V. 曲面論の基本定理

■ 接続形式の性質 2次元リーマン多様体 (S, ds^2) の局所座標近傍 $(U; u, v)$ と，U 上の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，レビ・チビタ接続 ∇ の $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ の接続形式

$$\mu := \alpha\, du + \beta\, dv \tag{5.1}$$

をとる（式 (3.5) 参照）．計量 ds^2 で与えられる接空間の内積を $\langle\ ,\ \rangle$ と書き，

$$\begin{aligned} g_1^1 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle, & g_1^2 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle, \\ g_2^1 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle, & g_2^2 &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_2 \right\rangle, \end{aligned} \tag{5.2}$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial u} = g_1^1 \boldsymbol{e}_1 + g_1^2 \boldsymbol{e}_2, \qquad \frac{\partial}{\partial v} = g_2^1 \boldsymbol{e}_1 + g_2^2 \boldsymbol{e}_2 \tag{5.3}$$

とおく．局所座標系 (u, v) を用いてリーマン計量を

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 \tag{5.4}$$

と表すならば，

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = (g_1^1)^2 + (g_1^2)^2, \\ F &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = g_1^1 g_2^1 + g_1^2 g_2^2, \\ G &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = (g_2^1)^2 + (g_2^2)^2, \end{aligned}$$

とくに

$$0 < EG - F^2 = (g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2)^2 \tag{5.5}$$

なので，行列 (g_j^i) は正則行列である．

[*] 2017 年 07 月 18 日 (2017 年 7 月 25 日訂正)

補題 5.1. ここまでの状況で

$$\frac{\partial g_1^1}{\partial v} - \frac{\partial g_2^1}{\partial u} = \alpha g_2^2 - \beta g_1^2, \qquad \frac{\partial g_1^2}{\partial v} - \frac{\partial g_2^2}{\partial u} = \beta g_1^1 - \alpha g_2^1$$

が成り立つ．

証明． レビ・チビタ接続の性質 (2.9) の第 1 式と接続形式の定義から，

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1^1}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle = \left\langle \nabla_{\partial/\partial v} \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \nabla_{\partial/\partial v} \boldsymbol{e}_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\partial/\partial v} \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, (-\beta) \boldsymbol{e}_2 \right\rangle = \left\langle \nabla_{\partial/\partial v} \frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle - \beta g_1^2, \\ \frac{\partial g_2^1}{\partial u} &= \left\langle \nabla_{\partial/\partial u} \frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_1 \right\rangle - \alpha g_2^2 \end{aligned}$$

なので，(2.9) の第 2 式を用いて

$$\frac{\partial g_1^1}{\partial v} - \frac{\partial g_2^1}{\partial u} = \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right], \boldsymbol{e}_1 \right\rangle + \alpha g_2^2 - \beta g_1^2 = \alpha g_2^2 - \beta g_1^2$$

となり結論の第 1 式が得られた．第 2 式も同様． □

補題 5.2. リーマン多様体 (S, ds^2) の（内的な）ガウス曲率 K は，接続形式 (5.1) と式 (5.2) の g_j^i を用いて

$$K = \frac{\beta_u - \alpha_v}{g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2}$$

と表される．

証明． 定義 3.8 から，ガウス曲率は $K = d\mu(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ で定義された．ここで (5.3) を用いると，

$$\begin{aligned} 1 &= (du \wedge dv) \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = (du \wedge dv) \left(g_1^1 \boldsymbol{e}_1 + g_1^2 \boldsymbol{e}_2, g_2^1 \boldsymbol{e}_1 + g_2^2 \boldsymbol{e}_2 \right) \\ &= g_1^1 g_2^1 (du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + g_1^1 g_2^2 (du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \\ &\quad + g_1^2 g_2^1 (du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + g_1^2 g_2^2 (du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \\ &= (g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2)(du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

なので
$$(du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2}$$
となる．したがって
$$K = d\mu(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\beta_u - \alpha_v)(du \wedge dv)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \frac{\beta_u - \alpha_v}{g_1^1 g_2^2 - g_2^1 g_1^2}$$
を得る． □

