VI. 平均曲率一定曲面の等長対応

■ 平均曲率　空間形 $M^3(\kappa)$ の曲面 $f\colon S\to M^3(\kappa)$ の誘導計量を ds^2，第二基本形式を h と書くとき，

$$H := \frac{1}{2}\bigl(h(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)+h(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)\bigr) \tag{6.1}$$

とおく．ここで $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ は (S,ds^2) の正規直交基底の場である．

補題 6.1. 式 (6.1) の右辺は正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ のとり方によらない．

証明． (3.4) を用いればよい． □

定義 6.2. 式 (6.1) で定義される曲面上の関数 H を**平均曲率** [1] という．

補題 6.3. 曲面 $f\colon S\to M^3(\kappa)$ の局所座標近傍 $(U;u,v)$ 上で正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ をとり，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g} &:= \begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 \\ g_1^2 & g_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle\partial/\partial u,\boldsymbol{e}_1\rangle & \langle\partial/\partial v,\boldsymbol{e}_1\rangle \\ \langle\partial/\partial u,\boldsymbol{e}_2\rangle & \langle\partial/\partial v,\boldsymbol{e}_2\rangle\end{pmatrix},\\ \boldsymbol{h} &:= \begin{pmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h(\partial/\partial u,\boldsymbol{e}_1) & h(\partial/\partial v,\boldsymbol{e}_1) \\ h(\partial/\partial u,\boldsymbol{e}_2) & h(\partial/\partial v,\boldsymbol{e}_2)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.2}$$

とおく．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は誘導計量 ds^2 から定まる S の接空間の内積，h は第二基本形式である．このとき，ガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K-\kappa = \frac{\det\boldsymbol{h}}{\det\boldsymbol{g}},\qquad H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g}^{-1}) \tag{6.3}$$

を満たす．

証明． (6.3) の第一式はガウスの方程式 (5.8) そのものである．第二式を示そう．g_j^i の定義から

$$\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right) = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{g}.$$

このことから，$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$（$E=\langle\partial/\partial u,\partial/\partial u\rangle$, $F=\langle\partial/\partial u,\partial/\partial v\rangle$, $G=\langle\partial/\partial v,\partial/\partial v\rangle$）と書けば

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}$$

が成り立つ．とくに f がはめ込みならば左辺は正則行列なので，$\boldsymbol{g}$ は正則行列になる．とくに

$$\boldsymbol{g}^{-1} := \begin{pmatrix}\hat g_1^1 & \hat g_2^1\\ \hat g_1^2 & \hat g_2^2\end{pmatrix}$$

と書けば，

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = \left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\boldsymbol{g}^{-1}.$$

から

$$h(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{2}\hat g_i^k h_k^j,\qquad \text{すなわち}\qquad \begin{pmatrix}h(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & h(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\\ h(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) & h(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)\end{pmatrix} = \boldsymbol{h}\boldsymbol{g}^{-1}$$

となる．この行列のトレースが $2H$ であるから，結論が得られた． □

よく知られている平均曲率の幾何学的意味を説明しておく [2]．曲面 $f\colon S\to M^3(\kappa)$ の誘導計量（第一基本形式）ds^2 を

$$ds^2 = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

と表すとき，

$$dA := \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{6.4}$$

を曲面の**面積要素** [3] という．U の領域 $D\subset U$ で閉包 $\overline{D}$ がコンパクトなものに対して，

$$A(\overline{D}) = \int_{\overline{D}} dA = \iint_{\overline{D}}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

*) 2017 年 07 月 24 日 (2017 年 8 月 1 日訂正)

1) 平均曲率：the mean curvature, (6.1) の 1/2 をつけない流儀もある．

2) ここでは深入りしない．ユークリッド空間の極小曲面は，幾何学特論 F (2016 年度 2Q) で解説した．

3) 面積要素：the area element；面積：the area.

を $\overline{D}$ の**面積**という．第一基本量の変換法則と重積分の変数変換の公式から，面積は局所座標系のとり方によらない [4]．曲面 $f\colon S \to M^3(\kappa)$ の**変分** [5] とは，はめ込みの族 $\{f_t; -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ で

- $f_0 = f$,
- $S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (\mathrm{P}, t) \mapsto f_t(\mathrm{P}) \in S$ は C^∞-級写像.

