2018 年 5 月 11 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 8

重要なお知らせ

定期試験日程変更：2018 年 6 月 7 日（木曜日）10:45–12:15

- すでにメイルでお知らせした内容です：4 月 9 日の授業の際に，定期試験の日程を **6 月 8 日（金曜日）** と予告しましたが，教務からの要請により **6 月 7 日（木曜日）10:45–12:15** に変更したいと思います．ご都合の悪い方は本日 5 月 11 日（金曜日）中に山田まで電子メイルでご連絡ください．
- 次回 5 月 14 日に中間試験予告を行います．

前回の補足

- $\tilde{f}$ とはどういう意味か，という質問が複数．これ全体で一文字です．高等学校でも「点 A，A′」 という記号を使ったと思います．このとき A′ は A とは違う一文字（関連しているかも知れないが別のもの）と考える，それと同じです．
- ラプラシアンを極座標表示をする部分を黒板で計算したところ $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos\theta\left(x_r\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + y_r\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\theta\dots$ と書いたあたり，式変形の理由がわからないという質問が多数ありましたので，きちんと書きます．ここで，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とします．

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

ここで $\partial f/\partial x$ は (x, y) の関数だが，変数変換により (r, θ) の関数と見なしている．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

なお，黒板ではこの式変形の $\partial x/\partial r$ を x_r と書いています．記号の混用はよいか，というご質問がありましたが，混乱する心配がなければよいと考えます．

前回までの訂正

- 板書で

$$\frac{d}{dt}f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\bigl(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)\bigr)-f(x,y)}{\Delta t}$$
$$\Rightarrow\qquad \frac{d}{dt}f\bigl(x(t),y(t)\bigr)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\bigl(x(t+\Delta t),y(t+\Delta t)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)}{\Delta t}$$

- ラプラシアンの極表示を説明する際に，座標変換の逆変換の微分を扱いました．そこで「$\frac{\partial x}{\partial r}\neq\frac{\partial r}{\partial x}$」と書きましたが，ここで言いたかったのは「$\frac{\partial x}{\partial r}\neq 1/\frac{\partial r}{\partial x}$」すなわち，偏微分の記号は分数のように扱ってはいけないということでした．

授業に関する御意見

- 窓開けたのナイスプレーです． / 空調がよかったです． / 教室の換気をしてくださりありがとうございます．
  山田のコメント： はい．
- 時々先生の ∂ と θ の区別がつかなくなります．良い見分け方を教えてください．
  山田のコメント： ごめんなさい．文脈を理解すればわかるはずですが．
- イコールがマイナスに見えます．直してください． **山田のコメント：** きをつけます．
- もう少しはっきりしゃべってほしいです．ところどころ聞き取れないところがありました．
  山田のコメント： ごめんなさい．気をつけます．
- マイクと口が近くてうるさかったですが，前回の授業はあまり気にならなかったです．
  山田のコメント： なるほど．どういう具合なんでしょうね．
- 既出だったら申し訳ないのですが講義資料についている問題の答えの見方を教えて欲しいです．
  山田のコメント： 書いてあるとおりに読んでください．誤りがある可能性もあります．
- 問題の答えをもっと早く掲載していただきたい． **山田のコメント：** なぜ?
- ξ と ε は見分けにくいです．（特に手書きは） **山田のコメント：** 初速度と終端速度の向きが違うと思いますが．
- 一般で説明するのは大事だと思うが少し具体例を出して欲しい．
  山田のコメント： 今回はひとつ出していますが気がついていますか？金曜日の講義でもう少しだします．
- 講義の時間が短いと思いますが，例問題を授業で解いたら授業の内容をもっと分かるようになるのじゃないかなと思いました．
  山田のコメント： ひとつやったのは気がついていますか．主に金曜日に例題を扱います．
- 講義面白いです．次も楽しみにしています． **山田のコメント：** 期待し過ぎないようにしてください．
- 良かったです． **山田のコメント：** ほんと?
- 難しくなってきましたが楽しんでほどほどに頑張ります． **山田のコメント：** そうですね．
- 分りやすかったです． **山田のコメント：** ほんと?
- そろそろ何がわからないかわからなくなりました． **山田のコメント：** なるほど．そういうこともありますよね．
- 行列が急に出てきておどろきました．授業を聞いて少しわかりました．ありがとうございます．
  山田のコメント： 少しわかれば結構です．
- 行列をやったことがないため，横に並べて書くのと縦に並べて書くのが混合していることに慣れません．
  山田のコメント： 慣れてください．
- 論理的に考える大切さを日々感じています． **山田のコメント：** そう?
- Chain Rule の日本語訳は「連鎖律」だと思います． **山田のコメント：** なるほど．ありがとうございます．
- 今回英語多めでびっくりしました． **山田のコメント：** そんなに多い?
- 写真映りがとても良いですね． **山田のコメント：** そうですか?
- 山田先生はクールビズスタイルも非常にお似合いでした．また，お忙しい中，懇切丁寧な質問対応に心より感謝申し上げます．
  山田のコメント： はい．
- スーツの襟の部分が崩れていた． **山田のコメント：** 失礼しました．
- Nothing! **山田のコメント：** そうですか．
- なし **山田のコメント：** me, too.
- 特に無いです． **山田のコメント：** me, too.
- ないです．山田のコメント：me too **山田のコメント：** 1 学期の間にかならずだれかやりますね．

