2018 年 4 月 13 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 2

お知らせ

- 提出物は返却いたします．なお，赤字で書かれているコメントは山田自身のためのメモですので，読めなくても気にしないでください．ご質問，ご意見に関するコメントはこの資料にあります．
- 次回，4 月 16 日（月）の提出課題からは，キーワードを電子メイルでお送りします．東工大 OCW から受講登録者へのメイル一斉送信機能を使いますので，週末までに東工大メイルアドレス（いわゆる m アドレス）をとっておいてください．
- 昨日午後に，現在メイルアドレスを登録している方々には上記の内容のメイルをお送りしています．

前回までの訂正

- 板書（終わりの方）：$\sec x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
- 有理数の説明で 整数/整数 の分母は「0 でない整数」とすべき，とのご指摘があります．ごもっともです（分母が 0 のときのときは数を表していないので「整数/整数 と表せる数」となっていないわけで，説明として誤っていない，と言い張ることもできます）．
- 講義の「講」の筆順が違うというご指摘がありました．ごもっともです．
- 「メイル」「クレイム」という表記が気になった方がいらっしゃいました．片仮名表記のゆらぎの範疇だと思います．厳密には書き分けていませんが，山田は二重母音をこのように表す頻度が多いと思います．
- 講義資料 1, 1 ページ「重要なポインタ」の 3 項目,「東工大 OCW」が「東工大」となっている，というご指摘が複数ありました．申し訳ありません．印刷のかすれです．
- 講義資料 1, 3 ページ，11 行目：翌々日 ⇒ 翌日
- 講義ノート, 4 ページ，7 行目：$\mathbb{R}^2$ の部分集合 ⇒ 座標平面の部分集合（注：$\mathbb{R}^2$ で間違ってはいないが，この記号は次の節で定義されるので）．
- 講義ノート, 4 ページ，8 行目：$\{(x, f(x)) \,|\, x \in I\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\} \subset$ (座標平面)
- 講義ノート, 4 ページ，9 行目：座標平面 $\mathbb{R}^2$ ⇒ 座標平面
- 講義ノート, 6 ページ，7 行目：$x = \operatorname{Sin}^{-1} y \Rightarrow x = \sin y$

授業に関する御意見

- 試験に出るような形式の問題の演習を多く行ってほしい．できることなら参考の為，去年の定期試験の問題を配布してほしい．
  山田のコメント： なぜ?
- 問題を解く時間も入れてほしい． **山田のコメント：** 講義時間外にやるものだと思います．演習の時間もありですね．
- 早く微分，積分っぽいことをしたい．物理で微分方程式をやっている． **山田のコメント：** 勝手に勉強進めてもいいんです．
- 大学での微積は高校の微積とまた違って難しいですね．定義も初めて見るようなものなので覚えていきたいです．
  山田のコメント： ステレオタイプ的な感想ですが，講義時間には「高等学校で習った」と何回も述べています．
- 有理数・実数の定義を確認するきっかけになりました． **山田のコメント：** よかった．
- 部分集合 $\subset$ や log を ln と書くなど，多数派の書き方を教えてくださるので良かったです．
  山田のコメント： コミュニケーション・ツールですので．
- 説明がゆっくりだったので理解しやすかった． **山田のコメント：** はい．
- 授業はとてもわかりやすく楽しかったです． **山田のコメント：** はい．

