VII. 平均曲率一定曲面の構成

■ **等温座標系**

定義 7.1. 多様体 S 上の点 P の近傍の 2 つの局所座標系 $(u^1,\dots,u^n)$, $(x^1,\dots,x^n)$ の**向きが同調する**とは，座標変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）

$$\frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(u^1,\dots,u^n)}=\det\left(\frac{\partial x^j}{\partial u^k}\right)$$

が正となることである．とくに，S のアトラスで，すべてのチャートの向きが同調しているものがとれるとき S は**向き付け可能**であるといい，向きが同調しているアトラスの取り方を**向きづけ**という．

定義 7.2. 2 次元リーマン多様体 (S,ds^2) の局所座標系 (u,v) が**等温座標系**であるとは，計量 ds^2 が

$$ds^2=e^{2\sigma}(du^2+dv^2)\qquad(\sigma=\sigma(u,v)\text{ はなめらかな関数})\tag{7.1}$$

の形をしていることである．

命題 7.3. 2 次元リーマン多様体 (S,ds^2) の P の近傍における等温座標系 (u,v) が与えられたとき，別の座標系 (x,y) が等温座標系となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\pm\frac{\partial v}{\partial y},\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=\mp\frac{\partial v}{\partial x}\qquad(\text{複号同順})$$

が成り立つことである．とくに (x,y) が (u,v) の向きと同調する等温座標系となるための必要十分条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\tag{7.2}$$

が成り立つことである．

*) 2017 年 08 月 01 日

証明. リーマン計量が (u,v) 座標系で (7.1) のように書かれていたとする．このとき，

$$\begin{aligned}ds^2&=e^{2\sigma}(du^2+dv^2)\\&=e^{2\sigma}\bigl((u_x\,dx+u_y\,dy)^2+(v_x\,dx+v_y\,dy)^2\bigr)^2\\&=e^{2\sigma}\bigl((u_x^2+v_x^2)\,dx^2+2(u_xu_y+v_xv_y)\,dx\,dy+(u_y^2+v_y^2)\,dy^2\bigr)\end{aligned}$$

なので，(x,y) 座標系が等温座標系になるための必要十分条件は

$$u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2\tag{7.3}$$

$$u_xu_y+v_xv_y=0\tag{7.4}$$

となる．式 (7.4) から (u_x,v_x) と (u_y,v_y) は（$\mathbb{R}^2$ の標準内積に関して）直交する．$(x,y)\mapsto(u,v)$ が座標変換であることからこれら 2 つのベクトルはいずれも零ベクトルでないから，

$$(u_x,v_x)=k(v_y,-u_y)$$

となる零点をもたない実数値関数 k が存在する．これを (7.3) に代入すると，$k^2=1$ となり，前半の結論が得られる．とくに

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=u_xv_y-u_yv_x=k(v_y^2+u_y^2)$$

なので，座標変換のヤコビ行列式が正となるための必要十分条件は $k=1$ となることである．したがって後半が得られた． □

系 7.4. 2 次元リーマン多様体 (S,ds^2) 上の点 P の近傍における局所座標系 (u,v), (x,y) ともに等温座標系で向きが同調しているならば，写像

$$z:=x+\sqrt{-1}y\longmapsto w:=f(z)=u+\sqrt{-1}v$$

は複素平面の領域上で定義された正則関数で，その導関数 f' は零点をもたない．

証明. 仮定から，変換 $(x,y)\mapsto(u,v)$ は式 (7.2) を満たすが，これは，写像 $x+\sqrt{-1}y\mapsto u+\sqrt{-1}v$ に対するコーシー・リーマンの方程式に他ならない．したがって f は正則関数で，さらに

$$f'(z)=u_x+\sqrt{-1}v_x=u_y+\sqrt{-1}v_y$$

なので，$(x,y)\mapsto(u,v)$ が座標変換であることから $f'(z)\neq0$ となる． □

定理 7.5. 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) の各点の近傍で等温座標系が存在する．

