2018 年 4 月 20 日 (2018 年 4 月 27 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 4

お知らせ

- 提出物は教室の最後部の机にて返却しております．
- 返却された提出物に書かれた赤字のコメントが読めないのできれいに書いて欲しい，というご希望がありましたが，講義資料 2，お知らせの最初の項目参照：「なお，赤字で書かれているコメントは山田自身のためのメモですので，読めなくても気にしないでください．ご質問，ご意見に関するコメントはこの資料にあります．」
  - 80 枚の提出物にざっと目を通して，1 時間弱で赤いコメントを入れます．そのあと，タイプするのに約 2 時間．それ以上の時間は取れませんので．
  - 自分の質問への回答だけを見たい，というご希望もありましょうが，当方としては**全部の質問＋回答に目を通して欲しい**のでこの形式をとります．
- 前回の提出用紙の番号が 3 になっています．実は提出用紙の番号はすべて奇数で，月曜日の講義の後の火曜日に提出となります．質問や誤りの指摘は，その回 までの内容を対象とします．

前回までの訂正

- 4 月 13 日の講義で $1/(1-x^3)$ の原始関数の計算をやってみたときの板書：

$$\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\frac{1}{1+\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\frac{1}{1+\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}$$

- 講義ノート，9 ページ，8 行目：$\dfrac{1}{1+t^2}+\dfrac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2} \Rightarrow \dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}$.
- 講義ノート，13 ページ，下から 6 行目：次のように表す：⇒ 次のように表す（とくに断らない限り値域は $\mathbb{R}$ とする）：
- 講義ノート，18 ページ，脚注 12：文中は「偏微分の順序交換定理」，脚注（英訳）は「偏微分の順序交換可能性」となっていますが「定理」の方の英訳は各自考えてください．
- 講義で「標高の場」「気圧の場」を扱いましたが，例 2.4 ではなく例 2.2，例 2.3 でした．
- 黒板に書いた $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\ \ldots\ \{(x,y)\,|\,x\neq 0\}$ の $\ldots$ の部分が読めなかったようです．“on” です．
- 同じ状況で，$y=x$ のとき，f の値は $\frac{\pi}{4}$.（1 と書いたようです）
- 黒板の番号に飛びがあったそうです．
- 講義資料 3，2 ページ，5 行目と 6 行目：++ ⇒ +（2 箇所）