- 基礎的な事柄から教えてもらうことができたので，理解がより深まって良かった．引き続きよろしくお願いします．
  山田のコメント： こちらこそ．
- はじめのパソコンの機材の手間が気になったけれど授業は面白かった．テスト関数の定義域を $\mathbb{Q}$ にしてほしい．
  山田のコメント： テスト関数とは何ですか？（実は数学的に意味のある定義がある用語ですが，たぶんあなたが考えているものと違います）．
- プロジェクターが光の関係で見えにくい所がありました． **山田のコメント：** Sorry.
- 日程表の VII の説明がすこしわかりにくかったです．スクリーンにパソコンの画面を映す時，お手数ですが黒板の電気を消して下さい．見にくかったです．黒板の字はとても見やすかったです．
  山田のコメント： スクリーンの件，了解．日程表の VII は，近くなったらまた詳細を説明します．
- 逆三角関数や，余接，正割，余割は新しい考え方で，まだ違和感をおぼえてしまうので，はやくなれたいです．最後の黒板の下の方がみにくかったので，２枚の板の位置交換をしてほしかったです．
  山田のコメント： 黒板の位置，注意します．この程度で「新しい考え方」と思わないでくださいね．
- 授業では通路側の席に座っている人に聞くことが多いですか? 突然聞かれたときに答えることができるか不安です．
  山田のコメント： あて方はなにも考えていません．答えることができなくても全く構いません（むしろネタにできる）．
- 質問が分かるときは答えたいし，そうじゃないときは答えたくないので，指名制より挙手制の方がうれしいです．後，どうでもいいですが，個人的には $\mathrm{Sin}^{-1} x$ より $\arcsin x$, $\csc x$ は $\operatorname{cosec} x$ と書くのが好きです．
  山田のコメント： 前半もどうでもよいと思う．答えたくない人に答えてもらうのが「アクティブラーニング」かと．後半，好き嫌いはともかく，文脈にあわせて使いましょう．
- 話しがそれることが多いように思います． **山田のコメント：** はい．
- 時々おっしゃられる雑談も非常にためになることをおっしゃっていたので，次もどのような話が聞けるか楽しみです．
  山田のコメント： 期待しないでください．
- まめ知識やよくわからない冗談をいれてくるところが面白いです．また $\mathrm{Sin}^{-1} x$ のときに，S が大きな声だったので目が覚めた人が結構いたと思います．昨日は眠くありませんでしたが，抑揚をつけてくださるのは助かります．これからもよろしくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ．
- 伝わらないネタはちゃんと解説して下さい． **山田のコメント：** 野暮では?
- ごくまれに字がくずれて読みにくいことがあるので，改善していただけると助かります． **山田のコメント：** 了解．
- 英語で書く時はなるべく見やすいように書いてほしいです．つづりが不安なときがあります．
  山田のコメント： 山田はいつも不安です．少し注意はしているのですが．
- 英語も交えた講義だったので，記号の意味がすんなりと理解できて良かったです． **山田のコメント：** そうですね．
- 声がききとりやすいです． **山田のコメント：** どうも．
- マイクの持ち方がかわいいですね． **山田のコメント：** そう言われたのは初めてです．
- ニヤニヤしていて気持ち悪くて面白いです． **山田のコメント：** そうですか．
- 話し方に違和感があります． **山田のコメント：** どんなところが?
- 高校のときの先生（数学系）に雰囲気似ていらしゃって楽しいです．キーワードについて：嫌がられている名前を言うのは好きではありません． **山田のコメント：** 昔「嫌いなものを食べるのが好き」という人がいたような．
- どのように予習・復習をすれば効果的な学習になるかを示して頂きたいです．
  山田のコメント： あなたがどのような性向かわかりませんので何とも言えません．少なくとも「言葉の意味」をきちんとおさえてほしいですね．
- 教科書と講義内容は毎回確認すべきでしょうか?
  山田のコメント： 講義内容は毎回確認すべき．教科書は必要に応じて調べるのに使ってください．
- 基本的な概念は強調したいいと思います． **山田のコメント：** そうですね．
- 先生の板書の内容ははっきり区分していただければ，もっと理解しやすくなれると思います．どうぞよろしくお願いします．
  山田のコメント： 具体的にはどうすればよいでしょう．
- 黒板の板書が横に長く，ノートに書きづらいです．
  山田のコメント： 黒板に書いた通りの配置で書かなければならない理由はないのでは?
- 板書の仕方が分からなかった．
  山田のコメント： 板書する必要はないのでは？（注：山田は「板書」という語の意味を「黒板に書くこと」と理解しています．あなたが講義時間中に黒板に書くことはないのでは？）
- 提出用紙を毎回わざわざするのがすごいと思いました． **山田のコメント：** それほどの手間ではありません．
- マドリードが好きなのでしょうか． **山田のコメント：** すきな町ですが．
- これからがんばります． **山田のコメント：** どうぞ
- ないです． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 有理数は整数分の整数と言っていたが，分母に 0 は含まないと言っていないため ∞ が有理数となってしまっていた． **お答え：**「整数/整数と表される数」です．分母が 0 のときは数を表していないので大丈夫です．

質問 2： 定義の順番は「実数」→「有理数」→「無理数」の順で合っていますか．

お答え： いいえ．「有理数」→「実数」→「無理数」です．（以下余談：自然数をペアノの公理から定義すると，そこから整数，有理数が自然に定義される．有理数全体の集合の「完備化」を実数全体の集合と考えるのが通常の流れ．）

質問 3： 無理数は有理数でない実数というのはわかったのですが，有理数は $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ で表される数ときいたのですが，数ではなく実数でもいいんじゃないのですか． **お答え：**いいです．

質問 4： 無理数：数直線上の有理数でない部分をちゅう密にうめつくす数．授業中に先生が無理数とは何かという質問をされていましたが，上記のように答えた場合，どのような見解なのでしょうか．

お答え： 不正解．「稠密に入っている」すなわち無理数の全体の集合をみないとわからない性質です．「$\sqrt{2}$ は無理数」という高校生が知っている性質を示すことがおそろしく難しくなりませんか?