■ コダッチ型の対称テンソル　2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の 2 階対称テンソル h をとる [1]．すなわち h は，各点 $\mathrm{P} \in S$ で $T_{\mathrm{P}}S$ 上の対称双線形形式 h_{P} を与え，任意のなめらかな S のベクトル場 X, Y に対して
$$h(X, Y) : S \ni \mathrm{P} \longmapsto h_{\mathrm{P}}(X_{\mathrm{P}}, Y_{\mathrm{P}}) \in \mathbb{R}$$
が S 上の C^∞-関数を与えるものとする．

多様体 S の局所座標近傍 $(U; u, v)$ と U 上の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に対して
$$\begin{aligned} h_1^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1\right), & h_1^2 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_2\right), \\ h_2^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_1\right), & h_2^2 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \boldsymbol{e}_2\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$
とおく．次の補題は h の対称性の言い換えである：

補題 5.3. 式 (5.2) の g_j^i と (5.6) の h_j^i は関係式
$$g_1^1 h_2^1 + g_1^2 h_2^2 = g_2^1 h_1^1 + g_2^2 h_1^2$$
を満たす．

証明． 式 (5.3) から
$$\begin{aligned} h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) &= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, g_2^1 \boldsymbol{e}_1 + g_2^2 \boldsymbol{e}_2\right) \\ &= g_2^1 h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_1\right) + g_2^2 h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \boldsymbol{e}_2\right) = g_2^1 h_1^1 + g_2^2 h_1^2, \\ h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right) &= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, g_1^1 \boldsymbol{e}_1 + g_1^2 \boldsymbol{e}_2\right) = g_1^1 h_2^1 + g_1^2 h_2^2 \end{aligned}$$
を得る．h の対称性からこれらは等しいので，結論が得られた． □

以上の状況で，h が次の性質を持つか否かを考える：
$$\frac{\partial h_1^1}{\partial v} - \frac{\partial h_2^1}{\partial u} = \alpha h_2^2 - \beta h_1^2, \quad \frac{\partial h_1^2}{\partial v} - \frac{\partial h_2^2}{\partial u} = \beta h_1^1 - \alpha h_2^1. \tag{5.7}$$
ただし α, β はレビ・チビタ接続 ∇ の接続形式の係数（式 (5.1)）である．式 (5.7) は補題 5.1 の結論の式の g を h に変えたものであることに注意しておく．

補題 5.4. 2 階対称テンソル h が (5.7) を満たす，という条件は，局所座標系 (u, v) および正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ のとり方によらない．

証明． まず，正規直交基底の場のとり方によらないことを示そう．別の正規直交基底の場 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ をとり，基底変換を (3.4) のように表しておく：
$$(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}.$$
すると，$\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\}$ に関する接続形式 $\tilde{\mu} = \tilde{\alpha}\,du + \tilde{\beta}\,dv$ は $\tilde{\mu} = \pm(\mu - d\theta)$, すなわち，
$$\tilde{\alpha} = \pm(\alpha - \theta_u), \qquad \tilde{\beta} = \pm(\beta - \theta_v)$$
をみたす．一方，
$$\begin{aligned} \tilde{h}_1^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \tilde{\boldsymbol{e}}_1\right) = \cos\theta h_1^1 + \sin\theta h_1^2 & \tilde{h}_1^2 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\right) = \mp\sin\theta h_1^1 \pm \cos\theta h_1^2 \\ \tilde{h}_2^1 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \tilde{\boldsymbol{e}}_1\right) = \cos\theta h_2^1 + \sin\theta h_2^2 & \tilde{h}_2^2 &:= h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \tilde{\boldsymbol{e}}_2\right) = \mp\sin\theta h_2^1 \pm \cos\theta h_2^2 \end{aligned}$$
だから

