_2^1 \\ -\beta & 0 & -h_2^2 \\ h_2^1 & h_2^2 & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{4.12}
$$

が成り立つ．ただし $\boldsymbol{a}_j=\hat{\boldsymbol{e}}_j$ $(j=1,2)$ を満たす U の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に対する接続形式を $\mu=\alpha\,du+\beta\,dv$ と書き，第二基本形式 h に対して，

$$
\begin{aligned}
h_1^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u},\boldsymbol{e}_1\right), \qquad h_1^2 := h\left(\frac{\partial}{\partial u},\boldsymbol{e}_2\right), \\
h_2^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v},\boldsymbol{e}_1\right), \qquad h_2^2 := h\left(\frac{\partial}{\partial v},\boldsymbol{e}_2\right)
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

とおいた．

証明． U 上の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ を $\boldsymbol{a}_j=\hat{\boldsymbol{e}}_j$ $(j=1,2)$ を満たすようにとる．すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{a}_1}{\partial u} &= D_{\partial/\partial u}\boldsymbol{a}_1 = D_{\partial/\partial u}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \widehat{\nabla_{\partial/\partial u}\boldsymbol{e}_1} + h\left(\frac{\partial}{\partial u},\boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{\nu} \\
&= -\mu\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_2 + h_1^1\nu = -\alpha\boldsymbol{a}_2 + h_1^1\boldsymbol{a}_3.
\end{aligned}
$$

これは (4.12) の第 1 式の第 1 列の等式である．同様にして，第 1 式の第 2 列，第 2 式の第 1, 2 列の等式を示すことができる．また，補題 4.3 から

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{a}_3}{\partial u} &= \frac{\partial \nu}{\partial u} = \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u}, \boldsymbol{a}_1 \right\rangle \boldsymbol{a}_1 + \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u}, \boldsymbol{a}_2 \right\rangle \boldsymbol{a}_2 + \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial u}, \boldsymbol{a}_3 \right\rangle \boldsymbol{a}_3 \\ &= \langle D_{\partial/\partial u}\nu, \hat{\boldsymbol{e}}_1\rangle \boldsymbol{a}_1 + \langle D_{\partial/\partial u}\nu, \hat{\boldsymbol{e}}_2\rangle \boldsymbol{a}_2 + \langle D_{\partial/\partial u}\nu, \nu\rangle \nu \\ &= -h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1\right)\boldsymbol{a}_1 - h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_2\right)\boldsymbol{a}_2 = -h_1^1 \boldsymbol{a}_1 - h_1^2 \boldsymbol{a}_2\end{aligned}$$

なので第 1 式の第 3 列の等式が得られた．同様に第 2 式第 3 列も得られる． □

■ 双曲空間の曲面の適合枠　双曲空間 $H^3(-k)$ $(k>0)$ の曲面に対して命題 4.4 に相当する命題を作ろう．いま $k=c^2$（$c>0$）とおき，2 次元多様体 S のはめ込み $f\colon S \to H^3(-c^2)$ を考える．双曲空間を (4.2) のようにローレンツ・ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^4_1$ の超曲面と見なすと，各点 $\mathrm{P} \in S$ に対して

$$df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \subset T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2), \qquad T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2) = f(\mathrm{P})^{\perp} \subset \mathbb{R}^4_1$$

となっている．とくに，$\mathbb{R}^4_1$ の内積は $T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2)$ に制限すると正定値だから $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ の $T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2)$ における直交補空ｃ間 N_{P} は 1 次元で，(P の近傍では）単位法線ベクトル場 ν をとることができる．すなわち ν_{P} は $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ に直交する $T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2)$ の単位ベクトルである．すると，

$$\mathbb{R}^4_1 = T_{f(\mathrm{P})}H^3(-c^2) \oplus \mathbb{R}f(\mathrm{P}) = df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S) \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}f(\mathrm{P}) \tag{4.14}$$

という直交直和分解が得られる．とくに

$$T_{\mathrm{P}}S \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \hat{\boldsymbol{v}} := df_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{v}) \in df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$$

は線形同型写像を与えている．これを用いて (4.5) と同様にして，S にリーマン計量を誘導することができるが，これは $\mathbb{R}^4_1$ の計量の，空間的部分空間 $df_{\mathrm{P}}(T_{\mathrm{P}}S)$ に一致している．この計量を，曲面 f の**誘導計量**という．