質問 5： 無限小数と実数との関係をもう一度説明してくれませんか．

お答え： 無限小数は 1 つの実数を表す．逆に実数は無限小数で表されるが，その表し方は 1 通りとは限らない．

質問 6： 先生が言った無限小数について疑問をもった．先生が言ったのは無限小数を実数と見なさないほうがよい，ですが，実数以外は虚数だけ，そうすると無限小数は虚数になるのではないか．

お答え： 実数以外は虚数だけですか? 平面の点や三角形や円や，一般の集合や，数学の対象は実数や虚数だけでなくたくさんあります．ここでは「実数とは無限小数のことである，と言い切らない方がよい」ということを説明したかった．理由は，実数と無限小数は 1 対 1 に対応していないから．

質問 7： $0.999\dots = 1$．$\frac{1}{3} = 0.333\dots$ の両辺を 3 倍して $1 = 0.999\dots$．違和感しかないのですが，これは正しいのですか? **お答え：**「無限小数が実数を表す」とはどういうことでしょうか．たとえば「$\frac{1}{3} = 0.333\dots$」は正しい?

質問 8： 結局 $0.999\dots$ は実数なのか，1 を異なる表記で表しただけなのか． **お答え：**そうです．説明しましたね．

質問 9： $0.999\dots = 1$ はなんとなく分かるのですが，$x = 0.999\dots9$ としたとき，$10x = 9.999\dots90$ となり，$9x = 8.99999\dots1$ となる．これはまず前提として $x = 0.999\dots$ と限りがないので正しくはないのですが，こうかんがえると納得しずらく違惑感（原文ママ：違和感？）を感じます． **お答え：**高等学校ではどう習いましたか?

質問 10： 正の無限大（$+\infty$）に $+$ が必要ですか? **お答え：**この講義の文脈では不要．

質問 11： $[0, +\infty)$ でなく，$[0, \infty)$ と書いてもかまいませんか． **お答え：**はい．

質問 12： $(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ とありましたが，$-1 < x < 1$ ということは x は実数であることは明確であるのになぜ $x \in \mathbb{R}$ と書いているのですか．私は x が実数であることを前提としなければが $-1 < x < 1$ は定義できないからだと考えたのですが，正しい説明があったらききたいです．

お答え： 「x が実数であることは明確」かもしれませんが「x は条件を満たす実数**全体**」であることは明確でないからです．たとえば，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$，整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書けば，$\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\}$ と $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 1\}$ は $(-1, 1)$ とは異なる集合です．

質問 13： $I = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x\}$ について，$0 \leqq x$ と大小関係を述べている時点で x は実数とわかるため $x \in \mathbb{R}$ とあえて明示しなくてもよいのですか． **お答え：**$\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqq x\}$ との区別はどうやってつけますか?

質問 14： $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq 0\}$ は正でない数で合っていますか? **お答え：**いいえ．正でない $\underline{\text{実数}}$ 全体の集合です．

質問 15： まず $[0, +\infty)$ について「負でない実数全体の集合」とのことですが，非負整数があるので非負実数と言えるのではないかという単純な疑問 → まだ調べていません． **お答え：**言ってもいいんじゃないですか?

質問 16： テキスト 2 ページ下部の注 8) で「無限大 $\pm\infty$ は実数ではない」とあり，講義でもそのような旨を述べられていたが，つまりそれは $\pm\infty$ は数直線上には存在しないという認識でよろしいのか．また，$\pm\infty$ は虚数ではないように思われるので，もし $\pm\infty$ が実数でないとしたら一体何なのか，あるいは $\pm\infty$ は想像上の数で，そもそもそういうことを考えてはいけないということなのか．

お答え： 通常の数学では ∞ を一つの対象とは考えません．実際，我々がこの記号を使うのは $[a, \infty)$，$x \to \infty$，$\lim_{***} = \infty$ など限定的な場面で，∞ だけを取り出すことはなかったのではありませんか?

質問 17： ∞ は実数ではないのに (∞, a) や (b, ∞) といった表現が許される，つまり実数のように区間の端であるかのような表記になるのは何故でしょうか． **お答え：**表記になるのではなく，このように表記する．講義ノート 2 ページ上半分のように区間の定義をたくさん書くのは ∞ を含む表記を別扱いする必要があるからです．

質問 18： 配布プリント 1P 5,6 行目「また，x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の像とよぶ」は，像が値域の部分集合であるという意味であってますか? **お答え：**あってます.

質問 19： $f(x) = [x]$ のとき，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ という $\to$ の使い方は正しいですか.

お答え： 確認ですが $[x]$ は「x をこえない最大の整数」，$\mathbb{Z}$ は「整数全体の集合」すね．記号 $\to$ の使い方は正しい．矢印の右側は $\mathbb{Z}$ と思ってもよいし $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と書いてもよいです．どちらを選択するかはそのときの文脈で，違いを重視するときは明記する必要があります．なお，値域をどちらにしたとしても f の像は $\mathbb{Z}$ です.

質問 20： 値域と像の違いが分かりません．/像と値域の違いが良く分かりません．値域と像の違いがわからなかった．/講義ノートの中の 1 頁にある「値域」と「像」の違いがわかりません.