[1] テンソルの厳密な定義はここではしない．第 3/4 クォーターのリーマン幾何学入門コースを参照．ここでは曲面の第二基本形式を想定している．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde h_1^1}{\partial v}-\frac{\partial\tilde h_2^1}{\partial u}-\tilde\alpha\tilde h_2^2+\tilde\beta\tilde h_1^2\\
&\qquad=-\theta_v\left(\sin\theta h_1^1-\cos\theta h_1^2\right)+\cos\theta\frac{\partial h_1^1}{\partial v}+\sin\theta\frac{\partial h_1^2}{\partial v}\\
&\qquad\quad+\theta_u\left(\sin\theta h_2^1-\cos\theta h_2^2\right)-\cos\theta\frac{\partial h_2^1}{\partial u}-\sin\theta\frac{\partial h_2^2}{\partial u}\\
&\qquad\quad\mp(\alpha-\theta_u)(\mp\sin\theta h_2^1\pm\cos\theta h_2^2)\\
&\qquad\quad\pm(\beta-\theta_v)(\mp\sin\theta h_1^1\pm\cos\theta h_1^2)\\
&\qquad=\cos\theta\left(\frac{\partial h_1^1}{\partial v}-\frac{\partial h_2^1}{\partial u}-\alpha h_2^2+\beta h_1^2\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial h_1^2}{\partial v}-\frac{\partial h_2^2}{\partial u}-\beta h_1^1+\alpha h_2^1\right)\\
&\frac{\partial\tilde h_1^2}{\partial v}-\frac{\partial\tilde h_2^2}{\partial u}-\tilde\beta\tilde h_1^1+\tilde\alpha\tilde h_2^1\\
&\qquad=-\sin\theta\left(\frac{\partial h_1^1}{\partial v}-\frac{\partial h_2^1}{\partial u}-\alpha h_2^2+\beta h_1^2\right)+\cos\theta\left(\frac{\partial h_1^2}{\partial v}-\frac{\partial h_2^2}{\partial u}-\beta h_1^1+\alpha h_2^1\right)
\end{aligned}
$$

より，(5.7) が正規直交基底の場のとり方によらないことがわかる．

また，座標変換 $(u,v)=(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ を考えると，

$$
du=u_\xi\,d\xi+u_\eta\,d\eta,\qquad dv=v_\xi\,d\xi+v_\eta\,d\eta,
$$
$$
\frac{\partial}{\partial\xi}=u_\xi\frac{\partial}{\partial u}+v_\xi\frac{\partial}{\partial v},\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}=u_\eta\frac{\partial}{\partial u}+v_\eta\frac{\partial}{\partial v}
$$

となるから，接続形式を $\mu=\hat\alpha\,d\xi+\hat\beta\,d\eta$ と書くと，

$$
\mu=\alpha\,du+\beta\,dv=(u_\xi\alpha+v_\xi\beta)\,d\xi+(u_\eta\alpha+v_\eta\beta)\,d\eta
$$

なので

$$
\hat\alpha=u_\xi\alpha+v_\xi\beta,\qquad \hat\beta=u_\eta\alpha+v_\eta\beta
$$

を得る．また，

$$
\begin{aligned}
\hat h_1^1&:=h\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\boldsymbol{e}_1\right)=u_\xi h_1^1+v_\xi h_2^1 &\quad \hat h_1^2&:=h\left(\frac{\partial}{\partial\xi},\boldsymbol{e}_2\right)=u_\xi h_1^2+v_\xi h_2^2\\
\hat h_2^1&:=h\left(\frac{\partial}{\partial\eta},\boldsymbol{e}_1\right)=u_\eta h_1^1+v_\eta h_2^1 &\quad \hat h_2^2&:=h\left(\frac{\partial}{\partial\eta},\boldsymbol{e}_2\right)=u_\eta h_1^2+v_\eta h_2^2
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\hat h_1^1}{\partial\eta}-\frac{\partial\hat h_2^1}{\partial\xi}-\hat\alpha\hat h_2^2+\hat\beta\hat h_1^2&=(u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi)\left(\frac{\partial h_1^1}{\partial v}-\frac{\partial h_2^1}{\partial u}=\alpha h_2^2-\beta h_1^2\right),\\
\frac{\partial\hat h_1^2}{\partial\eta}-\frac{\partial\hat h_2^2}{\partial\xi}-\hat\beta\hat h_1^1+\hat\alpha\hat h_2^1&=(u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi)\left(\frac{\partial h_1^2}{\partial v}-\frac{\partial h_2^2}{\partial u}=\beta h_1^1-\alpha h_2^1\right)
\end{aligned}
$$

