

2018 年 4 月 23 日 (2018 年 4 月 27 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

## 微分積分学第一講義資料 5

### お知らせ

- 本日は提出物があります。
- キーワードは電子メールにてお送りしました。

### 前回までの訂正

- 講義資料 4, 1 ページ, 前回までの訂正の下から 3 番目:  $\frac{\pi}{7}4 \Rightarrow \frac{\pi}{4}$  .

### 質問と回答

- 4 月 16 日の講義後に, 質問用紙とは別にご質問をいただきましたので, 今回はこちらで回答いたします。
- 定例の質問用紙での質問には回答いたしますが, それ以外の場合はスケジュールの都合上ただちに回答できない場合もあります。ご了承ください。
- なお, 提出用紙には「いままでの講義内容などに関する質問」を書いて頂けます。提出用紙を配布した回のみには限っていませんので念のため。

質問 1: 講義ノート 1, 11 ページ, 問題 1-14 (7): (a) なぜ答えが  $|A| > |B|$  のとき  $\pm\sqrt{A^2 - B^2} \cosh(x + \alpha)$ ,  $|A| < |B|$  のとき  $\sqrt{B^2 - A^2} \sinh(x + \alpha)$  になるんですか? (b) タンジェントインパースの「t」はなぜ大文字ではなく小文字なんですか?

お答え: 解答例 (どこにあるでしょう) をご覧になっての質問ですね。(a) この式を加法公式 (命題 1.10) で展開すれば結論が得られます。 $A \cosh x + B \sinh x$  の形から結論を導くには, 次の類似を用います: 「実数  $a, b$  が  $a^2 + b^2 = 1$  を満たしているならば  $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$  をみたす  $\alpha$  が存在する。実際  $a \neq 0$  なら  $\alpha = \tan^{-1}(b/a)$ ,  $a = 0$  のときは  $\alpha = (b \text{ の符号})\pi/2$  とおけばよい」。三角関数の合成公式の導出は, 上の事実を用いていることは理解されていますね。双曲線関数の場合

定理: 2 つの実数  $a, b$  が  $a^2 - b^2 = 1$  を満たしているならば,  $a = \varepsilon \cosh \alpha, b = \sinh \alpha$  を満たす実数  $\alpha$  と  $\varepsilon = \pm 1$  が存在する。実際,  $\alpha = \tanh^{-1}(b/a), \varepsilon$  を  $a$  の符号とすればよい (注: 条件式から  $a \neq 0$  なので  $a = 0$  の場合は考えなくてよい)。

三角関数の場合, 条件  $a^2 + b^2 = 1$  は  $a$  と  $b$  について対称ですが, 双曲線関数の場合の  $a^2 - b^2 = 1$  は  $a$  と  $b$  について非対称なので, 場合分けが生じます。

(b): Typo です。

質問 2: 講義ノート 1, 12 ページ, 問題 1-5 (1):  $4\alpha - \beta < 4 \tan^{-1} 1/\sqrt{3} = 5\pi/6$  になるのはなぜですか?

お答え: これも解答例ですね。(2/3) $\pi$  の誤りでした。ご指摘ありがとうございます。

質問 3: 講義ノート 1, 11 ページ, 問題 1-8 (2): 問題文に書いてある通りに置換積分してみました, 答えに辿り着けませんでした。どうやれば答えが得られるのでしょうか?

お答え： 多分  $\text{Tan}^{-1}$  の処理ですね．

$$v := \text{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{とおくと} \quad \tan v = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}, \quad \text{したがって}$$

$$\cos 2v = \frac{1 - \tan^2 v}{1 + \tan^2 v} = x \quad (0 < v < \pi)$$

$$v = \frac{1}{2} \text{Cos}^{-1} x = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \text{Sin}^{-1} x \right).$$

最後の等式は例 1.7 を用いた．積分定数を省略すれば解答例にある式になるはず．

質問 4： 講義ノート 1, 12 ページ, 問題 1-10 (1)： 解答例 の  $\log$  の後ろは丸括弧 ( ) ですか？それとも絶対値を表す || ですか？

お答え： 絶対値のつもり．

質問 5： 講義ノート 1, 12 ページ, 問題 1-14： 答えの一部分が微妙に違っていたので，見ていただきたいです．

$$\frac{2 \text{Tan}^{-1} (1 - \sqrt{2}x) + 2 \text{Tan}^{-1} (\sqrt{2}x + 1)}{4\sqrt{2}} \quad \text{と} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \text{Tan}^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (2x - \sqrt{2}) \right) + \text{Tan}^{-1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (2x + \sqrt{2}) \right) \right]$$

は同じですか？同じでない場合は，何が間違っているのでしょうか？

お答え： 分子第一項目の符号が違います．

質問 6： 講義ノート 1, 12 ページ, 問題 1-15： なぜ  $2(\sqrt{2R+1} - R \text{Tan}^{-1}((2R+1)/R))$  がゴム紐の伸びになるんですか？また，この式の  $R$  に代入する値は  $(4 \times 10^7)/(2\pi)$  メートルで合ってますか？

お答え： 前半：絵を描いてみよ．三平方の定理とラジアン定義からこの式は容易にでる．後半：あってます．