

2018年5月7日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 7

お知らせ

- 来週の月曜日(5月14日)に中間試験の予告をいたします。皆様お誘い合わせの上おいでください。
- 今回は提出物があります。間が1週間空いたので確認：
 - － 提出用紙は今回配布します。裏面使用不可。
 - － 受講登録者には電子メールにてキーワードで送っています。
 - － 課題：今回までの講義内容に関する質問、講義資料等の訂正。
 - － 提出場所：山田の部屋(本館2階231)の前のポスト。
 - － 期限：5月8日(火曜日)12:30

質問と回答

- 再び、質問用紙とは別にご質問をいただきましたので、今回はこちらで回答いたします。
- 定例の質問用紙でのご質問には回答いたしますが、それ以外の場合はスケジュールの都合上ただちに回答できない場合もあります。ご了承ください。
- なお、提出用紙には「いままでの講義内容などに関する質問」を書いて頂きます。提出用紙を配布した回のみには限っていませんので念のため。

質問1: 講義ノート11ページ、問題1-4(7):「ただし符号はAの符号と一致」という言葉は、何が「Aの符号と一致」していることを意味しているのでしょうか?

お答え: 解答のページですね。一行上の±です。

質問2: 講義ノート12ページ、問題1-8(2):この問題は $u = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ と置換するのではなく、 $u = \tan^{-1} \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ と置換して考えれば良いということでしょうか?

お答え: いいえ。問題の通りに置換して積分すると $\tan^{-1} u$ ができます。以前ご質問していただいたときの回答は、まず問題のとおり置換して計算したあとの話をしています。まずは問題の通りにやってみてくれませんか?

質問3: 講義ノート22ページ問題2-5(2):何故「 xz 平面上のグラフ $z = F(x)$ ($x \geq 0$) を z 軸の周りに回転させて得られる回転面」が f のグラフになるのでしょうか?

お答え: f のグラフの等高線はどうなるでしょうか。

質問4: 講義ノート23ページ問題2-9: $f_{xx}(x, y) = 4xy^3(x^2 - y^3)/(x^2 + y^2)^3$ (ただし $(x, y) \neq (0, 0)$)、 $f_{xy}(x, y) = -1$ (ただし $(x, y) = (0, 0)$)、 $f_{yx}(x, y) = 1$ (ただし $(x, y) = (0, 0)$) になるのは何故ですか?

お答え: f_x を求める(場合わけあり、講義でやったようなやつ)。それを微分する(同じようにやる)。

質問5: 講義ノート23ページ問題2-13: $2F'(r)/r + F''(r) = 0$ となる $F(r)$ は $F(r) = a/r + b$ と何故分かるんですか?

お答え: $(\log |F'(r)|)' = -2/r$ 。この科目では微分方程式の一般論は扱わない。これくらいは高等学校の微積分をきちんと学んでいれば大丈夫ですよ。

質問6: 講義ノート24ページ問題2-14: h の定義域の例が何故 $\{(x, y) | y > 0\}$ になるのでしょうか?

お答え: 申し訳ありません。誤植です。 $\{(x, y) | x > 0\}$ です。

質問7: 講義ノート24ページ問題2-15(2):どうやって二項定理で確かめるのでしょうか?

お答え: $(x + iy)^m$ を二項定理で展開する。

質問8: 講義ノート21ページ4行目: $\lim_{t \rightarrow +0} u_0(t, x) = 0$ ($x \neq 0$)の導き方ですが、ロピタルを調べてみても解決でき

ませんでした。どうやって「0」を導くんでしょうか？

お答え：たとえば $u = 1/\sqrt{t}$ とおいて u/e^{au^2} の $u \rightarrow +\infty$ とした極限値を求める。ただし a は正の定数。高校生でもできるやり方として $u > 0$ のとき $e^u > 1 + u$ を用いる、というのもあり。こういう質問は、数時間は試行錯誤をしてからきいてほしい。

質問 9：教科書 31 ページの 4. についてです：(1), (2) それぞれどうやって原点で不連続、連続とわかるんでしょうか？

お答え： $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求める。講義で説明したように「はさみうち」。

質問 10：講義ノート 36 ページ、問題 3-1 の例 3.10 (1) : $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ になるのをどうやって確かめるんでしょうか？

お答え：(i) f_x (f_y) を求める (場合分け) (ii) それから偏微分係数の定義 (16 ページ) にしたがってもとめる。

質問 11：講義ノート 36 ページ、問題 3-1 の例 3.10 (2) : $(0, 0)$ で連続であることをどうやって確かめるんでしょうか？

お答え：例 3.8 (3)。

質問 12：講義ノート 36 ページ、問題 3-1 の例 3.17 : f_x, f_y は原点で連続でないことをどうやって確かめるんでしょうか？

お答え： $f_x(0, 0) = 0$ (これは計算できますね)。 $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ となる数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ で $f_x(x_n, y_n)$ が 0 に収束しないものを探す。

質問 13：講義ノート 36 ページ、問題 3-2 : 2 変数関数が連続であること、偏微分可能であること、微分可能であること、 C^1 -級であることの間関係は、どうなっているのでしょうか？

お答え：4 月 23 日, 27 日の講義ノートをみよ。

質問 14：講義ノート 36 ページ、問題 3-3 : $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$ に対して $f(0.1, 0.2)$ の近似値はどうやって求めるのでしょうか？また、計算機で求めた値との比較はどうやってするのでしょうか？

お答え：例 3.21。比較は、2 つの値をよく眺めてどれくらい違うか考える。

質問 15：講義ノート 36 ページ、問題 3-4 : 「時刻 t でその人がいる標高を表す」で、問題で求められている説明になっているのでしょうか？

お答え：はい。

質問 16：講義ノート 12 ページ問題 1-15 : 絵を描いて、三平方の定理やラジアン定義を用いて求めようと思ったのですが、うまくいきません。絵ですが、1 メートル持ち上げた後の絵は、地球が傾いていて、ゴム紐が赤道に沿ったままの絵で合っているのでしょうか？正しい場合は、どの三角形に注目すれば良いのでしょうか？間違えている場合は、どういう絵が正しいのでしょうか？また、仮に $2(\sqrt{2R+1} - R \tan^{-1} \sqrt{(2R+1)/R})$ が求められたとして、この式の R に $4 \times 10^7 / (2\pi)$ を代入してみました、 3.6×10^3 m になってしまい、解答例と桁数がかけ離れています。 $\sqrt{2R+1} \doteq 3.6 \times 10^3$, $\tan^{-1} \sqrt{(2R+1)/R} \doteq 3.6 \times 10^3$ と近似しましたが、間違っているのでしょうか？近似計算は、何が正しい答えなのでしょうか？

お答え：「地球が傾く」という言葉の意味が分かりません。ゴムひもが地球から離れる地点から 1 メートル持ち上げたところまでは紐は地球に接した線分になります。考える三角形は、地球の中心、つまみ上げた点、線分と地球の接点を頂点とする三角形です。後半ですが $\tan^{-1} \sqrt{(2R+1)/R} \doteq 3.6 \times 10^3$ が変だと思います。 x が十分小さいとき $\tan^{-1} x$ は x とほぼ等しいので、このような問題での近似の正解は「何桁までただしいか」が評価できること。それは簡単でないことを理解してもらおうのがこの問題の目的。手計算で近似値とその誤差を求めるには 9-10 ページの議論が役に立つ。