2018 年 4 月 27 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 6

お知らせ

- 休日が連続するため，次回は 2018 年 5 月 7 日（月曜日）となります．しばらく間があきますが，連休明けにお会いしましょう．
- 電子メイルにて追加の質問をいただいております．One liner (一行での返信）も含め，5 月 7 日配布の資料にてご質問と回答を公開いたします．イレギュラーなものは当方のスケジュールの隙間に処理しますので，遅れはご容赦ください．なお，7 日分の講義資料は，出来上がり次第 OCW，講義 web ページに掲載する予定です．

前回までの訂正

- 関数 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ の偏導関数を間違って板書したようです（4 月 20 日，23 日）．正しくは：

$$f_x=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y=\frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

- 「C^∞-級の定義」について：講義ノートでは「すべての負でない整数 k に対して C^k-級」板書では「すべての正の整数 r に対して C^r-級」としていたようです．講義ノートの方の定義を採用しましょう．とはいえ，系 3.19 から C^1-級なら C^0-級なので，どちらで定義しても同じことになります．たとえば「すべての 5 以上の整数 k に対して C^k-級」でも同値な定義になります．
- 黒板に「C^r 級」と書いたところがあるようです．講義ノートでは「C^r-級」とハイフンを入れているので，これで統一すべきでしょう．ハイフンを入れる人と入れない人がいるので，どちらでもよいのですが，同一文脈ではあまり混ぜない方がよいです．
- 講義資料 4, 質問 10：当奥線 ⇒ 等高線
- 第 3 回の講義ノートの日付が 20180420 とあったが 20180423 では，というご指摘，ここでは配布した日付を書きました．週によって違う方針にするかもしれませんが．
- 講義ノート 30 ページ，(3.4) 式：$=0$ の後の「,」を削除.

授業に関する御意見

- 教室の真ん中の列の上の電気がついていなくて暗かったです．/ 教室の電灯が一部消えていました．/ 今日の授業中，教室の真ん中あたりの電気が消えてしまっていたので，つけていただきたかったことと，スイッチの場所をおしえていただきたいです．
  山田のコメント： ごめんなさい．スイッチは教室後方．黒板灯は教壇下手側
- 自分用のメモだということですが，自分の字だとしても読めるんですか．
  山田のコメント： 読むというより記憶を引き出している．
- マイクと口をもう少し話してくれるとありがたいです． **山田のコメント：** 息がうるさい?
- リミットを省略する際「$k\to 0$」などの文字が小さかったので，もう少し大きく書いていただけますか．
  山田のコメント： はい．「リミットを省略」とはどういうこと？「$k\to 0$」と書いたら省略していないのでは，と思います．
- サスペンダーが背中でねじれてます． **山田のコメント：** 失礼しました．
- 今回の空調よかったです． **山田のコメント：** それはよかった．
- 予習してもわからなかった部分がわかってよかったです．今後もよろしくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ．
- 微積の授業が毎回楽しみです． **山田のコメント：** どうも．プレッシャですね．