を満たすものである．

変分 $\{f_t\}$ が**コンパクト台をもつ**とは，あるコンパクト集合 $C \subset S$ が存在して，任意の $\mathrm{P} \in S \setminus C$ と $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して，$f_t(\mathrm{P}) = f_0(\mathrm{P})$ が成り立つ，すなわち，コンパクト集合の外では $f_t = f$ が成り立つことである．さらに $\{f_t\}$ が（無限小で）**体積を保つ**とは，

$$\int_S \left\langle \left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}, \nu \right\rangle dA = 0$$

となることである．ここで ν は f の単位法線ベクトル場，dA は面積要素である．

曲面 f の変分 $\{f_t\}$ がコンパクトな台 $\overline{D}$ をもつとき，$\overline{D}$ に対応する曲面 f_t の部分の面積を $A(t)$ と書くと，

以上の準備のもと，次が成り立つ：

- 曲面 $f\colon S \to M^3(\kappa)$ の任意のコンパクトな台をもつ変分 $\{f_t\}$ に対して $A'(0) = 0$ が成り立つならば，f の平均曲率は恒等的に 0 である．
- 曲面 $f\colon S \to M^3(\kappa)$ の任意のコンパクトな台をもち体積を保つ変分 $\{f_t\}$ に対して $A'(0) = 0$ が成り立つならば，f の平均曲率は定数である．

このことから，平均曲率が恒等的に 0 である曲面のことを**極小曲面** [6] とよぶ．また，平均曲率一定曲面のことを **CMC-曲面**ということがしばしばある．

今回の目標は次の定理である：

定理 6.4 (Lawson, 1970). 単連結領域 U 上で定義された曲面 $f\colon U \to M^3(\kappa_0)$ の平均曲率が一定 H であるとき，$H^2 + \kappa_0 \geqq \kappa$ を満たす任意の実数 κ に対して，次を満たす曲面 $\tilde{f}\colon U \to M^3(\kappa)$ が存在する：

- $\tilde{f}$ の誘導計量は f の誘導計量と一致する．
- $\tilde{f}$ の平均曲率は $\tilde{H} = \sqrt{H^2 - (\kappa - \kappa_0)}$，とくに $\tilde{f}$ は平均曲率一定の曲面である．

[4] 梅原・山田「曲線と曲面（改訂版）」§6
[5] 変分：a variation.
[6] 極小曲面：a minimal surface

定理 6.4 から，異なる曲率をもつ空間形の中の平均曲率一定曲面の間の等長対応（誘導計量を保つ対応）が得られる．これを **Lawson 対応**とよぶことがある．

■ **線型代数からの準備**　正方行列 A に対して，その余因子行列を $\widetilde{A}$ と書く．行列式の余因子展開の公式から

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A)\,\mathrm{id} \qquad (\mathrm{id}\ は単位行列) \tag{6.5}$$

が成り立つ．とくに，A が正則行列なら

$$\widetilde{A} = (\det A)A^{-1} \tag{6.6}$$

である（クラメルの公式）．

補題 6.5. 任意の n 次正方行列 A, B に対して

(1) $\widetilde{(AB)} = \widetilde{B}\widetilde{A}$,

(2) $\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{n-2}A$．とくに $n = 2$ のときは $\widetilde{\widetilde{A}} = A$.

が成り立つ．

証明. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ で実数を成分とする n 次正方行列全体を表す [7] と，これは $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視できる．いま，

$$P\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \ni (A, B) \longmapsto P(A, B) = \widetilde{(AB)} - \widetilde{B}\widetilde{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

を考えると，P は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ 上で定義された n^2 個の n 次多項式の組である．とくに A, $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}); \det X \neq 0\}$ のときは，(6.6) から

$$P(A, B) = \widetilde{(AB)} - \widetilde{B}\widetilde{A} = \det(AB)(AB)^{-1} - ((\det B)B^{-1})((\det A)A^{-1}) = O$$

である．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の稠密な開集合であるから [8]，多項式 P は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上で恒等的に零．したがって (1) が成り立つ．また，(2) は正則行列に対しては成立するので，同様の議論で任意の行列に対して成立する．□

以下，2 次の正方行列の性質を述べる：

[7] ここでは簡単のため実係数としているが，複素係数でも全く同様に示せる．
[8] 証明は演習問題.