が得られる．座標変換のヤコビアン $u_\xi v_\eta-u_\eta v_\xi$ は零にならないから，条件 (5.7) は座標のとり方によらないことがわかった． □

定義 5.5. 2 次元リーマン多様体 (S,ds^2) 上の 2 階対称テンソル h が**コダッチ・テンソル**である [2)] であるとは，h が性質 (5.7) をもつことである．

■ 曲面論の基本定理　定数 κ に対して，$M^3(\kappa)$ は定曲率 κ の 3 次元単連結空間形，すなわち

$$
M^3(\kappa):=\begin{cases}S^3(\kappa) & (\kappa>0)\\ \mathbb{R}^3 & (\kappa=0)\\ H^3(\kappa) & (\kappa<0)\end{cases}
$$

を表すものとする．

命題 5.6. 2 次元多様体 S の $M^3(\kappa)$ へのはめ込み $f\colon S\to M^3(\kappa)$ の誘導計量（第一基本形式）を ds^2，第二基本形式を h とするとき，

- h は定義 5.5 の意味でのコダッチ・テンソルである．
- ds^2 の（内的な）ガウス曲率 K は

$$
K-\kappa=\frac{h_1^1h_2^2-h_2^1h_1^2}{g_1^1g_2^2-g_2^1g_1^2} \tag{5.8}
$$

を満たす．

ただし，S の局所座標系 (u,v) と正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に対して g^i_j, h^i_j を (5.2), (4.13) のようにおいた．

証明. 局所座標系 $(U;u,v)$ 上で誘導計量に関する正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ と，単位法線ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ をとる．

まず $\kappa>0$ のとき，すなわち $M^3(\kappa)=S^3(c^2)\subset\mathbb{R}^4$ ($\kappa=c^2$, $c>0$) の場合を考える．$\boldsymbol{e}_0:=cf$ とおけば，$\boldsymbol{e}_0$ は $\mathbb{R}^4$ の単位ベクトルで，

$$
\mathcal{F}=(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)
$$

[2)] コダッチ・テンソル：a Codazzi tensor.

は 4 次の直交行列に値をもつような (u,v) の関数である．必要なら $\boldsymbol{e}_3$ を $-\boldsymbol{e}_3$ に取り替えて，$\mathcal{F}\colon U \to \mathrm{SO}(4)$ としてよい．この $\mathcal{F}$ は

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda, \tag{5.9}$$
$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -cg_1^1 & -cg_1^2 & 0 \\ cg_1^1 & 0 & \alpha & -h_1^1 \\ cg_1^2 & -\alpha & 0 & -h_1^2 \\ 0 & h_1^1 & h_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -cg_2^1 & -cg_2^2 & 0 \\ cg_2^1 & 0 & \beta & -h_2^1 \\ cg_2^2 & -\beta & 0 & -h_2^2 \\ 0 & h_2^1 & h_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす（問題 IV-3）．とくに，$\mathcal{F}$ はこの方程式の，直交行列に値をもつ解だから，適合条件（補題 1.14）

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O \tag{5.10}$$

が成り立たなければならない．適合条件 (5.10) の左辺に (5.9) の Ω, Λ を代入すると，Ω, Λ が交代行列であることから (5.10) の左辺は交代行列．とくに

- 対角成分は自明に 0 になる．
- $(1,2)$, $(1,3)$ 成分，$(2,1)$, $(3,1)$ 成分は補題 5.1 から自動的に 0 になる．
- 第二基本形式の対称性から，補題 5.3 より $(1,4)$ 成分，$(4,1)$ 成分は 0 になる．
- $(4,2)$ 成分，$(4,3)$ 成分（$(2,4)$ 成分，$(3,4)$ 成分）が 0 になるための必要十分条件は，(5.7)，すなわち h がコダッチ方程式を満たすことである．
- 補題 5.2 と $\kappa = 1/c^2$ に注意すれば，$(2,3)$ 成分，$(3,2)$ 成分が 0 になるための必要十分条件は，(5.8) であることがわかる．