- 定理 3.16 ってすごいですね. **山田のコメント：** そうですか.
- 難しかった. /いきなり難しくなってびっくりしました.
  山田のコメント： よかった. 大学まできて易しいことをやっていてはつまらないよね.
- 一気に高度な内容になったと思いました. **山田のコメント：** 三分の一は高等学校の内容なんですがね.
- 難しいですね. きちんと復習しようと思います.
  山田のコメント： そうですね.
- $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ が難しく，分かりにくいです.
  山田のコメント： そうだと思います.
- だんだん理解が追いつかなくなっている. **山田のコメント：** それが普通だと思う. 金曜日の授業を聞いた後で復習しよう.
- 単純に進行速度が早く，難しい. **山田のコメント：** そうだと思います.
- 字が大きくて見やすいと思ってたら若干小さくなるときがありました. **山田のコメント：** ごめんなさい.
- 今回の授業は聴きやすく，黒板も見やすくてよかったです. ちゃんと意見を反映してくれてありがとうございます!
  山田のコメント： 多少努力してます.
- 板書するスピードはちょっと早いから **山田のコメント：** から?
- 4/23 の授業がはやく感じられた. 進度の関係もあるのかもしれないですが，もう少し遅くしてもらえるとありがたいです.
  山田のコメント： どれくらいが適当でしょう.
- 微分と連続のことを復習して，いいと思いますが，私にとって授業はちょっと早いと思います. もうちょっと例をあげてくれませんか. **山田のコメント：** あげているつもりですが，たとえばどんなものが欲しいのでしょう.
- 今回の講義からもっとむずかしくなっている気がした. 先生は私達の質問に一つずつ答えてくださっているのでありがたいです.
  山田のコメント： もちろん，難しくなります. /どういたしまして.
- 方向微分可能という言葉を初めて聞きました. 面白かったです.
  山田のコメント： あまり教科書に書いてないかもしれない.（方向微分はよく使う）
- 微分可能の説明に用いられる等高線の例が分りやすくて助かります.
  山田のコメント： 2 変数だとこういう見方ができますね. 変数が増えたときもこの類推ができるとよい.
- 恣意的という言葉を「意図的」という意味で間違って使うのではなく，正しい意味で使う人をひさしぶりに見ました. これからも正しい使い方をしてください. 後，講義中にクソとか言わないでください. 汚い.
  山田のコメント： 前半：そうですかね. 後半：Sorry.
- 僕も英語はクソだと思います. しかしたまに楽しいと感じることもあります. 正直つらいけど自分の将来のためにがんばろうと思います. **山田のコメント：** そう. クソでもなんでも生きるためには使わなければならない.
- 今日のキーワード，漢字を覚えてもらうためだとしたら素晴らしいです. **山田のコメント：** でしょ.
- なぐってさするは結構うけました. **山田のコメント：** そうですか.
- 3 点ください. **山田のコメント：** なぜ?
- 山田先生，今日も数学者として，先生として素敵でした. 尊敬しています. **山田のコメント：** あ，そうですか.
- 前回，理学院長であるとおっしゃってましたが，1 年生の時点でそのような先生の講義を受けられることに少々の驚きと大きな喜びを覚えています. **山田のコメント：** 喜ばなくてもいいんですが.... むしろ忙しいので皆さんを十分に構ってあげられません. ごめんなさい. それにしても数学系は人使いが荒い.
- 特になし. /ありません. **山田のコメント：** そうですか.

質問と回答

質問 1： 極限に関する質問ですが，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A$ の式はなぜ $x\to a$, $y\to b$ ではだめなのか. どっちも同じだと思いますが.

お答え： 講義ノート 28 ページ，例 3.8 (1), (2).

質問 2： $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$ ということですが，「かつ」の意味で使われる 「,」 は数学界において「または」にはならないのか.

お答え： ご質問のなかに「かつ」の意味の「,」が一つも見当たらないのですが，なにを指しているでしょうか. (a,b) の「,」は $\mathbb{R}^2$ の要素の各成分間の区切りであって「かつ」という意味はありません.

質問 3： 例 3.8 の $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ は何を表しているのですか（何を示すためにかいてあるのですか）.

お答え： $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ は，x を 0 に近づけてから y を 0 に近づけるという意味ではない，ということを示すため.

質問 4： $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)\neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $(x,y)\to(0,0)$ のときの極限値をもたないではないのですか.

お答え： そうですよ.

質問 5： 多変数関数の極限について，二変数関数の場合は $(x,y)\to(a,b)$ の際に $(x,y)=(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ とすることで (a,b) の近傍の全ての点を (x,y) で表してすべての経路について考えられるが，n 変数関数（n は 3 以上の整数）の場合はどのように考えるのか．

お答え： $(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)$ は $\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}$ が 0 に近づくことと同値であることに気がつけばよい．極座標にこだわるのは筋が悪いと思う．

質問 6： 例 3.8 (3) のように極座標を使うと極限値が存在することを示すとき，また極限値を求めるときにうまくいくことが多いのでしょうか．

お答え： そうかもしれません．

質問 7： どのような経路で (a,b) に近づいても $f(x,y)$ が A に近づく $\Leftrightarrow$ 0 に収束する任意の 2 組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して $\lim\limits_{n\to\infty} f(a+h_n, b+k_n)=A$ が成り立つ，で合ってますか．それならば，反例となる h_n，k_n を見つけなければ極限が存在しないことを示せないのですか．

お答え： 合ってます.「反例となる」$\{h_n\}$, $\{k_n\}$ をみつければ「A に収束しない」ことが示せます．他にも方法はあるでしょうがこれが最も易しい方法だと思います．一変数関数のときも同じです．

質問 8： 2 変数関数において任意の方向から極限をとばす理由がよくわかりません．

お答え： そうですか．でもとばすんです．理由はどうでもいいです．

質問 9： n 変数関数（$n\in\mathbb{N}$）においても，極限値 A が存在するとは，どのような経路である点に近づいても f の値が A に近づくということになるのでしょうか?