授業に関する御意見

- 前回の返却された提出用紙に書いてあった先生のコメントについてですが，字が汚くて読めません．コメントが短いので，内容の推測も困難です．もう少し読める字でお願いします． **山田のコメント：** 講義資料 2, おしらせの最初の項目参照.
- 自分もそこまで上手くはないですが，字が汚いです．もう少しきれいに書いて欲しいです．
  山田のコメント： 黒板ですか? なんとか努力します.
- 定義などの覚えなければならない式は「定義」と強調して言って欲しい． **山田のコメント：** 具体的にはどのへん?
- 東工大 OCW-i の第 1 回の講義ノートが本来の物と異なる物になっているので，変更をお願いします．
  山田のコメント： すみません．大学院科目のノートになっていましたね．修正しました.
- （図省略；黒板に番号をふっている）みたいに書くのはぜんぜん OK なのですが，[2] を書いたら上にあげてくれるとありがたいです． **山田のコメント：** 了解.
- 声が大きくて聞き取りやすいです． **山田のコメント：** そうでないという人もいるようですね.
- もう少しはっきり話してほしいです． **山田のコメント：** 声ですか，内容ですか？
- マイクの調子が悪いみたいです．/ マイクの音量が少し小さくてききとりづらかったです．/ 時々声が小さく聞こえにくいので，音量を大きくしていただきたいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．ハンドマイクのほうが良いみたいですね.
- 自分は耳が悪いのでもっと大きな声で話してもらえると助かります．
  山田のコメント： 了解．できればその場で言ってくれると助かります.
- プロジェクターで資料を出すときに反射しすぎて見難いです． **山田のコメント：** ごめんなさい．場所によるかもしれません.
- 今回プロジェクターを用いた初めての授業でしたが，明るさや大きさともに問題なかったと思います．
- 黒板の電気を消していただいたため，スクリーンが見やすくなりました． **山田のコメント：** みにくい人もいたようですね.
- 先生の笑顔はとても無邪気で素敵です．先生は子供の頃はイタズラっ子だったのだろうかといつも考えています．
  山田のコメント： 内気な子供でした．いまもそうです.
- どうして授業中そんなにニコニコしているのですか? こっちまで楽しくなってしまいます．
  山田のコメント： 舞台では笑うものでは?
- 数学の問題演習をしたいのですが，オススメの参考書などはありますか?
  山田のコメント： 星の数ほど（喩え話）出版されています．書店（生協でもよいと思う）へ行って，いくつか見てみましょう．最低 10 種類くらいは見たほうがよいと思います．すると自分が使えそうな本が見えてくるのでは?
- 偏微分交換不可能の関数の話は気になるので，次回の講義を楽しみにしてます． **山田のコメント：** 期待しないでください.
- 雑談は意外にためになるし，気分転換にもなるし，講義の内容を思い返す時間にもなります．
  山田のコメント： あまり期待しすぎず，ご活用ください.
- 脱線したときのお話が面白いです． **山田のコメント：** 戻ってこれなくなるのが怖いです.
- ダジャレが多く，面白かったです．/シャレが面白かったです． **山田のコメント：** そう?
- 無駄話があるのが良いと思いました． **山田のコメント：** 無駄なんですかね.
- 数学っていいですね!!!☆先生はハケですか，ハゲですか．僕はハケです． **山田のコメント：** （光）です.
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ は素晴らしかった．/ 分数の約分に関する余談が非常に面白かった．
  山田のコメント： 山田のオリジナルではありません.
- $\frac{\sin x}{n} = 6$ が面白かったです．授業中に時々そういう話がでると集中出来て良かったです．
  山田のコメント： そうそうネタはありません.
- とてもわかりやすく身につく講義なので，ますます数学が楽しくなります．余談も面白いです．
  山田のコメント： 気楽に行きましょうね.
- 毎回の授業が次回の講義のプリントを配るのは大変助かりました! **山田のコメント：** よかったです.
- 授業のペースが調度良いいです． **山田のコメント：** 丁度ではないでしょうか.
- いいとおもいます． **山田のコメント：** はい.
- exp など大学数学で初めて見る記号の説明があってありがたかった．
  山田のコメント： ですよね.
- 分かりやすかったです．ありがとうございました．/分かりやすくて良かったです．
  山田のコメント： そう?
- 講義ノートを読むとき，分からないところがあっても自分でやってみたり，ネットで調べたりしてやっと分かるようになると本当にうれしいです．いままでの授業は面白かったです． **山田のコメント：** どうも.
- 再履です．履修をいろいろと考えていたので，今回の講義から受けさせていただきます．偏微分が分り易かったです．
  山田のコメント： 了解．最初の講義資料にさまざまな注意がありますので，確認しておいてください.
- 数学の記号 ($\frac{\partial f}{\partial x}$ や $\mathrm{Sin}^{-1} x$ とか）は，そうなるべくしてそうなったと考えると歴史を感じます．
  山田のコメント： そうかもしれませんね．結構行き当たりばったりのような気もしますが.
- 演習問題のある程度の解答と過去問みつけました．おいしいです． **山田のコメント：** そうなの？おいしいの？
- iPad Pro 12 inch と X1 carbon とは良いマシンを使ってますね． **山田のコメント：** 武器ですからね.
- ありません． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： スカラ場とは何ですか． **お答え：**講義ノート 15 ページ．

質問 2： スカラ場は平面上の 1 点（例えば $x=2$, $y=3$ のとき $(2,3)$）を示すという解釈であってますか?

お答え： 何を解釈したのでしょう．講義ノート 15 ページに書いてあることを説明しなおしたことになっていますか?

質問 3： プリント P.14 の等高線の意味は分かるのですが，P.15 のスカラ場が絡んでくると分からなくなります．スカラ場はある特定の関数 f を表しているのでしょうか?

お答え： なかなか 15 ページに書いてあることが読み取れないようですね．ここでは「平面のスカラ場」と「2 変数関数」は同じものと思ってくださって問題ありません．

質問 4： 関数 f がスカラ場と言える時，f の値が必ず標高と気圧のような実際の意味を持っていますか

お答え： 「実際の」はどの程度の意味をもっているのでしょう．

質問 5： 「平面のスカラ場」の「場」の意味することがよくわからなかったので教えて下さると幸いです．

お答え： 「重力場」や「電場」の場と同じ意味です．

質問 6： 16 日の板書，例 2.4 $p(x,y)$ の説明が経度と緯度と時間（原文ママ：講義では時刻といいませんでしたっけ）は指定しているが，地表からの高さが指定されていないので気圧は定まらないと思います．