このことの証明はやさしくない．たとえば,「曲線と曲面」（梅原・山田）の第 15 節を見よ．定理 7.5 は 3 次元以上のリーマン多様体に対しては成立しない．

■ リーマン面　複素 1 次元複素多様体のことを**リーマン面**[1] という．すなわち，リーマン面とは，アトラス $\{(U_\alpha; (u_\alpha, v\alpha))\}$ をもつ実 2 次元多様体 S で，$z_\alpha := u_\alpha + \sqrt{-1}v_\alpha$ によって座標関数を複素数に値をもつ関数とみなしたときに，座標変換 $z_\alpha \mapsto z_\beta$ が正則関数となるもののことである．

たとえば，球面

$$S^2 = \{\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |\boldsymbol{x}| = 1\}$$

上の 2 つの開集合 U, V を

$$U := S^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \qquad V := S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$$

とおき，

$$\begin{aligned} z\colon U \ni (x^1, x^2, x^3) &\mapsto z = \frac{1}{1-x^3}(x^1 + \sqrt{-1}x^2) \in C, \\ w\colon V \ni (x^1, x^2, x^3) &\mapsto z = \frac{1}{1+x^3}(x^1 - \sqrt{-1}x^2) \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{7.5}$$

なる写像を考えると $z\colon U \to \mathbb{C}$, $w\colon V \to \mathbb{C}$ は全単射で，

$$w \circ z^{-1}\colon z \mapsto w = \frac{1}{z} \tag{7.6}$$

となる．したがって，$\{(U; z), (V; w)\}$ により S^2 に 1 次元複素多様体すなわちリーマン面の構造が入る．このようにして得られたリーマン面を**リーマン球面**[2] よぶ．ここで点 $(0,0,1)$，すなわち $(U; z)$ 座標系で表示できない球面上の点は $w = 0$ に対応する．この点に対して (7.6) を「無理やり」適用すれ

[1] リーマン面：a Riemann surface.
[2] リーマン球面：the Riemann sphere

ば $w = 0$，すなわち $(0,0,1)$ に対応する点は，z 平面の “無限遠点” と見なすのが自然と思われる．この観察から，リーマン球面はしばしば

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

と書かれる[3]．

次はリーマン面の基本的な性質だが，ここでは証明を与えない．適当な複素解析の教科書を参照されたい：

定理 7.6 (Koebe の一意化定理)**.** 単連結リーマン面は，複素多様体の同型を除いて，リーマン球面，複素平面 $\mathbb{C}$，単位円板 $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ に限る[4]．

定理 7.7. 向き付けられた 2 次元リーマン多様体 (S, ds^2) には，次のようなリーマン面の構造が入る：任意の複素座標 $z = u + \sqrt{-1}v$ に対して (u, v) は S の等温座標系である．

証明. 定理 7.5 より，任意の点 P の近傍で，等温座標系が存在する．とくに S が向き付けられているので，必要ならば 2 つの実の座標関数の順番を入れ替えて，向きに同調する等温座標系をとる．これにより，互いに向きが同調する等温座標系によって S を覆うことができるので，系 7.4 から，座標変換が正則関数で与えられる複素座標によるアトラスが得られる． □

■ リーマン面の正則関数と微分形式　リーマン面 S は実 2 次元多様体でもあるので，$\mathrm{P} \in S$ に対して，接空間 $T_{\mathrm{P}}S$ は実 2 次元のベクトル空間である．このベクトル空間の係数を複素数まで拡張したものを $T_{\mathrm{S}}S$ の**複素化**[5] といい，$T^{\mathbb{C}}_{\mathrm{P}}S$，$T_{\mathrm{P}}S \otimes \mathbb{C}$ などと書く．紛らわしくないときは $T_{\mathrm{P}}S$ と書くことも多い．もうすこし正確にのべると以下の通り：$z = x + \sqrt{-1}y$ を P の近傍の複素座標系とするとき，$T_{\mathrm{P}}S$ は $\{(\partial/\partial x)_{\mathrm{P}}, (\partial/\partial y)_{\mathrm{P}}\}$ で生成される 2 次元の