お答え： そうですか（文面通りに受け取ると，こう答えるしかない）.

質問 21： $f\colon I \to \mathbb{R}$ というのは定義域は区間であっても値域は実数全体ということですか. **お答え：**はい.

質問 22： 関数 f に対して $f\colon$ (定義域) $\to$ (値域) でいいのでしょうか? **お答え：**何を聞かれているかわかりません.

質問 23： この講義における「像」と「値域」の違いが分からないです．像と値域が異なることはありますか.

質問 24： 授業で配布された「1. 初等関数の微積分」の P 2 の例 1.1 の部分いおいて，下の注釈 10) で “像” と “値域” の使い分ける理由について書かれていますが，このあたりを読む限り同じことを行っているように見えますが，何が違うのでしょうか.

お答え： 講義ノート 1 ページ冒頭，例 1.1 をよく読んでください．関数 $f\colon I \to X$ と書いたとき，X は f の値がどの世界にいるか，ということを表す集合．この講義ではこの X を値域とよぶことにします．「像域」という人もいます．しかし，**集合 X のすべての値を f がとる必要はありません**．たとえば，定義域，値域をともに $\mathbb{R}$ として $f(x) = x^2$ という関数を考えます．任意の実数 x に対して $x^2 \in \mathbb{R}$ ですから，こう考えることができるわけです．しかし，関数 f は負の実数に値をとらないので，値域の全ての要素が f の値となるわけではありません．この関数で x が定義域 $\mathbb{R}$ 全体を動いたとき，$f(x)$ の動く全体，すなわち $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ が関数 f の像です．この場合，f の像は $[0, +\infty)$ となります．すなわちこの例では「値域」と「像」が違っています.

質問 25： 講義資料 4 ページ目における「関数 f_5 の像が $\{0, 1\}$ である」という記述の $\{0, 1\}$ の表す意味は何ですか? $f_5(x)$ の取る値が 0 or 1 であるという意味ですか.

お答え： $\{0, 1\}$ は 2 つの要素 0 と 1 からなる集合です．高等学校で習ったのと同じ記号のはず．「像が $\{0, 1\}$ である」というのは，「x が実数全体を動く時，$f_5(x)$ を集めてできる集合は 0, 1 の 2 つの要素からなる」ということです.

質問 26： プリント P2 の「“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と示した意味が分からない．これは自明ではないのか.

お答え： 「これ」は「$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$」を指していますか? 「示した」を指していますか? 「示した」は「表示した」という意味ですか？「証明した」という意味ですか?

質問 27： $f\colon I \to \mathbb{R}$ について，プリントでは I が定義域，$\mathbb{R}$ が値域と書いてあるが，先生の言っていたことと違うように思えてしまった．結局のところどういうことなのか.

お答え： 「言っていたこと」を具体的に書いてくださらないと分かりません.

質問 28： 関数についての説明での $\to$ と $\mapsto$ の違いが分かりづらかったのでもう一度説明してください．定義域と値域について決めるときに $\to$ を，対応の規則を決めるときに $\mapsto$ を使えばよいのでしょうか? **お答え：**そうです.

質問 29： $\to$ と $\mapsto$ の違いが理解できなかったので，もう一度教えて頂きたいです．区間を示すときは $\to$，関数を表すときは $\mapsto$ を用いるのが一般的だということでしょうか.

お答え： 違います．$\to$ の両側にくるのは集合，左側が定義域で右側が値域．$\mapsto$ の両側にくるのはそれらの集合の要素．左側の要素が f によって右側の要素に対応する.

質問 30： 2 頁にある矢印 “$\to$” と “$\mapsto$” の使い分けの仕方が分かりません．/$\to$ と $\mapsto$ の違いがあまりよくわかりませんでした. **お答え：**そうですか.

質問 31： 「$\mapsto$」の形に何か意味があるのでしょうか? **お答え：**矢印の左に縦棒をつけた.

質問 32： $f\ x \mapsto x^2$ というような書き方をしたとき，どのような意味になるかが不明です.

お答え： 山田も不明です．この講義では $f\colon x \mapsto x^2$ と書きます.

質問 33： 関数のグラフの説明で，グラフは座標平面の部分集合とのことでしたが，複素数平面など他の平面ではだめなのですか．大学入試の際，複素数平面上にはグラフ（というか図）を書いていたのですが，あれはグラフではないのですか.

お答え： 2018 年 2 月の，本学の前期日程試験のことですね．あなたが書いたのはどんな関数のグラフですか？この講義では「関数のグラフ」という言葉はつかいますが「グラフ」という単語を独立には使いません.