お答え： そうですね．「地表付近の」と口頭で言いましたが伝わっていませnでしたね．講義ノート例 2.3（例 2.4 は 2.3 の誤りでした）では「地表における」と明示してありますね．

質問 7： 2 変数関数などを平面のスカラ場というとき，たとえば 4 変数関数を 4 次元空間で考えるというのはあまり意味をなさないというこですか? （4 変数関数そのものに考える意味があるのかということではなく）

お答え： たとえば時空のスカラ場を考えてもよいですよね．数学では一般次元の空間上の関数をスカラ場といってしまいます．

質問 8： 講議ノート（原文ママ：こんな字を書いちゃだめ）にあるスカラ場の説明の中に「定義域が何がしかの『空間』『世界』であると思えるとき」とあるが，この中の「世界」というのは $\mathbb{R}^n$（$n \geqq 4$）という認識でよいのか?

お答え： いいえ．地球の表面全体を世界と思ったりしませんか? ところで「認識」って何のことでしょう．「$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 4)$ のことですか」と聞けばよいのになんで難しい言葉を使うの?

質問 9： 等高線を xy 平面に斜影（原文ママ：射影のことか）したときに，同じ高さのもの 1 つしか表せない（書けない）のですか?

お答え： 何をお聞きになりたいのでしょう．「等高線を xy 平面に斜影」という言葉の意味がわかりません．もともと $f(x,y)$ の高さ c の等高線は xy 平面上の曲線です．

質問 10： 関数 f の高さを等高線というらしいですが，その高さは何を基準としてるのですか．

お答え： 「関数の高さ」という言葉をこの講義の文脈で使ったことがないのでわかりません．等高線の定義は講義ノート 14 ページ．

質問 11： 3 変数以上の関数のグラフを書くことは可能でしょうか．

お答え： 講義ノート 14 ページに一般の n 変数関数のグラフが定義されています．「書く」で何を表しているのかわからないのでそれ以上はお答えできません．

質問 12： $f(x,y) = \operatorname{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ $\{(x,y)\,|\,x \neq 0\}$ について偏微分したあとに板書したグラフが何だったのかを理解できなかったので，もう一度説明してほしい．

お答え： グラフではなく等高線．

質問 13： 図 2.1 (a) の左，(b) の左のように 2 変数関数のグラフは空間座標に描かれる（原文ママ：座標空間に描かれるでは？）と思うのですが，$f(x,y)=c$ としたとき関数 f の $z=c$ におけるグラフの切り口（原文ママ：関数 f のグラフの平面 $z=c$ による切り口）を xy 平面にすべて射影したものが等高線ですか?

お答え： そうです．

質問 14： 講義ノート 14 ページ 10 行目の “性質のよい” とはどういうことでしょうか（他数件）

お答え： ここでは深入りしない（「なめらかな曲線」も定義していない）．第 4 週の「陰関数定理」で．

質問 15： 2 変数関数に対して逆関数のような考え方をすることはあるのか．

お答え： 逆関数定理（第 4 週にちょっとだけ紹介する）というものはありますが，$z=f(x,y)$ を (x,y) について解くことが一般にはできない（未知数が 2 個，条件式が 1 個）ので，この講義で扱っている 2 変数関数の逆関数を考えることはできません．

質問 16： 増減に意味はないとおっしゃるが，偏微分とは特定の方向（y を固定したときの x 方向）の増減を調べる行為とはならないのですか.

お答え： なりますよ．それはしかし「2 変数関数の増減」を調べる行為とはなっていませんね.

質問 17： 変数の量が増えるほどグラフが複雑になり，増減に意味がなくなるという話でしたが，それならば何を知るために多変数関数を微分するのですか. **お答え：**変化．変化は増減だけではない.

質問 18： 微分を（原文ママ：助詞の使い方が変）増減を調べるためにありますが偏微分は何を調べるのですか.

お答え： 微分は増減を調べるためにあるのですか？それは初耳です．増減よりもさらに多くの情報を持っています．近似値の計算にも使いますね．偏微分は x 方向，y 方向の変化を調べています.

質問 19： 1 変数関数を微分すると，正負によって増減が分かり，2 階微分すると，増減の様子が分かると思いますが，偏微分によって関数に関して何が分かるのですか.

お答え： さまざまな方向の変化の様子．1 変数関数でもご質問にある以上の情報がわかると思いますが.

質問 20： 「増減に意味がない」というのは増減ではなく，変化に着目しろということですか？

お答え： この場合の「変化」とは何でしょう．定義域の中を「動く向き」にも着目せよということだと考えましょう.