お答え： そうです．

質問 10： 講義プリント P29 の例 3.10 (2) で $(0,0)$ で連続であるとなっていますが，「有理式であらわされる関数は分母が 0 にならない点で連続である」と書いてあるので，$(0,0)$ で分母が 0 になる $f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で不連続ではないのですか．

お答え： 推論が間違っています．ご質問の「」内の部分は 0 にならない点での関数の性質しか述べていません．「分母が 0 になる点では不連続」であるとはどこにも書かれていませんよ．

質問 11： 定義 3.11 についての質問です．$\varepsilon(h,k)$ を定義して $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成り立つということは，$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)=0$ であるのに，「$\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$」自体を一つの関数としておかないのはなぜですか．

お答え： $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)=0$ だからといって $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成り立つとは限らないので「であるのに」がよくわかりません．

質問 12： $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で微分可能であるための必要十分条件は f が (a,b) で偏微分可能で，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0 \qquad \left(\varepsilon(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

であるという定理の最後の ( ) 内の式がどこから出てきたのか知りたいです．

お答え： 定義 3.11 と命題 3.12.

質問 13： A, B の条件式の中にある $\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ はどこから導かれた式なのですか．

お答え： 導かれていません．こう「おいた」のです．

質問 14： ε を $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ で定義したときに $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ なるのはどうしてですか? h, k が十分に 0 に近いとき，$f(a+h,b+k)-f(a,b)$，$Ah+Bk$ はそれぞれ 0 になり，$\sqrt{h^2+k^2}$ も 0 になるので，$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ とは限らなくないですか？

お答え： もちろん一般に $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ とは限りません．だから，この式が成り立つ，ということは特別な性質なので**微分可能**という名前をつける．ちなみに「h, k が十分に 0 に近いとき，$f(a+h,b+k)-f(a,b)$ は十分 0 に近い」は何の仮定もなければ正しくない．

質問 15： P 30 の定理 3.13 において $\varepsilon(h,k)=$（略） が成り立つと記述しておりますが，定義 3.11 より $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ が成り立つと定義されています．定理 3.13 の $\varepsilon(h,k)$ を $(h,k)\to 0$ に極限をとったとき，$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)\to\dfrac{0}{0}$ により不定形になると思うのですが，$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)\to 0$ （原文ママ：ここでは矢印でなく等号を使うべき）になる理由を教えてください．何卒よろしくお願いします．

お答え： 読み方が誤っているようです．「... のための必要十分条件は $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) \to 0$」です．ご質問で「成り立つ」といっているのは，括弧の中の式，文中に挿入された注釈の部分です．実際，:= は講義ノート 5 ページ，脚注 17 の意味で用いています．

質問 16： 資料 P24（原文ママ：29 ページのことか）において $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ を示すためには，毎回例 3.8 (3) の様にうまくいく変形を考えなくてはいけないのですか?

お答え： そうです．

質問 17： 定義 3.3（原文ママ；講義ノートでは定理 3.3 しかないが）で $f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ の $\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ の部分がどうしてこういう形になるのかわかりません．定義であるので，覚えればよいということでしょうか？もう一度説明してほしいです．

お答え： 講義中に説明しましたが「なる」のではなく，この等式は $\varepsilon(h,k)$ の定義式．

質問 18： 定義 3.11 が分かりませんでした．イプシロンの定義式を詳しく教えてほしいです．

お答え： $\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}}$．どこを詳しく?

質問 19： 講義ノート 29 ページの定義 3.11 の式 (3.3) の $\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ は何を表しているのでしょうか．

お答え： $f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk$.