質問と回答

質問 1： $F(t) = (x(t), y(t))$（原文ママ：右辺は $f(x(t), y(t))$ のこと?）の微分公式もチェイン・ルールですか.

お答え： はい（括弧内の修正を入れれば）.

質問 2： 命題 4.9 で $dF^{-1} = (dF)^{-1}$，すなわち $d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big) = \big(dF(\boldsymbol{x})\big)^{-1}$ と書いてあるが，間違えがあるのではないかと疑問に思いました. **お答え：**わかりにくいが間違っていない．左辺は $d(F^{-1})$ の点 $F(\boldsymbol{x})$ における値.

質問 3： $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$ の展開は一体どうやって書けばいいですか.

お答え： 講義ノート 40 ページの真ん中あたり.

質問 4： 多変数関数の偏微分記号（例えば $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}$）が約分できないというよりは，1 変数関数の微分記号（例えば $\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$）が便宜上約分できるだけで，微分記号はいつも約分できるものではない，という認識で問題ありませんか?

お答え： そうですね.

質問 5： d と ∂ は多変数関数かどうかで使い分ける，という話と，∂ は d と違って分数のように約分できないという話がありましたが，一つの計算の中に d と ∂ が同時に出てきても d の方は分数のように扱えますか?

お答え： 具体的にどういう状況でしょう．具体例を自分で作ると，自動的に答えがでてくると思います.

質問 6： 一変数関数 f について「f」は対応の規則,「$f(x)$」は x を規則 f で変化させた値ということですか? また，その場合，板書の式 $(\xi, \eta) \mapsto (x, y) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ の等号について，左辺と右辺の x は違ったものである — 左辺の x は値であり，右辺の x は対応の規則 — ということですか.

お答え： 少々変な記号ですが，物理や工学では，関数の名前と，その値を表す変数に同じ文字を用いる習慣があります.

質問 7： 結局，なぜわざわざマトリックス表示で表すのですか.

質問 8： 連鎖率の関係を行列で表すとどういった点で便利になるのでしょうか.

お答え：「旅」に沿って微分する公式なら，関数 f だけからきまる部分と，曲線 $(x(t), y(t))$ だけからきまる部分にわけたことになる．ということを講義で説明した.

質問 9： 急に行列やら写像やらが出てきたのは，それを使用すると微分を正確に理解できるからですか?

お答え： 記述が簡単になるからだと思います.

質問 10： 行ベクトルと列ベクトルの使われ方の違いを教えて下さい.

お答え： 通常のベクトルは「列ベクトル」と思うのが自然（高等学校で使う記号とは少し違う)．行ベクトルは「全微分」などに用いるが，うるさくいうと「双対空間」の元を表している...（気にしないでください).

質問 11： 講義ノート P37，38 に行列の基礎知識が載っていますが，この程度は 2Q を待たずして理解しておくべきとの事でよろしいでしょうか. **お答え：**できれば.

質問 12： 講義ノート P38 の 5~7 行目に，正方行列 A に列ベクトル x（原文ママ：$\boldsymbol{x}$ のことか）を掛ける（原文では「掛」の左側が木偏）演算を $Ax = \binom{\alpha_1 x}{\alpha_2 x}$ と定義すると書かれているのに対し，同じく P38 の 10~11 行目に，正方行列と列ベクトルの積は列ベクトルと書かれていますが，$\binom{\alpha_1 x}{\alpha_2 x}$ は列ベクトルではなく，行ベクトルであると思います．これは間違いでしょうか. **お答え：**間違いです．38 ページの最初の方を見よ.