質問 21： 偏微分について，例えば $\frac{\partial f}{\partial x}$ は関数 f のグラフの曲面を $x = k$（k は定数）で切った時の断面の xy 平面からの高さの変化を x 方向について調べているということですか？ **お答え：**違います．y を一定にしているんです.

質問 22： p 16 ∼ p 17 にある $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ や $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ は $z = f(x, y)$ としたとき関数の変化を調べる上でどういう意味を持つんですか? **お答え：**x 方向，y 方向の変化率.

質問 23： 2 変数関数について f_{xx} (f_{yy}) は 2 回の偏微分の過程で y (x) が常に定数 c と固定されているため，特定の y (x) の値におけるグラフの断面の形を知るために使えると思うが f_{xy}, f_{yx} にはどのような意味があるのでしょうか? x と y は異なった独立の変数なのに，一緒のものとして扱っているようにみえてよくわからなくなってしまいました. **お答え：**$x =$ 一定，$y =$ 一定 の断面だけを考えるなら f_{xx} や f_{yy} だけでもよいのでしょうが，その方向以外の方向を考えると f_{xy} などが自然に現れます．第 3 週，4 週で少し扱います.

質問 24： 2 変数関数 $f(x, y)$ において，どちらかの変数，またはどちらの変数でも偏微分可能でないもののグラフはどういったものになるのでしょう. **お答え：**あまりに多様な場合がありますので「グラフはこうなる」とはいえません．逆に質問ですが，微分可能でない一変数関数はどういうふうになるか一言で言えますか?

質問 25： $f\colon D \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ という 2 変数（山田注：2 変数関数のこと?）を考えて，点 $(a, b) \in D$ において極限値 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ が存在し，極限値 $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$ が存在しない場合，$f(x, y)$ は点 (a, b) で偏微分可能ではないと思いますが，この時，関数 $f(x, y)$ を x で偏微分することはできますか. **お答え：**はい，偏微分可能ではないですが，x に関する偏微分係数だけは存在します.

質問 26： f_{xy} と f_{yx} が一致するのを計算せずに見分ける方法はあるのでしょうか.

お答え： 「2 次偏導関数が存在してそれらが連続なら OK」と講義で口述しています．定理のステートメントは第 3 週.

質問 27： 偏微分の順序交換が可能となる条件は，関数 $f(x, y)$ の変数 x, y のある範囲で連続であり，微分可能であること以外にどのような条件がありますか.

お答え： ご質問の文の意味がわかりません（逐語的に意味を説明できますか？）．条件は来週.

質問 28： 偏微分の順序交換定理とヤングの定理は同じものですよね? **お答え：**はい.

質問 29： 講義資料 p23 の問 2-9 の関数をペアノ関数と呼ぶらしいのですが，聞いたことありますか? （よくわかる微分積分という参考書の P197 に書いていました）

お答え： なるほど，聞いたことがあるといえばありますが，普段あまり使わないもので.

質問 30： 偏微分の順序交換定理が成り立たない場合は定義域の違いではないかと考えています. **お答え：**違います.

質問 31： f_{xxy} を f_{x^2y} のように書くことはありますか? **お答え：**山田は見たことがありません.

質問 32： 1 次変数関数（原文ママ：1 変数関数のことか?）の場合も，今後は $\frac{d}{dx}$ ではなく $\frac{\partial}{\partial x}$ を使わなくてはいけないのですか? **お答え：**講義で説明したように 1 変数関数の微分は $\frac{d}{dx}$ です.

質問 33： $\frac{df}{dx}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ の区別の仕方が分からない．なぜ大学では $\frac{df}{dx}$ を使わないのか.

お答え： f が一変数関数なら前者，二変数以上の関数なら後者．「大学では使わない」などと誰が言ったんでしょう.

質問 34： $f(x)$ を「エフエックス」と呼びますが，多変数関数を x について微分した f_x も「エフエックス」と呼ぶのですか? **お答え：**そうですね．文脈によりますが.

質問 35： “∂” はギリシャ文字ですか．アルファベット “d” に相当するギリシャ文字は “δ” だと思うのですが. . .

お答え： ギリシャ文字ではないはずです.

質問 36： ∂ の読み方について単に“ラウンド”と読んでいる参考書があったのですが，どのような見解なのでしょうか?