補題 6.6. 2 次正方行列全体の空間 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の変換

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto \widetilde{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

は線型変換である．さらに，任意の $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ に対して

$$\operatorname{tr}(A\widetilde{B}) = \operatorname{tr}(\widetilde{A}B) \tag{6.7}$$

が成り立つ．

証明． 行列 A の成分を (a_{ij}) と書くと，

$$\begin{aligned}\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+a_{22})-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & (a_{11}+a_{22})-a_{22}\end{pmatrix} \\ &= (\operatorname{tr} A)\,\mathrm{id} - A\end{aligned} \tag{6.8}$$

なので，$A \mapsto \widetilde{A}$ は線型．式 (6.8) を用いれば，

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\widetilde{A}B) &= \operatorname{tr}\big((\operatorname{tr} A\,\mathrm{id} - A)B\big) = \operatorname{tr}\big(\operatorname{tr} A B - AB\big) = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B - \operatorname{tr}(AB) \\ &= \operatorname{tr}(\widetilde{B}A)\end{aligned}$$

となり，結論が得られた． □

注意 6.7. 補題 6.6 は 3 次以上の正方行列に対しては成立しない．実際，n 次正方行列 A に対して $\widetilde{A}$ は A の成分の $(n-1)$ 次多項式である．また，

$$A = \mathrm{id}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

は (6.7) を満たさない．

系 6.8. 2 次正方行列 A, B に対して

$$\det(A+B) = \det A + \det B + \operatorname{tr}(A\widetilde{B}).$$

とくに B が正則行列なら

$$\det(A+B) = \det A + \det B + (\det B)\operatorname{tr}(AB^{-1}).$$

証明． 補題 6.6 から $A+B$ の余因子行列は $\widetilde{A}+\widetilde{B}$．したがって，(6.5) から

$$\begin{aligned}\det(A+B)\,\mathrm{id} &= (\widetilde{A}+\widetilde{B})(A+B) = \widetilde{A}A + \widetilde{A}B + \widetilde{B}A + \widetilde{B}B \\ &= (\det A)\,\mathrm{id} + (\det B)\,\mathrm{id} + \widetilde{A}B + \widetilde{B}A.\end{aligned}$$

この式のトレースをとれば，補題 6.6 から

$$2\det(A+B) = 2\det A + 2\det B + 2\operatorname{tr}(A\widetilde{B})$$

で結論を得る． □

■ 定理 6.4 の証明

補題 6.9. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の計量 ds^2 に関するコダッチ・テンソル h（定義 5.5）に対して

$$h_c := h + c\,ds^2 \qquad (c\text{ は定数})$$

で与えられる 2 階対称テンソル h_c もコダッチ・テンソルである．

証明． 補題 5.1 から，リーマン計量 ds^2 自体がコダッチ・テンソルである．コダッチ・テンソルの定義式 (5.7) は線型だから，結論が得られる． □

定理 6.4 の証明． 与えられた曲面 f の誘導計量を ds^2, 第二基本形式を h_0 と書くと，h_0 はコダッチ・テンソルで，正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を用いて (6.2) のように行列 $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h} =$ をとればガウス方程式

$$K = \kappa_0 + \frac{\det \boldsymbol{h}}{\det \boldsymbol{g}}$$

が成り立つ．ただし K は計量 ds^2 のガウス曲率である．ここで，定数 c を用いて，対称テンソル h_c を

$$h_c := h + c\,ds^2$$

と定めると，補題 6.9 から h_c はコダッチ・テンソルで，対応する行列 $\boldsymbol{h}_c$ は $\boldsymbol{h} + c\boldsymbol{g}$ と書ける．したがって，系 6.8 と (6.3) から