[3] 1 次元複素射影空間（射影直線）の同次座標を $[z_1 : z_2]$ と書くと非同次座標 $z := z_2/z_1$ と $w = z_1/z_2$ の間の座標変換は (7.6) に対応する．すなわち，リーマン球面は 1 次元複素射影空間と見なすことができる．したがって，リーマン球面はしばしば $P^1(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{P}^1$ などとも書かれる．
[4] 単位円板 D と $\mathbb{C}$ はリーマン面としては同型ではない．実際，もし，正則同相写像 $\Phi\colon \mathbb{C} \to D$ が存在したとすると，$f(z) = z$ として $f \circ \Phi$ を考えるとこれは $\mathbb{C}$ 上の正則関数で，$\mathbb{C}$ 上有界となる．これは Liouville の定理に矛盾する．
[5] 複素化：complexification

ベクトル空間だが，

$$T_{\mathrm{P}}^{\mathbb{C}}S := \left\{ a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\mathrm{P}} + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\mathrm{P}} \,;\, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

である [6]．同様に余接空間 $T_{\mathrm{P}}^{*}S$ の複素化

$$T_{\mathrm{P}}^{*\mathbb{C}}S := \{a(dx)_{\mathrm{P}} + b(dy)_{\mathrm{P}} \,;\, a, b \in \mathbb{C}\}$$

も定義される．したがって，ベクトル場や微分形式も係数が複素数値関数となるように拡張できる．

ここで，複素座標 $z = x + \sqrt{-1}y$ を用いて

$$dz := dx + \sqrt{-1}dy, \qquad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy$$

と定めることにする．この双対を考えることで

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

が得られる．これを用いると，

$$T_{\mathrm{P}}^{\mathbb{C}}S = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\mathrm{P}}, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)_{\mathrm{P}} \right\}, \quad T_{\mathrm{P}}^{*\mathbb{C}}S = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{(dz)_{\mathrm{P}}, (d\bar{z})_{\mathrm{P}}\}$$

となることがわかる．

リーマン面 S 上の関数 f が**正則** [7] であるとは，複素局所座標 z で表したときに，複素変数 z に関する正則関数となることである．この条件は，複素座標のとり方によらない．

ベクトル場 $\partial/\partial z$，$\partial/\partial\bar{z}$ は S 上の複素数値関数に作用することができるが，

補題 7.8 (コーシー・リーマンの方程式)．リーマン面 S 上の関数 f が正則であるための必要十分条件は，各点 P の近傍の複素座標 z に関して

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

が成り立つことである．

[6] きちんとした扱いは複素多様体の教科書を見よ．
[7] 正則：holomorphic

証明． 実部と虚部にわけて $z = x + \sqrt{-1}y$, $f(z) = w = u + \sqrt{-1}v$, とすると，$u$, v は (x, y) の 2 変数関数で，

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y} \\
&= \frac{\partial(u + \sqrt{-1}v)}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial(u + \sqrt{-1}v)}{\partial y} \\
&= (u_x - v_y) + \sqrt{-1}(v_x + u_y)
\end{aligned}$$

となる．この右辺が恒等的に 0 となるための必要十分条件は $u_x = v_y$ かつ $v_x = -u_y$ が成り立つことだが，これはコーシー・リーマンの方程式にほかならない． □

リーマン面 S 上の 2 階対称テンソル場

$$h = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \qquad z = u + \sqrt{-1}v$$

を，複素座標 z を用いて

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{4}L(dz + d\bar{z})^2 - \frac{\sqrt{-1}}{2}M(dz + d\bar{z})(dz - d\bar{z}) - \frac{1}{4}N(dz - d\bar{z})^2 \\
&= q\,dz^2 + 2t\,dz\,d\bar{z} + \bar{q}\,d\bar{z}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