お答え： その参考書がですか? それは山田にはわかりかねます．“ラウンド”と読む人もいます．山田の見解としては，それは「携帯電話」を「携帯」,「懐中汁粉」を「懐中」とよぶようなものだと思います．

質問 37： 資料の記号 2.5 では ∂ をディまたはラウンド・ディーと読む，と書いてあるが，もうひとつパーシャル・ディも書いたほうがいいと思う．

お答え： そうかもしれませんね．講義では言及しましたが，TEX の記法では “∂” は “`\partial`” なので，TEX が普及してから “partial” と読む人が増えた気がします．

質問 38： ∂ の書き方について（絵略：右回りと左回り）の 2 つの書き方をされていましたが，どちらでもいいのでしょうか? **お答え：**両方見たことがあります．

質問 39： $\frac{\partial f}{\partial x}$ は $\frac{\partial f}{\cancel{\partial} x}$ のように約分してはいけないとおっしゃっていたのですが，$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}$ のようになったおとき，$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\to\frac{\partial f}{\partial y}$ のようにできますか．

お答え： できません．一変数関数の場合は約分できると思ってよい，というのが合成関数の微分公式ですが，多変数関数の場合はこのようなことができないのです．このことが「偏微分記号 ∂ を一変数関数の微分記号 d と区別する」最大の理由だと思っています．

質問 40： $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は区別されますか． **お答え：**前者は，後者の略記のつもりです．

質問 41： 偏微分の表記に関して質問です．$\frac{d}{dx}\{f(x)\}$，$\frac{d\{f(x)\}}{dx}$ と書けるのと同様に，$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 以外にも $\frac{\partial\{f(x,y)\}}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial x}\{f(x,y)\}$ と書くことは可能ですか．また，他にもメジャーな表記の方法があれば教えて下さい．

お答え： 可能です．他に D_xf などという書き方もありますが，この講義では用いません．

質問 42： 表記に関しては文脈に合わせるべきだと前回教えていただきました．微分の表記には D^nf や $\dot{x}$ のような表記もあったと思いますが，これらは偏微分の記合（原文ママ：記号？）として使えるでしょうか．また，偏微分で授業内で扱ったもの以外の表記はありますか． **お答え：**D_x などと微分する変数を明記して使うことはあります．ドット（上付きの点）は，微分する変数を指定できないので用いません．

質問 43： 偏微分の時の記号が ∂x，微分時の記号が dx という解釈であっていますか．

お答え： 何を解釈したのですか? 偏微分記号も微分記号も「分数ではない」ですから，わざわざバラバラにして「解釈」という難しい言葉を使う理由がわかりません．

質問 44： 高校では $f(x)$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と表記することがあったが，偏微分では $\frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x,y)$ 以外の書き方は一般にあるか． **お答え：**ないようです．

質問 45： 2 次偏導関数は f_{xx} などと表されるが n 次のときはどうなるのか． **お答え：**$\frac{\partial^n f}{\partial x^p\partial y^{n-p}}$．

質問 46： だいたい偏微分を使うときは第何次導関数くらいまでを使うことが多いのでしょうか?

お答え： 共通教育の物理学や化学ででてくるのは 2 次偏導関数くらいまでが多いようです．分野にもよります．

質問 47： 大学入試において 2 変数関数の最大値，最小値を議論する際に「$\sim$ を定数として」等と宣言してもしくはそれを暗黙の了解として $\frac{d}{dx}$ の記号で微分することが許されていました．これは同じ答案を大学で書いたら減点対象でしょうか．

お答え： だれが許したんでしょうね（長年入試問題を作ったり採点している人間が聞いています)．一度偏微分を知ってしまったら，多変数関数を考えているのか，一変数関数を考えているのかで記号を変えてくれないと困ります．

質問 48： 高校で習った陰関数の微分と偏微分の計算の違いは分かるのですが，意味としての違いがわかりません．

お答え： 陰関数 “$x^2+y^2=1$”，2 変数関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ で違いがわかりますか．前者の陰関数微分は「これを解いて得られる関数 $y=g(x)$ の微分を解くことなしに計算する」方法，後者の偏微分は x, y が独立に動くときに f の値の変化を見る方法.

質問 49： 高校のとき，2 変数微分のとき陰関数が発生していたけど，偏微分をするとき片方を定数として微分するのが気持ち悪かった． **お答え：**そうですか，としか言いようがない．

質問 50： 例 2.8 において，λ は放射性物質の種類によって定まる定数なのでしょうか．

お答え： そうです．放射性崩壊の半減期を λ を用いて表してみましょう．

質問 51： (1) $\frac{du}{dt}=-\lambda u$ の微分方程式の解が (2) $u(t)=ke^{-\lambda t}$ なのはなぜか．(2) を微分したら (1) になるということ?