質問 13： 講義ノート P.41 の $\xi = F(x)$（$\xi = (\xi, \eta), x = (x, y)$）の $F(x)$ の部分の x は $x = x(x, y)$ の ( ) の中の x と違うことを表わしていますよね? 文字の太さが少し違うだけなので気になりました.

お答え： 少しでなく露骨に違うのですが．太字です.

質問 14： 講義資料の 39 ページの $x = {}^t(x, y)$,（原文ママ：左辺と右辺で同じ文字を使わないで欲しい)，$v = {}^t(v_1, v_2)$, $P = {}^t(a, b)$ における t と $\gamma(t) = P + tv = {}^t(a + v_1 t, b + v_2 t)$ における $a + v_1 t, b + v_2 t$ の t は同じものではないですよね. **お答え：**違うものです．困った記号ですよね.

質問 15： 講義ノートの P38 x^t の t は $x = {}^t(x_1, x_2)$, $x^t = (x_1, x_2)^t$ のどっちにつけても大丈夫ですか?

お答え： このノートでは左．右につける人もいますが，一つの文脈で混用しないでください.

質問 16： 行ベクトルどうし，列ベクトルどうしの積は存在しないのですか? **お答え：**ここでは定義しない.

質問 17： 講義ノート 38 ページの (4.2) の $AA^{-1} = E$ について $AA^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\det A} \left(\begin{smallmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{smallmatrix}\right)$ の計算の中で

$$\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{smallmatrix}\right) = (a_{11}, a_{12})\left(\begin{smallmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{smallmatrix}\right) + (a_{11}, a_{12})\left(\begin{smallmatrix} a_{-12} \\ a_{11} \end{smallmatrix}\right) + (a_{21}, a_{22})\left(\begin{smallmatrix} a_{22} \\ a_{-21} \end{smallmatrix}\right) + (a_{21}, a_{22})\left(\begin{smallmatrix} a_{-12} \\ a_{11} \end{smallmatrix}\right)$$

という計算をすすめていくやり方であっていますか?

お答え： 右辺の a_{-12} は $-a_{12}$? としても合っていません．右辺はスカラで行列の等式になっていない.

質問 18： $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \\ a_2b_1 & a_2b_2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} a_1b_1 + a_2b_2$. この (1) の等式は成り立つのか?

お答え： 成り立たない．行列の積は掛け算の順番を替えると一般に別のものになる．

質問 19： $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ としたとき，$AA^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で合っているか.

お答え： 合っている.

質問 20： 行列について授業プリントにのっている基礎でさえよく理解できていないのですが, $(\bigcirc\ \triangle)\begin{pmatrix} * \\ \bigstar \end{pmatrix} = \bigcirc * + \triangle\bigstar$ だけ覚えるのでは不十分ですか? やはりプリントに載っている分は理解しておくべきですか?

お答え： 当面は十分．あとでもう少し必要.

質問 21： 行列について深く習っていないが，以後の授業で詳しく解説されるのでしょうか？それとも行列の深い内容については講義では扱われないのでしょうか. **お答え：**扱いません．ここでは講義ノート程度のものを用います.

質問 22： 行列は先に自主学習しておくべきでしょうか. **お答え：**講義ノートにある程度でよいです.

質問 23： 「行列」が出てきましたが，数 C 範囲の「行列」をやっておくべきでしょうか？

お答え： 数 C とは，高等学校の科目のこと? わざわざ戻らなくてもよいですよ.

質問 24： 「行列解析」という言葉を耳にしたのですが，一年生では履修しますか?

お答え： そういうタイトルの本があるようですね．一部は 1 年生で学びますが，全部ではありません.

質問 25： 行列の計算についてもう少し詳しく説明してほしいです.

お答え： 具体的に使うのは講義で説明した程度のこと．詳しくは講義ノート 37 ページから 38 ページを（余計な邪念を入れずに）読むと分かる.

質問 26： 講義ノート P37∼38 の「行列とベクトルの演算」は金曜日に詳しく説明するのでしょうか.

お答え： あまり詳しく説明しません，というかそこに詳しく書いてある.

質問 27： 行列の積の所で “Jacobian Matrix” という単語が出てきたが，何を指しているのかが分からなかった．もう一度説明願います. **お答え：**講義ノート 41 ページ.

質問 28： 高校で行列を学んだことないけど $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ということですか?

お答え： そうです.

質問 29： ヤコビアンを定義すると嬉しいことはなんですか? その定義になぜ det を使用しだすのかがわかりません.