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{h}_c &= \det \boldsymbol{h} + c^2 \det \boldsymbol{g} + c\operatorname{tr}(\boldsymbol{h}\tilde{\boldsymbol{g}}) = \det \boldsymbol{h} + c^2 \det \boldsymbol{g} + c \det \boldsymbol{g} \operatorname{tr}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g}^{-1}) \\ &= \det \boldsymbol{h} + \det \boldsymbol{g}\big(c(c+2H)\big)\end{aligned}$$

が得られる．したがって K を ds^2 から定まるガウス曲率とすると，

$$\frac{\det \boldsymbol{h}_c}{\det \boldsymbol{g}} = \frac{\det \boldsymbol{h}}{\det \boldsymbol{g}} - c(c+2H) = K - \bigl(\kappa_0 + c(c+2H)\bigr)$$

が成り立つ．ここで，f が $M^3(\kappa_0)$ の曲面であることから，(6.3) の第一式が成り立つことを用いた．

いま H は定数だから，定数 c を

$$\kappa = \kappa_0 - c(c+2H) \tag{6.9}$$

を満たすようにとれば，組 (ds^2, h_c) は定数 κ に対して曲面論の基本定理 5.8 の仮定を満たすので，U の単連結性からはめ込み $\tilde{f}\colon U \to M^3(\kappa)$ で，誘導計量が ds^2，第二基本形式が h_c となるものが存在する．とくに $\tilde{f}$ の平均曲率は

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{h}_c\boldsymbol{g}^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{h}+c\boldsymbol{g})\boldsymbol{g}^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{h}\boldsymbol{g}^{-1}) + \frac{c}{2}\operatorname{tr}\mathrm{id} = H + c.$$

条件 $H^2 - (\kappa - \kappa_0) \geqq 0$ が成り立てば

$$c = -H + \sqrt{H^2 - (\kappa - \kappa_0)}$$

は式 (6.9) を満たすので，結論が得られる． □

定理 6.4 による定平均曲率曲面の間の対応を**ローソン対応**ということがある．ローソン対応の特別な場合として，

- ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の平均曲率 H をもつ単連結な曲面に対して，それと等長的な[9] $S^3(\kappa)$（$H^3(\kappa)$）の曲面で，平均曲率が $\sqrt{H^2-\kappa}$ となるものが存在する．
- ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の単連結な極小曲面に対して，それと等長的な，双曲空間 $H^3(-1)$ の平均曲率 1 の曲面が存在する．

例 6.10 (平面とホロ球面)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の平面は，$ds^2 = du^2 + dv^2$ となるような座標系 (u, v) をもち，ガウス曲率は $K = 0$，平均曲率は恒等的に 0 である．

これのローソン対応として得られる，双曲空間 $H^3(-1)$ の平均曲率 1 の曲面を**ホロ球面** [10] という（問題 VI-1）． ♢

[9] 誘導計量が一致する 2 つの曲面を「等長的」ということにする．
[10] ホロ球面 the horosphere

例 6.11 (球面内の小球面)**.** 球面 $S^3 = S^3(1)$ を

$$S^3 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\}$$

とする．定数 $m \in [0,1)$ に対して

$$\Pi_m := \{(x,y,z,m) \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

とおくと Π_m は $\mathbb{R}^4$ の超平面で，$\mathbb{R}^3$ と等長的である．

$$\Sigma_m := S^3 \cap \Pi_m$$

を S^3 の**小球面** [11] という．

小球面は S^3 の部分多様体（曲面）とみなせるが，一方 $\Pi_m (= \mathbb{R}^3)$ の曲面と見なすこともできる．とくに $\Sigma_m \subset \Pi_m$ とみなすと，これは半径 $\sqrt{1-m^2}$ の球面．ここで，Π_m の部分多様体とみなしても S^3 の部分多様体とみなしても誘導計量 ds^2 は同じだから，Σ_m のガウス曲率 K は，$\mathbb{R}^3$ の半径 $\sqrt{1-m^2}$ の球面のガウス曲率と一致する：

$$K = \frac{1}{1-m^2}.$$

点 $\mathrm{P} = (x,y,z,m)$ における Σ_m の（S^3 の曲面としての）単位法線ベクトルは

$$\nu = \frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}(x,y,z,0) + (0,0,0,\sqrt{1-m^2}).$$