質問 34： 「関数のグラフ：座標平面の部分集合」とありましたが，2 変数 x, y できまるもの $z = f(x, y)$ なら立体になる．平面と限定するのはおかしい！ **お答え：**今回の文脈は 1 変数関数．講義ノート 4 ページ．

質問 35： グラフが高級である理由について知りたい．

お答え： (1)「関数」のもともとの定義に含まれていない．(2) 個々の x に対して値 $f(x)$ が容易に計算できるような関数でも，そのグラフを描くのは易しくない．(3) 多変数関数（上の質問と回答参照）のグラフは高次元の空間の図形（一般に超曲面）になる．

質問 36： なぜ関数と関数のグラフを分けて考えたほうがよいのか．今まではグラフは問題を解く上で積極的に使うべきものだと思い込んできて，関数と聞くとグラフと関わっているように思えるのですが，それを別物のように考えろとはどういうことなのか疑問に感じた．

お答え： もちろんグラフと関数は「密接な関係がある」のですが，それと「同じものではない」というのは両立すると思います．「グラフが描けないと関数の変化の様子がわからない」と硬直した考えをもつ方が多いので，あえて「違うもの」と言い切った方がよいと思います．

質問 37： $\{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$ を the graph of f と説明した意味がわからなかった．“the” という概念がよくわからなかった． **お答え：**f を与えればグラフはただひとつ確定するので，定冠詞をつけた．

質問 38： $y = e^x$ のグラフと $y = \log x$ のグラフは互いに逆関数の関係にあり，$y = x$ に関して対称であるので，$y = \sin x$ のグラフと $y = \mathrm{Sin}^{-1} x$ のグラフも互いに逆関数の関係にあるので，$y = x$ に関して対称なのでしょうか? **お答え：**言葉の使い方がめちゃくちゃ．「関数 e^x と関数 $\log x$ 互いに逆関数の関係にある」「$y = e^x$ のグラフと $y = \log x$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称である」が（この授業の文脈では）正しい．「逆関数のグラフはもとの関数のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したもの」というのは一般の関数に関する性質です（と高等学校でならったはず）．ですから，ご質問は自明だと思いますが．

質問 39： 逆関数同士が $y = x$ に関して対称なのはなぜですか．証明が思いつきませんでした．

お答え： 「関数が $y = x$ に関して対称」って何? この講義では「関数」と「関数のグラフ」を区別すると言ったはず．

質問 40： 講義ノート 5 ページの (e) のグラフの濃い線は無理数が有理数に比べて多いことを示しているのでしょうか？

お答え： はい．

質問 41： $f_5(x) =$（略，講義ノート 4 ページの例 1.4 (3)）の定義域は実数を有理数と無理数に分けたから，連続性も失ってどっちも直線のように描けないのではないかと思います．

お答え： おっしゃるとおりで本当の意味で直線ではないのですが，有理数も無理数も数直線上にぎっしりつまっている（稠密 dense という）ので，直線のようにしか描くことができないわけです．

質問 42： ディリクレ関数について，関数のグラフが $y = 0, y = 1$ （直線）になるということですが，それは不連続だから近似的に直線であるということですか? **お答え：**そうです．

質問 43： $f(x) =$（略，上の質問と同じディリクレ関数）のグラフって厳密に書いてない，ということで大丈夫ですか？

お答え： 大丈夫です．というよりたいていのグラフは厳密に書かれていないと思います．

質問 44： 授業中で $y =$（略，ディリクレ関数）のグラフを描くという問題を取り扱ったときに，$y = 1$ よりも $y = 0$ の直線を濃くすると言っていましたが，実際の試験等でこのような問題が出てきたときはその旨を言葉で明示した方がよいでしょうか． **お答え：**なんの理解を測るためにこのような問題を出すのでしょうね．少なくとも山田の試験では，ご質問のような明示の必要性は問題文から読み取れるようにしています．

質問 45： $f(x) =$（略：ディリクレ関数）のグラフを各場合，$x = 0$ の直線（原文ママ：$y = 0$ のことか）を必ず濃くかかなければならないのでしょうか． **お答え：**どうでもよいです．

質問 46： 有理数と無理数を比較すると無理数の方が多いのは分かります．しかし，大雑把なイメージがしづらくどれくらい多いのか分からないので教えてほしいです．/無理数が有理数よりも多い理由が知りたい．

お答え： 無限集合なので大雑把なイメージで考えない方がよいです．この科目では深入りしませんが，集合の濃度，可算集合，カントールの対角線論法などのキーワードで検索するといろいろとでてきます．

質問 47： $f(x) =$ (略；ディリクレ関数) は式に表せますか．

お答え： 何を「式」とみなすかわかりませんが，$f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \cos^{2k}(n!\pi x)$.

質問 48： 先生のおっしゃる関数の変態さが理解できません．どこがどのように変態なのか詳しく説明して下さると幸いです． **お答え：**どの関数のことを言っているかわからないので具体的に質問して下さると幸いです．

質問 49： $f(x) = \sin x$ の逆関数について $y = \sin x$ の y をひとつ決めたときに，x がただ 1 つきまる区間ならばすべて $y = \sin^{-1} x$ と表せるのですか?