お答え： det が消えない行列は正則だから．逆関数定理，または逆写像定理で検索してみよう.

質問 30： なぜ単位行列を E で表すことが多いのですか. **お答え：**die Einheitsmatrix.

質問 31： 調和関数である関数はどのような特徴がありますか? 様々な特徴があり，聞くことは野暮ではあるとは思いますが，一例を挙げてもらえると助かります．何卒よろしくお願い申しあげます.

お答え： $\Delta f = 0$ となる，というのが特徴，っていうのはだめですか? たとえば，平面上の調和関数 f は $f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\,d\theta$ を満たす．これは「調和関数に関する平均値の定理」と呼ばれる.

質問 32： 調和関数は $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ となる関数であることは分かったのですが，$\Delta f = 0$ となると数学において何が良いのですか? もしくは数学において何に使うことができるのですか?

お答え： ラプラシアンはいたる所に現れるので，ここではその意味を説明しない，と講義で述べています．数学においては，例えば複素解析関数の実部・虚部は調和関数．極小曲面の座標関数は（誘導計量に関する）調和関数.

質問 33： 演習でも調和関数かどうか調べろという問題があったのですが，調和関数であることが分かるとその関数についてどのようなことが言えるのですか.

お答え： たとえば調和関数に関する「平均値の定理」「最大値の定理」「リウヴィルの定理」などで検索してみよう.

質問 34： 調和関数の基本はほぼ理解できたのですが，調和関数はどこでどのように使うのが効果的なのでしょうか.

お答え： 効果的とは?

質問 35： 調和関数のとき何か特別なことがあるんですか?/ 調和関数だといいことがあるのですか. / 調和関数とは何か特徴的なことなどはあるのですか. **お答え：**あります.

質問 36： $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいたとき，$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ を満たすのは，2 変数関数 $f(x,y)$ が C^∞-級だから，という理解で正しいですか. C^k-級 $(k \geqq 2)$ だからと説明した場合どこかに間違いがあればご指摘お願いします. **お答え：**間違いはありません.

質問 37： $\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と考える時だけ成立するのでしょうか.

お答え： はい.

質問 38： $\frac{\partial r}{\partial x}$ を求める時，どうして直接 r を x に対する微分をするのはだめですか.

お答え： 大丈夫，やってもいいです．でも計算が面倒なので，逆対応の微分をとっています.

質問 39： $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}$ の f を消して $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$ となっていますが，なぜ f を消すことが可能なのですか． **お答え：**消しているのではない．f は何でもよいから，$\frac{\partial *}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial *}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial *}{\partial\theta}$ のつもり．

質問 40： 変数変換の項目で $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいて (4.13) 式を導出しているが，これはただの具体例ですか．

お答え： そうです．ただし，さまざまな場面で現れるので，知っておく（覚えておかなくても，こんな形っぽいことを知っていて導出できる）と便利です．

質問 41： 講義資料第 4 回の 44 ページ，(4.13) の式は直交座標系では $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$，極座標系では $\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ となることを表していると思いますが，$f_{rr} + f_{\theta\theta}$ には特別な名称はないのでしょうか? また，他の変数変換でも同様に Δf が一定になるように定めるのですか．

お答え： 考える必要があれば考えるが，由緒正しい名前はないようです．最後の文の意味がよくわからないのですが「直交座標系でご質問の形のものが他の座標系でどう書き換えられるか」を考えています．

質問 42： $\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) = \cos\theta\sin\theta\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \cos\theta\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}$ はなぜですか． **お答え：**積の微分公式．

質問 43： Laplacian を極座標に表す理由はなんですか．活用方法が気になります．

お答え： 回転対称性をもつ系ではこの方が便利だから．たとえば (3 変数のラプラシアンですが) 水素原子のシュレディンガー方程式を解く際に，極座標表示を使うんです，というようなことを講義で口走りました．

質問 44： $\Delta f = 0 \Leftrightarrow F'' + \frac{1}{r}F' = 0$ という式がよく分からなかったのでもう一度説明してほしいです．

お答え： この式だけで分かるのは無理．関数 f が回転対称，すなわち $f(x, y) = F(r)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ の形をしているとせよ．ただし F は 1 変数関数．このとき f が調和関数であるための必要十分条件は，$F'' + \frac{1}{r}F' = 0$.