お答え： 講義ノートの本文には「(2) の関数は (1) の解になる」とあります．その意味は 19 ページの 11 行目に書いてあるので，その条件を満たしていることを確かめればよいだけです．ご質問の文「(1) の解が (2) である」ということは，そのあとの「逆に (2.4) の解は (2.5) の形をしている」の部分．理由は脚注 12 にあるようにちょっと面倒.

質問 52： 2 変数関数 $u = u(x, y)$, 3 変数関数 $w = w(x, y, z)$ をそれぞれ座標平面，座標空間のスカラ場とみなすとき，$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ になるのはなぜですか?

お答え： なるのではありません．こう決めるのです．講義ノート 20 ページ．これはラプラス作用素の定義.

質問 53： 資料に書いた “Δ” ラプラス作用素は何かよくわかりません． **お答え：**講義ノート 20 ページの式が定義.

質問 54： 授業ははっきりわかりましたが，針金の方程式についてはまだ迷っている．材料や温度差などの変量はまだあると思いますが.

お答え： なので，実際の例を扱うときは注意が必要．たくさんのパラメータのうち何を無視して単純なモデルをつくるかによって出てくる方程式が違います．ここでは「ある理想的な状態では」と理解してください.

質問 55： $c\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t}u(t, x) \Leftrightarrow u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi ct}\exp\left(\frac{-x^2}{4ct}\right)}$ と一意に定まるのですか.

お答え： いいえ，講義ノート 21 ページ (2.9) 式あたりを見よ.

質問 56： 偏微分方程式と正規分布の関数が似たような方程式のような気がしたのですが，何か関係はありますか.

お答え： 「偏微分方程式」（とても対象が広い）ではなく「熱方程式の基本解」（特定の方程式の特定の解）の話をしているのでしょうか（ということを推測する必要があるような質問の書き方はよくないですね)．関係があるといえばありますが，この段階で説明するのは難しいかもしれません.

質問 57： 熱方程式のように，偏微分方程式には基本解以外にもたくさん解があるのですか.

お答え： 一般にそう．たとえば講義ノート 22 ページの波動方程式の一般解.

質問 58： $\lim_{t\to+0}\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) = 0$ $(x \neq 0)$, $= \infty$ $(x = 0)$ は，$x \neq 0$, $x = 0$ それぞれ 0, ∞ になるのはですか.

お答え： $x = 0$ のときは明らか．$x \neq 0$ のときはロピタル.

質問 59： ページ 13, “$f\colon D \to \mathbb{R}$” とは “f は $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数である” ということを表すと書いてあるが，第 1.1 節によると “f は定義域を D，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” という意味を表していると思います.

お答え： おっしゃるとおりですね．この講義では，とくに断らない限り値域を $\mathbb{R}$ としています．このことをきちんと断っていなかったので，講義ノート 13 ページに追加し，ご質問の記述はそのままにしています.

質問 60： 講義ノート 13 ページに「$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \,|\, x, y$ は実数 $\}$」という記述があるのですが，これは 2 つの文字は何であっても構わない，という解釈で合っていますか?

お答え： はい，定義の内部で使う変数なので，どんな記号をつかっても構いません.

質問 61： 普通は「$(x, y) \in D$」という形で定義域を決めるが， x と y の定義域が違う場合は「$(x \in \dots, y \in \dots)$」と表しますか? **お答え：**2 変数関数の定義域は組 (x, y) の動く範囲なので，「x と y の定義域が違う」は意味がありません．たとえば「$x \in (0, 1), y \in (1, 2)$」は $(x, y) \in D$，$D = \{(x, y) \,|\, x \in (0, 1), y \in (1, 2)\}$ と書けます.

質問 62： $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \,|\, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ について，$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ と $\{\ \} \subset D$ の D は同じ集合 $\mathbb{R}^n$ の部分集合を表したものでしょうか? そうであるならよく分かりません．どうして上のように書けるかを教えて下さい.

お答え： 左辺は「D の要素 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ のうち $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ を満たすものの全体」と読みます．D の要素のなかから特定の条件を見たすものを選び出しているのですから，自動的に D の部分集合になりませんか?

質問 63： $\cosh x$ と $\cos hx$ は印刷物ではフォントで区別できると書いてありましたが，手書きの場合明確に区別できるような書き方はとくにあるのでしょうか.