お答え： 「y をあたえたときに x がただ一つ定まる」ような区間に限れば逆関数が存在する．そういう区間はたくさんあるが，とくに，その区間を $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ととって得られた逆関数を $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ と書く．

質問 50： 今日，先生の授業で逆三角関数の定義についてたとえば $y=\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ について，$0 \leqq y \leqq \pi$ とするところを $\pi \leqq y \leqq 2\pi$ としてもよいということをおっしゃっていたと思うのですが，講義プリントの 6 ページで $\mathrm{Cos}^{-1}\,x+\mathrm{Sin}^{-1}\,x=\frac{\pi}{2}$ が成り立つと書いてあるので，このようなとき $y=\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ を $-\frac{3}{2}\pi \leqq y \leqq -\frac{\pi}{2}$ となるようなものと定義するのが正解なのでしょうか?

お答え： $\cos x$ の逆関数が存在する区間は $[0,\pi]$ や $[\pi,2\pi]$ などたくさんある．とくに $\cos x$ の定義域を $[0,\pi]$ に限ったときの逆関数を $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ と書く．

質問 51： プリント 6 ページの定義 1.6 について，$y=\mathrm{Sin}^{-1}\,x$，$y=\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ が $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ や $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ で値えられている（原文ママ：？）のに対して，なぜ $y=\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は $0 \leqq y \leqq \pi$ と範囲の端が $\frac{\pi}{2}$ でないのですか．

お答え： $\frac{1}{2}=\cos y$, $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たす y はいくつですか?（一つに決まらない）

質問 52： 余接，正割，余割などがプリントに書いてあったが，なぜわざわざそれらを定めたのか理解できなかった．

お答え： 理解できる必要はあるでしょうか．これらは 16 世紀くらいに現れているようで，当時の人が「なぜわざわざ定めたか」は推測しかできません．多くの人が使う記号なので，あなたが「知らなくて良い」わけではなです．

質問 53： $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ と書いてアークサインと読むのはアリですか．こういうふうに書いたらインバース・サインと呼ぶのでしょうか． **お答え：** 前半：アリ．そう読む人はいる．後半：そちらの方がよいですね．

質問 54： $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ や $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$, $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ の読み方が分からなかったの気になりました．

お答え： アークサイン，逆サイン，逆正弦，インバース・サイン，サイン・インバースなど人によっていろいろ．

質問 55： 講義プリント P5 に下部に（原文ママ：助詞の使い方が変）おいて『$\frac{d}{dx}\cot x=-(1+\cot^2 x)$』と記述してあるが，$f(x)=\cot x$ は $x\to+0$ において $f(x)\to\infty$, $x\to-0$ において $f(x)\to-\infty$ であるため，$f(x)$ は $x=0$ において微分可能（山田注：原文ママ：微分可能のことか?）な関数とは呼ぶことができないにも関わらず，定義域を指定せずに $\frac{d}{dx}\cot x=-(1+\cot^2 x)$ と記述していいのでしょうか．何卒よろしくお願いします．

お答え： 「両辺が意味を持つ限り，等式が成り立つ」という意味で書いています．高等学校の教科書の多数派の流儀です．あなたの高等学校の教科書で $\tan x$ の微分公式をみてごらんなさい．おっしゃるとおり，定義域をきちんと書いた方がよいとは思いますが，$\cot x$ の定義域をきちんと書くのは面倒臭くありませんか（やってみて下さい）．

質問 56： 三角関数の逆関数の表記についてですが，人によってそれぞれ違うとおっしゃっていたと思います．そこで僕は教授の方々それぞれに合わせるべきか，自分が使いやすいと思った表記にすべきか，どちらの方がいいでしょうか． **お答え：** 同一文脈内では，同じものを異なる記号で表すのはよくないです．だから，この授業という文脈では，講義ノートや教科書の記号に合わせてください．その記号がどうしても嫌な場合は「ここでは異なる記号を用いる」と宣言するべきです．ことを知っている必要があります．

質問 57： なぜ $\sin^{-1} x$ が $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ となるのですか．普通なら $\frac{1}{\sin x}$ と考える方が自然に思えます．そう決まっているならしようがないのですが，わざわざ一般的な例から逸脱している理由が気になります．

お答え： 数学の記号も自然言語と同様，さまざまな不整合があります．古くからのしがらみがあって，それでも多くの人が使っているのでとりあえず従う必要があるのでは? 山田は，むしろ普通に考えれば「$\sin^2 x$」は「$\sin(\sin x)$」と解釈すべきだと思います．そういう意味で，高等学校で習った記号 $\sin^2 x=(\sin x)^2$ のほうが「自然でない」と考えています（が多くの人が使うのでそれに従っています）．

質問 58： $\sec x$ などは分母が 0 のときはどうなっていますか? **お答え：** $\tan x$ などと一緒．定義域からはずす．

質問 59： これからは $\frac{1}{\sin x}$ というかき方より $\sec x$（山田注：板書の間違い，$\csc x$ です）というかき方が多くなっているのですか． **お答え：** 場面によります．でてきたときに驚かなければよいです．

質問 60： $\arcsin x$, $\arccos x$ を $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とか $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ と書くと，$\sin^{-1} x$ とか $\cos^{-1} x$ と間違うことがないんですか?