質問 20： 定義 3.11 の $f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ の考え方がよく分かりません．

お答え： ただの式ですが．

質問 21： 1 変数関数で，微分可能 $\Rightarrow$ 連続が成り立つのは，1 変数関数では微分ができる時点で多変数関数で微分可能と定義したように関数の全ての方向で微分できる状態だからという理解は OK ですか．(後付けの理解として)．

お答え： OK です．

質問 22： 「微分可能 $\Rightarrow$ D で偏微分可能で f_x, f_y が連続」が成立する場合は全然ないですか．存在したら具体的な関数式が気になります．

お答え： 「$\Rightarrow$」は「ならば」．「$P \Rightarrow Q$」は「P が成り立つときはいつでも Q が成り立つ」という意味（多少いい加減な言い方）．ご質問の「」の中は複数の場合が考えられる文ではありません．「成立する場合」はナンセンス．「微分可能であるが『偏微分可能で f_x, f_y が連続』ではない」関数があるか，という質問は意味があります．そして，その例が 3.17.

質問 23： n 変数関数の微分可能の条件ってどんなのですか?

お答え： 定義のこと? 講義で扱った定義の真似をして書いてみよう．

質問 24： グラフ $y = \sqrt[3]{x}$ は微分不可能でなめらかな曲線の例として出ていましたが，$y = \sqrt[3]{x}$ は $y = x^3$ というなめらかで微分可能な曲線を少しいじっただけのもので，それは $y = x^3$ のようになめらかであたりまえな気がします．たしかに $x = 0$ で微分不可ですが，$y = \sqrt[3]{x}$ をこの例とするのはすこしずるいかんじがします．

お答え： 「微分可能な曲線」ってなんですか? この講義では「微分可能な関数」という言葉はつかっていますが，「微分可能な曲線」という言葉は使っていません．「微分可能な関数のグラフ」ならわかりますが．講義で使っていない用語で「ずるい」というのはずるいと思います．

質問 25： 多変数関数で微分不可能で連続な関数もあると思うのですが，あってますか．

お答え： あってます．$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

質問 26： $\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h$ の等号は $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するからこそ成り立つという解釈ですか．

お答え： 成り立つ理由は講義で述べました．解釈などしなくてもそれが理由です．

質問 27： $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} + \lim_{h\to 0} f(a)$ の変形に $\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}$ の極限値が存在することが保証されているのですか．

お答え： まったくおっしゃるとおりで，ここのところ適当にごまかしてはいます．まともに書くつもりなら，

$$0 = 0\times f'(a) = \left(\lim_{h\to 0} h\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\} = \left(\lim_{h\to 0} f(a+h)\right) - f(a)$$

なのでしょうね．考え方の筋がわかりにくくはなりますが．

質問 28： 32 ページの式 (3.6) がよく分からない．$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$．このかっこの中は何を表しているか．$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ という式はわかっているが，(3.6) がちょっとわからないです．

お答え： かっこは「2 つの数の組」です．これをご質問のように書くことができる，ということを例 3.20 以下で説明しています．

質問 29： p35 の開集合の定義について，D に含まれる点 P があったとして，それを D の補集合と D の境界のどれだけ近くにとっても境界にさらに近い点が存在する，つまり D が境界を含んでいない，というのを意味しているという理解でいいでしょうか.

お答え： 大体そう．もちろん「境界」をきちんと定義していないので何を言ってもいい加減になってしまいます．「D の点 P の回りのどの方向にも D 内で動くことができる」というのがもっとも自然な「理解」だと思います.

質問 30： 開集合と非開集合の違いは等号が入らないか入るかの違いと言う認識であっていますか？

お答え： ちょっと違うのですが，いずれにせよちゃんと定義していないので，なんとも言えません．テキスト（三宅本）の 79 ページを見よ.

質問 31： 定理 3.13 なので領域 $D \subset R^2$（原文ママ：R は太字?）と D という部分集合にする意味があるのでしょうか?

お答え： 一変数関数だったら定義域を区間にするのでは? ここでは，関数の定義域を $\mathbb{R}^2$ 全体と考える必要がないからです.

質問 32： 方向微分はなんで出てきたのでしょうか．また，長所はありますか．（突然でてきたのに，だめな定義扱いされたので）

お答え： 「方向微分可能性」を微分可能の定義にするのはだめ.「偏微分可能性」もだめ．ですが，方向微分，偏微分自体は重要です.

質問 33： 方向微分可能，偏微分可能という定義は，連続であることが言えないのでだめな定義とありましたが，有用になることはありあすか.

お答え： この講義の範囲では（すなわち「普通に皆さんが使う範囲では」ない).