で与えられる．とくに

$$d\nu = \frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}d\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}(x,y,z,0) + (0,0,0,m)$$

なので，第二基本形式 $h = -d\nu \cdot d\boldsymbol{x}$ は

$$\frac{m^2}{1-m^2}ds^2$$

となる．したがって，平均曲率は $m^2/(1-m^2)$ となる． ♢

例 6.12 (極小曲面と双曲空間の CMC-1 曲面)**.** ユークリッド空間の極小曲面は，リーマン面の（複素）正則関数を用いて表示する**ワイエルストラス表現公式** [12] が知られている．このことと，定理 6.4 より，双曲空間 $H^3(-1)$ の

[11] 小球面：a small sphere.
[12] 2016 年度幾何学特論 F

平均曲率 1 の曲面（CMC-1 曲面）についても正則データによる表現公式が存在することが期待される．実際，そのような表現公式が 得られている [13]．ローソン対応は局所的（単連結な領域での対応）であるが，大域的な幾何学を研究するのにこの表現公式が重要な役割を果たす [14]．

$\diamondsuit$

[13] R. Bryant, 1987.
[14] 梅原雅顕・山田光太郎「3 次元双曲型空間内の平均曲率 1 の曲面の幾何」，数学，47 巻 2 号，1995.

問　題　VI

VI-1　3 次元双曲空間 $H^3(-1)$ を

$$H^3(-1)=\{(t,x,y,z)\in\mathbb{R}^4_1 \mid -t^2+x^2+y^2+z^2=-1, t>0\}$$

と表し，

$$\Sigma := H^3(-1)\cap\{(t,x,y,z)\mid t-z=1\}$$

とする．

(1)　Σ は $H^3(-1)$ のなめらかな部分多様体（曲面）であることを示しなさい．

(2)　Σ はユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ と等長的であることを示しなさい（ヒント：(x,y) を座標系にとる）．

(3)　Σ の平均曲率を求めなさい．

VI-2　3 次元双曲空間 $H^3(-1)$ を

$$H^3(-1)=\{(t,x,y,z)\in\mathbb{R}^4_1 \mid -t^2+x^2+y^2+z^2=-1, t>0\}$$

と表し，定数 $m>1$ に対して

$$\Sigma_m := H^3(-1)\cap\{(m,x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

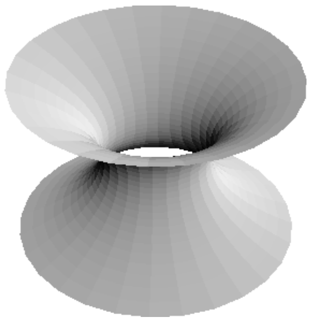
とする．

(1)　Σ_m は $H^3(-1)$ のなめらかな部分多様体（曲面）であることを示しなさい．

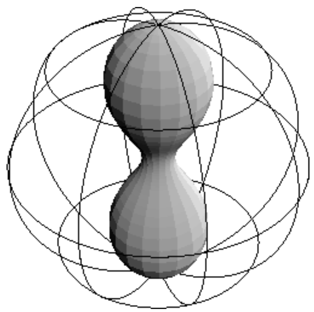
(2)　Σ_m のガウス曲率と平均曲率を求めなさい．（ヒント：$\{(m,x,y,z)\}$ は $\mathbb{R}^4_1$ の超平面で，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ と等長的である）．

(3)　Σ_m の平均曲率を求めなさい．

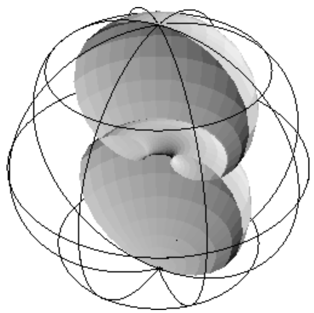
VI-3　（線型代数の問題）n 次正方行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ の階数を A の階数を用いて表しなさい．



ユークリッド空間の懸垂面（$H = 0$）



双曲空間の catenoid cousin（$H = 1$）



双曲空間の catenoid cousin（$H = 1$）