お答え： べつに間違えていないのでは? 講義ノート 5 ページ，脚注 16，及び 6 ページ，脚注 19．

質問 61： $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とか $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ の逆関数の値が弧度法に出る場合がありますか．

お答え： $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ の逆関数は $\sin x$ ですね．$\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ などは弧度法で求めるのが普通です．たとえば $\mathrm{Sin}^{-1}\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$．

質問 62： 逆三角関数については通常の三角関数程度に使えるように演習するべきだと思いますが，すぐに使える必要はありますか? 例えば，今週は演習の時間が休講ですが，個人で演習しておくべきでしょうか． **お答え：** はい．

質問 63： 三角関数の逆関数を考えるメリットは何かありますか?

お答え： たとえば，講義ノートの (1.5) 式とか，9 ページから 10 ページまでの余談などは山田にとってはメリットだと思いますが，あなたがどういう生活をしているかわからないので，あなたにとってのメリットになるかどうかはわかりません（という意味で「メリットがある」という質問は無意味です）．

質問 64： 今日，逆三角関数は普段われわれが三角関数を使っているくらいよく使うと言っていましたが，具体的にはどのような時に使われるのですか． **お答え：**講義ノートの (1.5) 式，余談，問題 1-15 などは?

質問 65： $y = \operatorname{Tan} x$ をグラフに描くとどうなるのか知りたい．

お答え： $\operatorname{Tan} x$ とはなんですか．この講義で出て来るのは $\tan x$ と $\operatorname{Tan}^{-1} x$ ですが．

質問 66： 一般の関数と，特別な関数の定義は（違いは）何なのですか? /一般の関数と特別な関数の区分ってなんですか? /微積分が一般の関数に関する議論と特別な関数に関する議論の 2 つの場合に分かれるとあるが，明確な一般の関数，特別な関数の定義の区別は何か．

お答え： 講義での説明：(1) 積の微分公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ は一般の関数に対して成り立つ性質 (2) 三角関数の微分公式 $\{\sin x\}' = \cos x$ は特別な関数 “sin” に対して成り立つ公式．定義のある語ではありませんが，これで理解できるでしょうか．

質問 67： $\mathbb{R}^2$ は座標平面を表すようですが，それに対応させると $\mathbb{R}^1$ が表すのは数直線ですか?

お答え： そうです．$\mathbb{R}^1$ はとくに $\mathbb{R}$ と書くことが多いですね．

質問 68： 講義プリント 4 ページの “1 変数関数のグラフ” の部分で，実数全体の集合を表す $\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}^2$ になっているのはなぜですか．

お答え： $\mathbb{R}$ ではないのです．記号 $\mathbb{R}^2$ の定義が第 2 節なので，この記述は「誤り」ですね．この辺の $\mathbb{R}^2$（3 箇所）は「座標平面」と読み替えてください．

質問 69： 「$x \in \mathbb{R}$」という板書がありましたが R と $\mathbb{R}$ の使い分けがあるのですか?

お答え： “R” は通常の（細字の）R，$\mathbb{R}$ は太字の R です．印刷では “$\boldsymbol{R}$” と書くことも多いです．数学や物理学では「違う字体は違う文字」を表す習慣ですので区別してください．

質問 70： 実数は $\mathbb{R}$ と書き表されるが R と $\mathbb{R}$ の違いは何か． **お答え：**実数でなく実数全体の集合です．

質問 71： $\mathbb{R}$ の表記はベクトル表記だと思うんですが，なぜこのような表記になっているのでしょうか？又ベクトル表記でないとして，普通の R より線が 1 本多いのは何故でしょう？

お答え： 太字をベクトルに使うことは多いですね．しかし絶対に「ベクトル表記」というわけではなく，文脈に依存します．この講義では，実数全体の集合を表すのに太字の R を用います．“$\boldsymbol{R}$” を使うことが多いのですが，黒板に書くのに太い線を引くのは困難なので “$\mathbb{R}$” という字体（blackboard bold）が生まれました．ここでは黒板に書く文字と講義資料の文字を近づけたいので “$\mathbb{R}$” を用います．

質問 72： 関数によく使われる f は function の f なのでしょうか． **お答え：**はい，そういうことを講義で述べましたね．

質問 73： 区間を表す I は何の頭文字ですか? **お答え：**2 ページ，脚注 18.