質問 34： 「旅」の仕方が，2 次関数的，3 次関数的だったとしても，目標の点の近くでは 1 次関数的とみなせるから，方向微分によって 2 変数関数の微分可能性を定義できるのでは，と思ったのですが，これは目標の点への近づき方を微分可能な経路に制限しているからだめなのでしょうか? 方向微分によって 2 変数関数の微分可能性を定義するのは不可能なのでしょうか.

お答え： 「経路」を考えている限りだめな気がします．説明としては「どんな方向から近づいても」としていますが，微分可能性の定義には「方向」が含まれていませんね.

質問 35： 前回の授業内容の質問ですが，2 変数関数 $f(x,y)$ とした時，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ と $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ が異なる関数はどんなものがありますか.

お答え： 講義ノート，問題 2-9.

質問 36： 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義される 2 変数関数 f が D で C^2-級なら $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つようですが，その逆は成り立たないのですか? 成り立たない場合は例をそえていただけると助かります.

お答え： 成り立たない．$f(x,y) = x|x| + y|y|$.

質問 37： C^2-級であるならば $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つとのことでしたが C^3-級であるならば $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$, $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ が成り立つということでしょうか．（他 2 件）

お答え： 成り立ちます．理由：C^3-級なら，f_x, f_y は C^2-級だから.

質問 38： $f(x,y)$ が C^n 級の関数であるということは x と y の偏微分を合計で n 回できるということで x で何回，y で何回偏微分できなければならないとかは決まってないですよね.

お答え： すべての偏導関数が存在しなければいけません．たとえば $f(x,y)$ が C^4-級とは f_{xxxx}, f_{xxxy}, f_{xxyx}, f_{xyxx}, f_{yxxx}, f_{xxyy}, f_{xyxy}, f_{xyyx}, f_{yxyx}, f_{yxxy}, f_{yyxx} f_{xyyy}, f_{yxyy}, f_{yyxy}, f_{yyyx}, f_{yyyy} の 16 個すべてが存在して，かつ連続であることです.

質問 39： C^0 級が $f(x)$ が存在して連続（原文ママ：存在しては不要），C^1 級が $f(x)$ と $f'(x)$ が存在して $f'(x)$ が連続，C^2 級が $f(x)$ と $f'(x)$ と $f''(x)$ が存在して $f'(x)$ が連続で解釈合ってますか.

お答え： 解釈より定義を頭にいれてください.

質問 40： $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ という式がありましたが，f は (a,b) の関数なので $x \to a$, $y \to b$ ではないのですか.

お答え： この文脈では f は (x,y) の関数．その偏導関数の (x,y) に (a,b) を代入した値という意味．ちょっと不自然な記号ですが，気になるなら $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_{(x,y)=(a,b)}$ とも書けます.

質問 41： 板書で「$F(t) :=$(略)」，講義ノート 30 ページの定理 3.13 のところで「$\varepsilon(h,k) :=$ (略)」とあったりしましたが，「：」を使うときはどういう時ですか?

お答え： 講義ノート 5 ページ，脚注 17.

質問 42： 方向微分の説明に登場した (v,w) を表す文字（$\boxed{} = (v,w)$ の $\boxed{}$ に入る文字）がよくわからなかったのですが，書き方と読み方を教えてもらえないでしょうか.

お答え： $\boldsymbol{v}$（太字の v）.

質問 43： 今回の講義の最後に C^1-級，C^2-級をそれぞれ C^1, C^2 と省略して用いていましたが，実際に記述問題を解く場合はやはり省略せずに書くか事前にことわっておくべきなのでしょうか.

お答え： 全然違うというわけでもないので，曖昧さがなければ問題ないとおもいます．“f is of class C^1”，f is a C^1-function” という両方の言い回しが使えます.

質問 44： 構義ノート（原文ママ：キーワードの「講義」は書けているのになぜこれは書けないんだ—罵倒モード）に出てくる「:=」にはどのような意味があるのでしょうか.

お答え： 講義ノート（これが正しい）5 ページの脚注 17.

質問 45： 連続の定義は $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ だが，これは正しく書くと，$\lim_{x\to +a} f(x) = \lim_{x\to -a} f(x) = f(a)$ ということか.

お答え： いいえ．ご質問の文をそのまま読むと，連続関数は自動的に偶関数になってしまいますが.

質問 46： $f(x,y)$ が微分可能ということと $f(x,y)$ が偏微分可能というのは異なること，なのか.