質問 45： 5/7 の講義の一番最後にやったものは $\Delta f = 0$ にならない，つまり調和関数でない例としてあげられたものですか． **お答え：**何を指しているかわかりませんが $f(x, y) = a\log\sqrt{x^2 + y^2} + b$ （a, b は定数）は調和関数．

質問 46： $(\log(F'))' = \frac{F''}{F'} = -\frac{1}{r} = (\log r^{-1})'$ より $F' = \frac{a}{r}$ とありましたが，$F' = \frac{1}{r} + a$ (a は任意の定数）だと思うのですが，間違いですか． **お答え：**間違いです．$\log(F') = \log\frac{1}{r} + b = \log\frac{a}{r}$ $(a = e^b)$.

質問 47： 直交座標系や極座標以外にはどのような座標を勉強していきますか?

お答え： 考えたい問題によるでしょう．この授業では「一般の座標」の扱いができるようになってほしいですが，一つ一つの特別な座標を掘り下げることはしません．

質問 48： 3 変数以上の場合の調和関数はどのようになるのでしょうか．

お答え： $f(x_1, \dots, x_n)$ が調和関数であるとは，$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ が恒等的に 0 となること．

質問 49： 3 次以上の行列式はどのように定義されるのですか．

お答え： 一般次数の定義はめんどくさい．線形代数で学ぶが，このあたりをどう教えるかはいつも悩むところ．ここではとりあえず 2 次に限っておきましょう．

質問 50： これまでの講義で扱った内容は，2 変数に限らず一般の n 変数関数についても成り立ちますか．

お答え： はい．ただ，変数の個数が増えると，現れる行列の次数が上がり，とくに行列式や逆行列の公式が複雑になるので，とりあえずここでは扱いません．

質問 51： チェイン・ルールは 2 変数オンリーですか． **お答え：**いいえ．一般の場合の式を想像しよう．簡単だから．

質問 52： 講義ノート P. 41, 14 行目の「$G \circ F$」はどのような意味ですか． **お答え：**14 行目が定義．

質問 53： delta と Laplacian の記号は同一のものではないですよね? 見分けが付かないのですが，そのときの雰囲気で見分けるしかないですか? /「ラプラシアン」と「デルタ」の表記はどのように分けたらよいでしょうか．

お答え： 山田は書き分けていません．文脈で判断してください．皆さんがこのような記号を含む文を書くときは，意味を正確に読み取れるように書きましょう)．

質問 54： 「ラプラス変換」の Δ と Δx と書いて「デルタエックス」と読むときの Δ は同じ Δ を使ってしまってよいのでしょうか． **お答え：**ラプラシアンです．「ラプラス変換」は別のものです．

質問 55： ξ のことをローマ字で講義ノート 40 ページでは “xi” となっていますが，板書では “ksi” と書かれていたと思います．どちらが正しいのでしょうか． **お答え：**TEX のコードは `\xi`，発音は “ksi” っぽい．

質問 56： (ξ, η, ζ) は実際はどのような場面で使われるものなのでしょうか．

お答え： (x, y, z) に対応するものとして使うことが多い，と講義で説明した．

質問 57： アルファベットの由来は α と β からとおっしゃっていましたが，行列の由来ってなんですか? 数字が列に並んでいるからですか? **お答え：**「行」と「列」．

質問 58： 方向微分が可能であるということは，ある速度ベクトル $\vec{v}$ において，微分可能であることは理解できたが，具体的にどういう意味を含むのか教えてほしいです．

お答え： この講義では $\vec{v}$ という記号は使っていないはずですが，わざわざ使う理由はなんでしょう．「速度ベクトル $\vec{v}$ において，微分可能」とはどういう意味でしょう．理解できた，というからにはそれを説明してごらんなさい．ちなみに「方向微分可能」の定義では「ある $\boldsymbol{v}$」ではなく「任意の $\boldsymbol{v}$」です．

質問 59： 未だに $\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ が理解できていない．どうして $(h+k)\varepsilon(h,k)$ や $\varepsilon(h,k)$ ではいけないのか．

お答え： 微分可能性の定義の (3.3) の最後の項のこと？これを $\varepsilon(h,k)$ として微分可能性を定義すると，すべての連続関数は微分可能になる．また $(h+k)\varepsilon(h,k)$ だと，$(h,k)=(0,0)$ の近くで $h+k=0$ となる点がたくさんあるので $\varepsilon(h,k)$ が決まらない．ここで $\sqrt{h^2+k^2}$ の代わりに $|h|+|k|$ としても同値な定義になっている．