質問 74： (a, b) を開区間，$[a, b]$ を閉区間という場合で，$[a, b)$ は何と読んだらいいかと迷っています．

お答え： あまり読むことはないかもしれませんが「半開区間」「右半開区間」と読むことがあります．

質問 75： arc とはどういう意味ですか． **お答え：**弧．

質問 76： 変数とは何ですか?（厳密な定義がわかりません）

お答え： 初めて変数がでてくるのは中学校だと思いますが，教科書にはどう書いてあったでしょうか．ここでは（厳密に定義しませんが）さまざまな値を代入できる文字のことと思ってください．

質問 77： 函数の「函」という字には箱という意味があるい，ある数を箱に入れると決まった数が出てくるみたいなことを聴いたおぼえがあるのですが，それは本当でしょうか．

お答え： 後付けだと思います．初等教育で「ブラックボックス」を用いて関数概念を教える方法がいつはじまったか知りませんが「函数」はそれ以前から使われていたと思われます．“function” の（中国語における）音訳だそうです．

質問 78： 高校では定義域にカッコ（例えば $f(x) = \sin x \ (-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$）をつけていましたが，今回の講義ではカッコがありませんでした．この表記についてのルールはあるのですか?

お答え： とくにないと思います．「高校では」は「あなたの高校では」ということでしょうか．

質問 79： 授業の進度は授業計画とは結構ずれたりするのでしょうか． **お答え：**あまりずれないはず．

質問 80： 今回の授業を聞く限り，配布されたプリントを軸に講義をすすめていくようですが，進度は元々買った「入門微分積分」と同じでしょうか？また，配布された教材の元の教科書は存在しますか?

お答え： 前半：講義で説明したようにお買い求めいただいた教科書は「正しい定理・公式が書いてある本を持っているべき」「微分積分学第二は授業担当者が変わるが原則として同一の教科書を用いる」という理由で指定しています．講義内容は主に配布する講義ノートに準じます．必要に応じて教科書を参照してください．後半：これが元の教科書です．何年か使い回し，改訂しているので，古い版がどこかにおちているはず．

質問 81： 予習は必要でしょうか. **お答え：**金曜日に配布する翌週分の講義ノートに必ず目を通しておいてください.

質問 82： 授業中の課題は授業を聞いていればできるものでしょうか. **お答え：**人によるし，聞き方にもよる.

質問 83： 講義ノートに書いてある問題は自習用ですか? 授業で提出させることはあるのでしょうか?

お答え： 提出はさせません．見るのが面倒ですから.

質問 84： テストの平均点は例年何点ですか?

お答え： 報告される成績が 70 点になるように調整しています．なお，分散はそれなりに大きいようです.

質問 85： プリントの例 1.7 (1) がよくわかりません.（「実際 ∼ なので」まではわかります).

お答え： $y = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Cos}^{-1}\,x$ と書き換えて，定義 1.6 と比較してみよ（ただし定義 1.6 の第 2 項目は訂正あり).

質問 86： 講義ノート 5 頁の例 1.5 の式の意味がわかりません．6 頁の例 1.7 で書いてあることの意味がわかりません．また，7 頁の命題 1.8 から (1.6) の記述までの意味がわかりません．質問が盛りだくさんになって申し訳ないです.

お答え： 全く質問になっていません．例 1.5 の式は「等号をはさんでいるものたちが等しい」という意味です．意味がわからない，という言葉の意味がわかりません．例 1.7 は「成り立つ等式」,「実際,」以降はその証明になっています．どのあたりの意味がわかりませんか. (1.4) 式はただの等式ですから意味はわかりますよね．証明のどのへんがわかりませんか?

質問 87： 例 1.7 の $\mathrm{Cos}^{-1}\,x + \mathrm{Sin}^{-1}\,x = \frac{\pi}{2}$ の証明が分からないです（プリント P6）

お答え： そうですか（としか言いようがない)．証明は講義ノートに書いてあります．そのどこの部分が分からないかきちんと指摘してください.

質問 88： e の名称ということですが，むしろ π の方の名前をださくすれば，相対的に e が「いい」感じになるとおもいます. **お答え：**どのようにださくしましょうか.

質問 89： 微分積分学第一構義資料 1（原文ママ：講義資料）の重要なポインタのところの，2 つめの●に http:(中略)kotaroy とありますが，1 つめの●には https:(中略) kotaro となっています．どうして 2 つ目にだけ y がくっついているのですか.

お答え： 大学のサーバに登録する際のアカウント名として kotaro がとれた．しかし kotaro.com というドメイン名はすでに使われていたので，山田の個人ドメインは kotaroy.com にした.

質問 90： 微分を微かに分かるとおっしゃってましたが，微かに分けるじゃないのかなと思いました.

お答え： どうして?

質問 91： 逆関数 **お答え：**え？

質問 92： ないです．/特にないです. **お答え：**me, too.