したがって $\kappa > 0$ の場合の結論が得られた．

$\kappa = 0$ の場合は，方程式 (4.12)，$\kappa < 0$ のときは方程式 (4.17) の適合条件を調べればすべての κ に対して結論が得られる（問題 V-1）． □

注意 5.7. はめ込み $f\colon S \to M^3(\kappa)$ の第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 h を，局所座標系を用いて

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad h = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と表しておく[3]．すると 式 (5.8) の右辺は

$$\frac{h_1^1h_2^2 - h_2^1h_1^2}{g_1^1g_2^2 - g_2^1g_1^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{5.11}$$

[3]「曲線と曲面」第 II 章における表示のしかた．

と書くことができる（問題 V-2）．この量のことを，曲面の**外的曲率**[4] という．ガウスの驚異の定理（「曲線と曲面」定理 11.2）は，ユークリッド空間の曲面の誘導計量（第一基本形式）から定まる（内的な）ガウス曲率は外的曲率と一致する，という主張である．曲率が零でない空間形の曲面では，内的曲率と外的曲率が，入れ物となる空間 $M^3(\kappa)$ の曲率の分だけ異なる，というのが式 (5.8) である．

定理 5.8. $\mathbb{R}^2$ の単連結領域 U 上にリーマン計量 ds^2 と 2 階の対称テンソル h が与えられていて，定数 κ に対して次が成り立つとする：

- h は定義 5.5 の意味でのコダッチ・テンソルである．
- リーマン計量 ds^2 のガウス曲率 K は (5.8) を満たす．

このとき，はめ込み $f\colon U \to M^3(\kappa)$ で，その誘導計量（第一基本形式）が ds^2，第二基本形式が h となるものが存在する．さらに，このようなはめ込み f は $M^3(\kappa)$ の等長変換を除いて唯一である．

定理 5.8 の証明（存在）第 1 段． リーマン計量 ds^2 に関する U 上の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，(5.2), (4.13) のように g_j^i, h_j^i を定め，接続形式 $\mu = \alpha\,du + \beta\,dv$ を用いれば，方程式 (4.12)（$\kappa = 0$ のとき），(4.17)（$\kappa < 0$ のとき），(5.9)（$\kappa > 0$ のとき）を考えることができる．命題 5.6 の証明で見たように，これらの方程式が適合条件をみたすための必要十分条件は，h がコダッチ・テンソルであることと (5.8) が成り立つことである．したがって，これらの方程式を満たす $\mathcal{F}$ が存在する．とくに，命題**??**（$\kappa \geqq 0$ の場合），問題 I-1（$\kappa < 0$ の場合）から，

$$\mathcal{F}\colon U \to \begin{cases} \mathrm{SO}(4) & (\kappa > 0) \\ \mathrm{SO}(3) & (\kappa = 0) \\ \mathrm{SO}_+(3,1) & (\kappa < 0) \end{cases}$$

となる． □

定理 5.8 の証明（存在）第 2 段; $\kappa > 0$ の場合． 第 1 段で得られた $\mathcal{F}\colon U \to \mathrm{SO}(4)$ を $\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と列ベクトルに分解すると，各 $(u,v) \in U$ においてこれらは $\mathbb{R}^4$ の正規直交系をなす．そこで，

$$f := \frac{1}{c}\boldsymbol{a}_0 \colon U \longrightarrow S^3(c^2)$$

[4] 外的曲率（外在的曲率）: the extrinsic curvature.

とおくと，これが求めるものである．実際，方程式 (5.9) から

$$df\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = f_u = \frac{1}{c}(\boldsymbol{a}_0)_u = g_1^1\boldsymbol{a}_1 + g_1^2\boldsymbol{a}_2, \quad df\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = f_v = g_2^1\boldsymbol{a}_1 + g_2^2\boldsymbol{a}_2$$

が成り立つ．とくに (5.5) からこれら 2 つのベクトルは 1 次独立なので，f ははめ込みになることがわかる．さらに (5.3) から

$$df(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \qquad df(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a}_2$$