お答え： ないと思います．通常は文脈で区別がつくはず．山田は，後者の場合 $\cos(hx)$ と書くことがあります.

質問 64： $\exp x = e^x$ と書かれていたが e でない実数の累乗を表したいときはどのように表現するのでしょうか.

お答え： とくに記法はないと思います．a^x を上付きを使わずに表すときは $\exp(x \log a)$ と書くのがよいでしょうか.

質問 65： cotangent 「コタンジェント」secant「セカント」cosecant「コセカント」で呼び方あってますか.

お答え： はい，講義ではそう読んでいましたよね.

質問 66： 数を「スウ」と読むときと「カズ」と読むときは意味に違いはありますか?

お答え： ないと思います．山田は区別しません．通常の使い分けは，前後の読みが音読みか訓読みかによる.

質問 67： 講義資料の右側にたまに出てくる $\diamondsuit$ のマークは何をあらわしてますか.

お答え： 「例」の終わり．一般的な記号ではない.

質問 68： 講義資料 P21 の 21) （山田注：脚注のこと?）に「この積分の求め方は第 7 回に紹介する」とあるが，この講義ではまだ無限積分（山田注：そういう言葉はないと思う．広義積分という．いずれにせよこのような言葉を出したくないのであえて積分といっている）を定義していないのだから「定義と求め方は」と書くべきでは?

お答え： なるほど.

質問 69： 前回の内容ですが，この講義では値域と像域（原文ママ：この講義では単に「像」と言っています）を区別して扱うとし，たとえば $f(x) = x^2$ の値域を $\mathbb{R}$ としても正しいとの事でした．これは定義域においては高校の教科書の定義と同様に扱うという事でよろしいでしょうか．たとえば $f(x) = \frac{1}{x}$ の定義域を $\mathbb{R}$ としたら間違いでしょうか．

お答え： 間違いです．実際 $\mathbb{R}$ のすべての要素 x に対して $f(x)$ が決まるわけではないからです．

質問 70： 第 2 回の講義資料，例 2.1 の 2 行目に $f_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とありますが，$f_0\colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ だと思います．

お答え： 値域が $\mathbb{R}$ ではいけませんか? という説明を（一変数関数の場合ですが）4 月 13 日にやっています．

質問 71： 前回の内容になってしまうのですが，$\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ や $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ に使う特殊な置換 $(u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$ などに意味付けをすることはできますか? $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ を変型（原文ママ：変形？）すると，$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ となって cos みたいだなぁと思ったのですが，それとは関係があるのでしょうか．

お答え： さまざまな理由付けがあるような気がしますが，後付けにも思えます．

質問 72： 前回ちらりとでてきた双曲線関数はもう扱わないんですか．どんな時にこれがあると嬉しくなりますか．

お答え： しらっと「例題」に出てくると思います．高等学校で習っていない関数ですので，積極的に問題に出そうと思います．山田は「双曲幾何」（ここでは説明はしない）でよく使います．嬉しいです．

質問 73： 先週の授業で双曲線関数についてやりましたが，プリントにのっている詳しいこと（双曲線関数の微積など）は授業では取り扱わないのですか?

お答え： 講義時間には取り扱いません．演習の時間で少しやったかもしれませんね．授業（講義＋予習＋復習）の中ではやった，ということで．

質問 74： 多変数関数を積分する際，どのように表せばよろしいでしょうか．例えば $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ を積分する際，$\int x^2 + xy + y^2 \partial x$ と表してよろしいのでしょうか．何卒よろしくお願いします．

お答え： そのようには表しません．第 5,6 週くらいにやります．

質問 75： 偏微分に対応する積分法が存在しますか（偏微分の逆過程）．変数が複数で存在しても，一つの変数に対して積分するので存在しないと思います...

お答え： 「重積分」が対応する積分法だと思うのですが，一般には偏微分の逆過程はありません．

質問 76： 変数を定数と見なして微分するという操作を考えたということは，積分でも 1 つの変数以外を定数と見なして積分するというのも考えられますか?