と書く．ただし

$$q := \frac{1}{4}\big((L - N) - \sqrt{-1}M\big), \qquad t := \frac{L + N}{4}$$

である．このとき，式 (7.7) の右辺第 1 項 $q\,dz^2$ を h の $(2, 0)$-パートといい $h^{(2,0)}$ と書く．

補題 7.9. $h^{(2,0)}$ は複素座標のとり方によらない．

証明． 別の複素座標 w をとり，座標変換 $z \mapsto w$ を考えると，これは正則関数なので，補題 7.8 から $\partial w/\partial\bar{z} = 0$．したがって

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}\,dz = w'\,dz, \qquad d\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} = \overline{w'}\,d\bar{z}$$

となる．したがって，dw と dz，$d\bar{w}$ と $d\bar{z}$ はそれぞれ一次従属なので，dz^2 の部分は dw^2 の部分に対応する． □

■ 等温座標系におけるガウス・コダッチ方程式 曲面論に戻ろう．定曲率 κ の空間形 $M^3(\kappa)$ の曲面

$$f\colon S \longrightarrow M^3(\kappa)$$

が与えられているとする．ただし S は向き付けられた 2 次元多様体とする．このはめ込み f による誘導計量（第一基本形式）ds^2 は S 上のリーマン計量を与えるので，定理 7.5 より，各点 $\mathrm{P}\in S$ の近傍で等温座標系をとることができる．以下，S の座標系 (u,v) が等温座標系で，

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2+dv^2) \qquad \sigma=\sigma(u,v)$$

と書けているとする．このとき，

$$\boldsymbol{e}_1 := e^{-\sigma}\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \boldsymbol{e}_2 := e^{-\sigma}\frac{\partial}{\partial v} \tag{7.8}$$

とおけば，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ は正規直交基底の場となっている．その双対基底の場は

$$\omega^1 = e^{\sigma}\,du, \qquad \omega^2 = e^{\sigma}\,dv \tag{7.9}$$

となっている．

補題 7.10. (S,ds^2) のレビ・チビタ接続の，式 (7.8) の $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に関する接続形式は

$$\mu = \sigma_v\,du - \sigma_u\,dv \tag{7.10}$$

また，ガウス曲率は

$$K = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv}) \tag{7.11}$$

で与えられる．

証明． 式 (7.9) から，

$$d\omega^1 = -\sigma_v e^{\sigma}\,du\wedge dv = \omega^2\wedge(\sigma_v\,du), \quad d\omega^2 = \sigma_u e^{\sigma}\,du\wedge dv = -\omega^1\wedge(-\sigma_u\,dv)$$

なので，μ を (7.10) とおくと，$d\omega^1=\omega^2\wedge\mu$, $d\omega^2=-\omega^1\wedge\mu$ を満たす．このような μ は唯一なので，補題**??** から μ が接続形式になる．

さらに

$$d\mu = (-\sigma_{uu}-\sigma_{vv})\,du\wedge dv = -e^{-2\sigma}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})\omega^1\wedge\omega^2$$

なので，ガウス曲率が (7.13) となることがわかる． □

以上の状況で，第二基本形式を

$$h = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

と書き，(6.2) により g^i_j, h^i_j を定めると，

$$\boldsymbol{g} := \begin{pmatrix} g^1_1 & g^1_2 \\ g^2_1 & g^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sigma} & 0 \\ 0 & e^{\sigma} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{h} := \begin{pmatrix} h^1_1 & h^1_2 \\ h^2_1 & h^2_2 \end{pmatrix} = e^{-\sigma}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

となる．これらから，次が容易にわかる：

命題 7.11. 以上の状況で，命題 5.6 のコダッチ方程式は

$$L_v - M_u = \sigma_v(L+N), \qquad N_u - M_v = \sigma_u(L+N), \tag{7.12}$$

ガウス方程式は

$$\sigma_{uu}+\sigma_{vv} = -e^{2\sigma}\kappa - e^{-2\sigma}(LN-M^2) \tag{7.13}$$