$\mathbb{R}^4_1$ のレビ・チビタ接続 D は，$\mathbb{R}^4$ のレビ・チビタ接続と全く同じで，(4.7)（の 4 次元版）のように表される [17]．これを用いて，S のベクトル場 X, Y に対して

[17] 幾何学特論 A1 参照.

$$D_X\hat{Y} = \widehat{\nabla_X Y} + h(X,Y)\nu + cg(X,Y)f \tag{4.15}$$

と書いておく．ただし，右辺の各項は (4.14) の直和分解に対応している．

補題 4.5. 式 (4.15) の ∇, h, g は次を満たす：

(1) 式 (4.15) で得られる対応 $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ は f の誘導計量に関するレビ・チビタ接続に一致する．

(2) $h(X,Y)$ は各 $\mathrm{P} \in S$ において $T_{\mathrm{P}}S$ 上の対称双線形形式を与えている．

(3) $g(X,Y) = c\langle X, Y\rangle$.

証明. (1), (2) はユークリッド空間の場合と同様に示すことができる（問題 IV-1）. (3) を示そう：$f(\mathrm{P}) \in H^3(-c^2)$ だから $\langle f, f\rangle = -1/c^2$．したがって，

$$g(X,Y) = -c\left\langle D_X\hat{Y}, f\right\rangle = -cX\left\langle \hat{Y}, f\right\rangle + c\left\langle \hat{Y}, D_X f\right\rangle = c\left\langle \hat{Y}, \hat{X}\right\rangle = c\langle X, Y\rangle.$$

ここで，$\hat{Y}$ と f が直交することと，$D_X f = \hat{X}$ であることを用いた． □

平面 $\mathbb{R}^2$ の領域 $(U; u, v)$ の $H^3(-c^2)$ へのはめ込み $f\colon U \to H^3(-c^2)$ を考える．誘導計量 $\langle\ ,\ \rangle = ds^2$ に関する正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，その接続形式を $\mu = \alpha\, du + \beta\, dv$ と書いておく．必要に応じて単位法線ベクトル ν の向きを反転させれば

$$\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\colon U \to \mathrm{SO}_+(3,1) \tag{4.16}$$
$$\boldsymbol{a}_0 := cf, \qquad \boldsymbol{a}_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_1, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_2, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \nu$$

が得られる．これを f に適合した正規直交枠という．

命題 4.6. 正の定数 c に対して，$\mathbb{R}^2$ の領域 $(U; u, v)$ で定義されたはめ込み $f\colon U \to H^3(-c^2) \subset \mathbb{R}^4_1$ の誘導計量に関する U の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式を $\mu = \alpha\, du + \beta\, dv$ とする．$\boldsymbol{a}_0 := cf$, $\boldsymbol{a}_1 := df(\boldsymbol{e}_1)$, $\boldsymbol{a}_2 := df(\boldsymbol{e}_2)$ に対して $\boldsymbol{a}_3$ を $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \in \mathrm{SO}_+(3,1)$ となるようにとると，$\nu := \boldsymbol{a}_3$ は f の単位法線ベクトル場で，

$$\mathcal{F} := (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\colon U \longrightarrow \mathrm{SO}_+(3,1)$$

は微分方程式

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda, \tag{4.17}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & cg_1^1 & cg_1^2 & 0 \\ cg_1^1 & 0 & \alpha & -h_1^1 \\ cg_1^2 & -\alpha & 0 & -h_1^2 \\ 0 & h_1^1 & h_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & cg_2^1 & cg_2^2 & 0 \\ cg_2^1 & 0 & \beta & -h_2^1 \\ cg_2^2 & -\beta & 0 & -h_2^2 \\ 0 & h_2^1 & h_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす．ただし，誘導計量 $\langle\ ,\ \rangle$ に対して

$$\begin{aligned} g_1^1 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle, & g_1^2 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle, \\ g_2^1 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle, & g_2^2 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle, \end{aligned} \tag{4.18}$$

第二基本形式 h に対して，

$$\begin{aligned} h_1^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1\right), & h_1^2 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_2\right), \\ h_2^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_1\right), & h_2^2 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_2\right) \end{aligned} \tag{4.19}$$

とおいた．

問　題　IV

IV-1　補題 4.5 の (1), (2) を示しなさい．

IV-2　命題 4.6 を示しなさい．

IV-3　球面 $S^3(c^2)$ $(c>0)$ 内の曲面に対して，命題 4.6 に対応する命題のステートメントを書きなさい．