お答え： 第 5, 6 週で扱う重積分はそういうものではありませんが，その計算法である「累次積分」はご質問のような積分を組み合わせて行います．

質問 77： 2 変数関数によって地図や天気図が表せたり，物理現象が表せたりするのは分かりましたが，3 次以上（原文ママ：3 変数以上のことか？）は 4 次以上の世界での現象ということになって，目に見えませんがどう利用されていますか．

お答え： 講義ではたとえば 6 次元空間の例を挙げました（座標平面上のすべての三角形の集合）．一般に「n 個の数で何かが決まる」という状況は「絵に書ける」ことと独立にあちこちにあります．絵に書けるものしか分からない，というような矮小な世界観は捨てなさい．

質問 78： 偏微分係数はどんな場合に応用されるかあまり分かりません．/ 偏微分をする意味って何ですか? どんなときに使うんですか．

お答え： わからなくてもよいです．そのうち様々な場面で否応なく使うことになります．講義ノートにあるような自然現象を表す偏微分方程式が知られているのだから，偏微分する意味はあると思いますが．

質問 79： 微分方程式など，数学は物理の道具だという話を高校時きいたのですが，数学科の山田先生はどう考えますか．

お答え： 「物理は数学を道具にする」は正しい．だいたいほとんどの学問は数学を道具にする．

質問 80： 微分方程式の求め方はこの回では扱わないのですか．

お答え： 「微分方程式を求める」とは「微分方程式を立てる」という意味でしょうか．たぶん物理学や化学など別の科目でやるのだと思いますが．

質問 81： 長崎の坂道の話や，ある地点における標高，気圧，風向（山田注：講義であげたのは風速）の話などとても分かりやすい具体例はとても有難いのですが，そういった具体例はグラフのような高級なものであるという認識で正しいのですか? どんなものでも具体例が存在するわけではないですよね?

お答え： 「具体例」の程度にもよりますが，いわゆる「日常に近い例」は理解を深めるのに役に立つことも多いですが，考えている対象以外の雑多な情報をもっているためものの本質が見えにくくなる可能性があります．

質問 82： 一個前なのですが $\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ が構義ノート（原文ママ：講義ノートのことか）を見てもよく分かりませんでした.

お答え： という質問が多かったので 4 月 13 日の講義の際に解説しました.

質問 83： 偏微分をする意味って何ですか? どんな時に使うんですか?

お答え： 講義ノート 20 ページの例を見るといろんな時に使われませんか?

質問 84： 偏微分の順序交換可能って, n 変数関数においても成り立つのですか?

お答え： 講義ノート 19 ページ.

質問 85： 偏微分の順序が交換可能であることでどのようなメリットがあるんですか?

お答え： 講義資料 2，質問 63 の回答参照.

質問 86： 先生は「実数をとらえるのは難しい」とおっしゃっていましたが，それは物体的にということでしょうか．お金などの数字はどうなるのでしょうか?

お答え： π 円とは？

質問 87： 微分方程式は高校ではやらなかったのですが，大学で使いますか?

お答え： 掛け算九九より使うかもしれません.

質問 88： 高校では log のときは底が e とみなされ，大学以降だと 10 とみなされることもあり，e^x のことも $\exp x$ と書くとおっしゃっていましたが，なぜ高校から教えてくれないのでしょうか.

お答え： 高等学校でも「常用対数」はならいませんか? 「大学では」などとは一言もいっていません.「文脈によっては」です．高等学校の教科書はたくさんある文脈の一つ.

質問 89： 前回の授業で出て来た余接，正割，余割などは憶えていた方がよいのでしょうか.

お答え： もちろんです.

質問 90： ∂ (round “d”) が例えば γ（ガンマ）や α （アルファ）などに見えた場合は減点対象でしょうか.

お答え： もちろんです．とくに α や γ も使っているような文脈では致命的.

質問 91： 講義では説明されていないが講義ノートに載っている箇所（第 1 回の円周率の近似など）は試験に出ますか.

お答え： どうでしょうね．山田が試験で何を測定したいと考えていると思いますか?

質問 92： 2 つのテストにおいて，生徒はどのくらいの点数が平均となると思いますか?

お答え： このクラスに生徒はいませんので，お答えできません.（学生というはずです．根拠は学校教育法.）

質問 93： キーワードを定めることについて，その必要性をあまり感じないのですが，どのような意味があるのですか.

お答え： OCW から送られメイルを全員に強制的に読ませるため．たとえば自然災害などで緊急に休講するとき，OCW から情報を流しても読んでいない受講者が多かったからこのような対策をとる，ということを講義時間に説明した.

質問 94： 高校の時の延長として多変数関数を習えたのでわかりやすかった.

お答え： 高等学校の数学がよくわかっていればね.

質問 95： カッコよかったです．多変数関数．あと山田先生も. **お答え：** あ，そう.

質問 96： ないです．/特にないです. **お答え：** me, too.