と同値である．

ここで，座標系 (u,v) に対応する複素座標 $z=u+\sqrt{-1}v$ を考えると，

系 7.12. 複素座標 $z=u+\sqrt{-1}v$ を用いれば，コダッチ方程式 (7.12) は

$$\frac{\partial q}{\partial\bar z} = \frac14 e^{2\sigma}\frac{\partial H}{\partial z} \tag{7.14}$$

と同値である．また，ガウス方程式 (7.13) は

$$4\frac{\partial^2\sigma}{\partial z\partial\bar z} = -e^{2\sigma}(4|q|^2+\kappa) - e^{-2\sigma}H^2 \tag{7.15}$$

と同値である．ただし

$$H = \frac{e^{2\sigma}}{2}(L+N), \qquad q = \frac{1}{4}(L-N) - \frac{\sqrt{-1}}{2}M \tag{7.16}$$

である．

注意 7.13. 式 (7.16) の H は平均曲率で，$q\,dz^2 = h^{(2,0)}$ を満たす．

■ ホップの定理 空間形の曲面 $f\colon S \to M^3(\kappa)$ に対して，点 $\mathrm{P} \in S$ が**臍点**[8)]であるとは，第一基本形式 ds^2 と第二基本形式 h の P における値が平行となることである．これは，等温座標形のもとでは (7.16) の q が零となることと同値である．すべての点が臍点であるような曲面を**全臍的**とよぶ．$\mathbb{R}^3$ の全臍的曲面は平面か球面に限る（「曲線と曲面」命題 9.6）．一般に $M^3(\kappa)$ の全臍的曲面は，

- $\kappa > 0$ のとき，球面 $S^3(\kappa)$ と平面の共通部分である．
- $\kappa < 0$ のとき，双曲空間 $H^3(\kappa)$ と $\mathbb{R}^4_1$ の平面 Π との共通部分である．とくに Π が空間的なら，曲面は球面の一部である．

次の定理は「曲線と曲面」の §16 で示したものである．

定理 7.14 (Hopf, 1951)**.** 空間形 $M^3(\kappa)$ の平均曲率一定な閉曲面 $f\colon S \to M^3(\kappa)$ で，S が球面と同相なものは，全臍的である．

証明. S に第一基本形式によりリーマン面の構造を与える．仮定より S は球面に同相なので，一意化定理（定理 7.6）から S はリー　マン球面である．そこで，$S = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に (7.5) のような座標 z, w を入れ，第二基本形式 h の $(2,0)$ パートを

$$q\,dz^2 = \tilde{q}\,dw^2 = h^{(2,0)}$$

と書くことにする．ここで平均曲率 H が一定であることから，コダッチ方程式 (**??**) より

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = 0$$

8) 臍点（せいてん）：an umbilic point

が成り立つ．したがって定理**??** から q は z の正則関数．とくに，座標のとり方から，z-平面（$\mathbb{C}$ 全体）で定義された正則関数である．同様に $\tilde{q}$ は w-平面全体で定義された正則関数．

ここで

$$\tilde{q}\,dw^2 = \tilde{q} d\left(\frac{1}{z}\right)^2 = \tilde{q}\frac{dz^2}{z^4}$$

なので，

$$q = \frac{\tilde{q}}{z^4} = w^4\tilde{q}.$$

この式で $z \to \infty$，すなわち $w \to 0$ の極限をとると，右辺は $0 \times \tilde{q}(0) = 0$ に収束するので

$$\lim_{z\to\infty} q(z) = 0. \tag{7.17}$$

したがって q は $\mathbb{C}$ 全体で定義された有界な正則関数なので，Liouville の定理より定数，とくに (7.17) より，q は恒等的に 0 にならなければならない．’故に，曲面は全臍的である． □