質問 60： 講議（原文ママ：講義のことか）ノート P12 1-11 (1) の置換後は $\sec x = \frac{1}{\cos x} = -1 + \frac{2}{1+t^2}$ で合っていますか？ **お答え：**合っています．

質問 61： 講義ノート p 12 の 1-8 について $u=\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ と置換しましたが，どう頑張っても $u=\operatorname{Tan}^{-1}u$ の置換（原文ママ，これでは置換じゃなく方程式）にたどり着けないのですが，どうすれば $u=\operatorname{Tan}^{-1}u$ の置換積分計算に持ち込めるのでしょうか．しつこくてすいません．先生の力を貸してください．

お答え： $u=\operatorname{Tan}^{-1}u$ ではなく $\operatorname{Tan}^{-1}u=\int\frac{du}{1+u^2}$ を用いる．この問題ででてくるのは $I_m:=\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$ $(m=2,3)$ の場合だが，$I_m:=\int\frac{u'\,du}{(1+u^2)^m}$ と書き換えて部分積分をすることによって I_m の漸化式が得られる．

質問 62： 講義ノート P36 の例 3.17 について $f_x(0,0)=0$ はどうやって計算するのでしょうか．

お答え： $(f(h,0)-f(0,0))/h$ の $h\to 0$ としたときの極限値を求める．

質問 63： 数学は暗記なんですか？理解が追いつきません． **お答え：**用語，記号は覚えないと土俵にすら上がれません．

質問 64： 講義ノートに，命題 3.23 から次がわかる：命題 4.2... とありますが，なぜそうなるのかがわかりません．

お答え： 左辺を定義 4.1 で書き換えると，命題 3.23 が使えて結論が得られる．

質問 65： 行列式は行列が正則であるかどうかの指標という認識でよいでしょうか？ **お答え：**講義資料 4，質問 8.

質問 66： 陰関数の微分は合成関数の微分と本質的には同じですか？

お答え： 合成関数の微分公式から陰関数の微分公式はでます．でもそのことを「本質的に同じ」とは言わないのでは？

質問 67： 変数変換は全微分をさらにその対応する文字で微分しているということですか．

お答え： 何のことを言っているのか伝わりません．

質問 68： 逆関数の微分が一致しないということではないか．$\frac{dr}{d}\neq\frac{d}{dr}$？

お答え： 何も文脈が示されていないのなんだかわかりません．

質問 69： 微分ができないから $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を用いて遠回りした求めたということですか？

お答え： 「求めた」の目的語がないので何を言っているかわかりません．

質問 70： $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dots$ と聞いたが，イマイチ 2 回微分の和が何を表すのかピンと来ない．

お答え： それは調和関数ではない．ちなみに講義資料 6，質問 73 の回答参照．

質問 71： 途中 $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ がいきなり出てきましたが何ですか．

お答え： 質問として完結していません．文脈をきちんと挙げてください．ここでは $\alpha(x,y)=x$ とおくと $d\alpha=(1,0)$, $\beta(x,y)=y$ とおくと $\beta=(0,1)$．したがって $dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$ と書ける，ということを述べた．話の全体をきちんと把握しよう．

質問 72： $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ から $df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$ のところがよくわかりません． **お答え：**そうですか．

質問 73： $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が何故 $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$ になるかがわからないです．

お答え： それはわからないです．だって何の仮定も書いてないから．どういう状況でこのように書き換えられるのか，なぜこのように書き換えられるのか，を説明したのが講義の後半．

質問 74： 板書で $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$ とありましたが，ココ（山田注：最後の項の分母）は r ではなく θ ですか．

お答え： はい．

質問 75： 全微分は簡単にいうと偏微分をたしたものとのことですが，2 変数関数の場合 X 方向，Y 方向（原文ママ：大文字ですよね）での傾き $\frac{\partial Z}{\partial X}$, $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ をたしたものとなり，すなわち全微分の傾きというのは各方向の傾きがベクトルのように合わさったものと考えればいいのでしょうか．

お答え： 全微分は偏微分をたしたものではありません．ここでいう「傾き」はどういう意味ですか．

質問 76： 行列の意味（どの文字が何を表しているのか）が全くわからなかったので，説明していただきたいです．

お答え： どの文脈でしょう．講義ノートでは一つ一つ説明しているように思うのですが．邪念を払って読んでください．

質問 77： 行列がわかりません．/行列の意味があまりわかりません． **お答え：**わからなくてもよいです．使えれば．

質問 78： 特になし． **お答え：**me, too.