お答え： 異なることです.

質問 47： 「旅」という授業内言語を使う時，偏微分は x 軸，y 軸に平行な旅をしているということですか.

お答え： そうです.

質問 48： 「微分可能ではない」を「微分不可能」と言っても問題ありませんか?

お答え： 問題ありません.

質問 49： 講義ノートの 29 ページに出てくる「微分可能性」と黄色い教科書の 85 ページに出てくる「全微分可能性」は同じですか.

お答え： はい.

質問 50： i. e. は何の略ですか．意味は「言い換え」と捉えて大丈夫ですか.

お答え： “id est” の略．“that is” と読む．英文で “that is” の意味がわかれば「捉え」なくてもわかるはず.

質問 51： C^k-級関数の C って何が語源なんですか．/ C^1-級の C は何の略ですか?/ C^k-級関数の C って何由来なのですか?/ C^n-級の C って何の略ですか.

お答え： continuous

質問 52： C^1-級の “C” の書き方を教えてください.

お答え： ただの大文字の C.

質問 53： 「C^k-級関数」とわざわざ名前をつける必要があるのか，個人的には分からなかったのですが，何かしらメリットがあるのでしょうか.

お答え： この用語がないと「C^∞-級」が定義できないのでは?

質問 54： C^k-級関数は具体的にどんな場合に応用されていますか.

お答え： 理工学の分野で微積分を応用するときは（たいていの場合暗黙のうちに）関数が C^∞-級であることが仮定されています．きれいな式で書ける関数は C^∞-級なので，具体的にどこで，という質問には答えきれません.

質問 55： “ε-δ” の ε と $\varepsilon(h,k)$ の ε は同じものですか?

お答え： 文字としては同じ．意味合いは違う.

質問 56： 0^0 は不定形ということですが，文脈によっては $0^0 = 1$ にすることもあるということであってますか?

お答え： あってます.

質問 57： 前回の質問 58 で，「$x \neq 0$ のときはロピタル」とお答えしているが，ロピタルの定理は高校の授業要項（原文ママ：学習指導要領のことか．法律用語は正確に使うべき）に入っていないので，知らない人はそれなりにいる．だから質問への返事に，ロピタルの定理のある程度の内容も含めるべきだと思う.

お答え： 「ロピタル」と書いてあれば，検索できませんか?

質問 58： 講義ノート 30 頁の命題の 3.14 の証明がなぜ式 (3.3) の両辺で $(h,k)\to(0,0)$ とすればよいのですか.

お答え： 示したいことは $\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = f(a,b)$ だから.

質問 59： 講義ノート 36 頁の定理 3.18 の証明のうちなぜ $(\star)$ が導かれるのでしょうか?

お答え： 関数 F に平均値の定理を適用した（と書いてある）.

質問 60： 講義ノート 34 頁の 6–7 行目（略）の等号はなぜ成立するのでしょうか?

お答え： 定理 3.13 を用いた．ただし $h=h(\delta)$，$k=k(\delta)$．

質問 61： 講義ノート 34 頁の 11 行目はなぜ $|\delta|/\delta$ が必要なのでしょうか．

お答え： 分母の δ は左辺の分母，分子の $|\delta|$ は $\sqrt{\ }$ の中の δ^2 をくくりだしたもの．

質問 62： 講義ノート 12 ページの 1-11 で，正割の積分公式を導くときに $\frac{1}{\cos x}=\cosh u$ と置換するやり方がどうしても思い浮かびませんでした．どうすれば答えを得られますか．

お答え： 置換して，そのあと置換積分方の公式をきちんと適用していけばよいのでは?
実際，ご質問のような置換をすれば $\sec x\tan x\,dx=\sinh u\,du$．ここで $\tan x=\sqrt{\sec^2 x-1}=\sqrt{\cosh^2 u-1}=\sqrt{\sinh^2 u}=\sinh u$（積分している範囲を適当に考えよ）．したがって $\sec x\,dx=du$．