である．とくに $df(T_{\mathrm{P}}U)$ は $\boldsymbol{a}_1(\mathrm{P})$, $\boldsymbol{a}_2(\mathrm{P})$ で張られる $T_{f(\mathrm{P})}S^3(1/c^2)$ の 2 次元部分空間である．ここで $T_{f(\mathrm{P})}S^3(1/c^2) = \boldsymbol{a}_0^{\perp}$ に注意すれば，$\boldsymbol{a}_3$ は f の単位法線ベクトル場を与え，

$$D_{\partial/\partial u}\boldsymbol{a}_1 = (\boldsymbol{a}_1)_u = -g_1^1\boldsymbol{a}_0 - \alpha\boldsymbol{a}_2 + h_1^1\boldsymbol{a}_3, \dots$$

が成り立つ．このことから h は f の第二基本形式であることがわかる．$\kappa < 0$ の場合も (4.17) に対して同様な議論をすればよい． □

定理 5.8 の証明（存在）第 2 段; $\kappa = 0$ の場合． ユークリッド空間の曲面の場合は，適合枠 $\mathcal{F}$ が f の情報を直接もっていないので，少し議論が複雑になる．$\mathcal{F} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ として，

$$\omega := (g_1^1\boldsymbol{a}_1 + g_1^2\boldsymbol{a}_2)du + (g_2^1\boldsymbol{a}_1 + g_2^2\boldsymbol{a}_2)dv$$

とおく．$\mathcal{F}$ が方程式 (4.12) の解であることと，補題 5.1 から ω が（ベクトル値の）閉形式（$d\omega = 0$）となるので，ポアンカレの補題から $df = \omega$ となる $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ が存在する．これが求める曲面である． □

定理 5.8 の証明（一意性）; $\kappa > 0$ の場合． 条件を満たす 2 つのはめ込み $f\colon U \to S^3(\kappa)$, $\tilde{f}\colon U \to S^3(\kappa)$ が存在するとする．このとき，誘導計量は共通だから，共通の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとることができ，g_j^i は共通にできる．さらに，f, $\tilde{f}$ の単位法線ベクトル場をそれぞれ ν, $\tilde{\nu}$ とすると，第二基本形式は共通なので h_j^i も共通となる．すなわち f, $\tilde{f}$ に対応する適合枠 $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ は同じ方程式 (5.9) を満たす．必要なら $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を入れ替えて $\det\mathcal{F} = 1$ としてよい．もしも $\det\tilde{\mathcal{F}} = -1$ ならば，対角行列 $(1, 1, 1, -1)$ を左から掛けることで $\det\tilde{\mathcal{F}} = 1$ としてよい．この状況で，$\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{F}}$ は共通の方程式 (5.9) を満たしているので，$\tilde{\mathcal{F}} = P\mathcal{F}$ $(P \in \mathrm{SO}(4))$ となる行列 P が存在する．とくに $\tilde{f} = Pf$ となるので，結論が得られたことになる．$\kappa < 0$ の場合も同様．$\kappa = 0$ の場合は，演習問題とする（問題 V-3）． □

注意 5.9. 条件 (5.7)（すなわち，テンソル h がコダッチ・テンソルであること）のことを**コダッチ方程式**または**コダッチ・マイナルディ方程式**という．リーマン幾何を学んだ人は，この条件が,「h を共変微分して得られる 3 階のテンソル ∇h が対称テンソルである」ことと同値であることを容易に示せるはずである．

一方，条件 (5.8) は**ガウス方程式**とよばれる．

問　題　V

V-1 命題 5.6 の $\kappa < 0$ の場合を示しなさい.

V-2 式 (5.11) を示しなさい.

V-3 定理 5.8 の一意性の部分の $\kappa = 0$ の場合を証明しなさい.

V-4 $\mathbb{R}^2$ の領域 U 上の C^∞-級関数 $\theta = \theta(u, v)$ が $0 < \theta(u, v) < \pi$ を満たしているとする．このとき

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta \, du \, dv + dv^2$$

は U 上のリーマン計量を与える．このとき，定数 M に対して

$$h := 2M \sin\theta \, du \, dv$$

とおく.

(1) ds^2 の正規直交基底の場を求めなさい.

(2) ds^2 と h は，コダッチ方程式を満たすことを示しなさい.

(3) $M^3(\kappa)$ の曲面に対するガウス方程式が成り立つための条件を求めなさい.