質問 63： 複素数の関数を考えたときに，2 変数関数との類似性はどの程度ありますか．

お答え： 定義域が複素平面；なぜか高等学校では「複素数平面」という語を用いますが「複素平面」の方が多数派．ガウス平面，ガウス-アルガン平面ということもある）の領域ですが，複素平面は $\mathbb{R}^2$ と同一視できるので，独立変数を実 2 変数とみなせますが，値も複素数にとると考えると，「2 つの実数値 2 変数関数の組」とみなすのがよいです．この対象に「複素変数の関数としての微分可能性」を定義すると，これは実関数の微分可能性にくらべて非常に「強い」性質となります．詳細は「複素関数論」「解析関数」「コーシー・リーマンの方程式」などで検索してみましょう．

質問 64： 授業中に「忘れてもいいくらい」と山田先生のおっしゃった内容など，論理の細かいところまで把握するのと，計算をしっかりできるようにするのと，どちらを主眼において勉強すればよいでしょうか．

お答え： たとえば「偏微分の順序交換定理」は (1) よく使う状況では成り立つ，ということを知っている．(2) C^2-級では成り立つ，ということを知っている．(3) その事実の証明を知っている．という 3 つのレベルを考えたとき，この講義での到達目標は (2)．(1) でも悪くない．証明を知らなくても自然に $f_{xy}=f_{yx}$ だな，と思ってほしい．「この計算で，何で $f_{xy}=f_{yx}$ としたのですか」という質問が出てくるのは筋悪．

質問 65： $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x & (x\neq 0)\\ \frac{1}{2} & (x=0)\end{cases}$ の $\cos\frac{1}{x}$ の前に x^2 が抜けていると思います．

お答え： $x^2\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x$ の微分ですね．間違っています．合成関数の微分公式を思い出しなさい．

質問 66： $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$ の極限値が存在しないことの証明で，$x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ とおくとうまくいくと思えるのはどうしてか．長年の経験か．

お答え： じっと見ればわかる．まず $\cos\frac{1}{x}$ が連続でない，ということはすぐ検討がつく．グラフだって見たことがあるかも知れない．そうしたら $x\to 0$ という近づき方で $\cos\frac{1}{x}$ がいろいろな値になるような数列を作ってやればよい．

質問 67： 例 3.2 (2) についてなぜ $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$ とおいているのですか．

お答え： $\cos\frac{1}{x_n}$ が適当な値（ここでは 1）になるような，0 に収束する数列が欲しいから．

質問 68： $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ \frac{1}{2} & (x=0)\end{cases}$, $f'(x)=$(略)．なぜ $x=0$ のとき $f'(x)$ は $\frac{1}{2}$ となるのですか?

お答え： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が $\frac{1}{2}$ になるから．

質問 69： 講義ノート 3, 30 ページ，定理 3.13 は必要十分条件ではなく，十分不必要条件ではないでしょうか．

お答え： いいえ．必要十分条件です．

質問 70： C^∞-級 ... 全ての正の整数 r に対して C^r 級についての説明が分かりませんでした．

お答え： そうですか．書いてあるとおり，としか言いようがないのですが，どういう点がわからないかを具体的に特定してくれないと質問として成立しないと思います．

質問 71： 方向微分がまったくわかりません．何の話をしているのかがわかりませんでした．

お答え： どのへんが? 旅の表示? 一変数関数をつくるところ? このご質問だと「そうですか」としか言いようがないですね

質問 72： $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ の高さ 1 の等高線に沿って $(0,0)$ に近付くと f の値 $\to 1$ となるので矛盾，という話がありましたが，$(0,0)$ に極限まで近づけるのならどんな経路をとっても f の値 $\to 0$ なるのではないですか? ある点を $(0,0)$ に限りなく近づけたときの，その点の $(0,0)$ の距離よりも，$(0,0)$ の点としての大きさの方が小さいととらえているのですか?

お答え： ご質問の意味が全くわかりません．$(x,y)\to(0,0)$ は $(x,y)\neq(0,0)$ としながら近づける．これは高等学校でならった 1 変数関数のときと同じ．

質問 73： 等高線の見方，書き方がいまいちわかっていません．

お答え： 「いまいち」は「いまひとつ」の意味ですね．ということはある程度のところまでわかっているが完全にはわかっていない，ということですね．どの程度までわかっていてどこがわかっていないかを明示していただかないと，なんとお答えしてよいかわかりません．

質問 74： 微分可能性についてよく理解できた．

お答え： そうですか

質問 75： 質問は思いつかないし，誤りも見つけられず，書くことが出来ない場合は「特にありません」ですか？

お答え： そうですね．

質問 76： 特にありません． **お答え：**me, too.