2018 年 5 月 25 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 12

前回までの訂正

- 曲線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さを $\displaystyle\int_a^b\sqrt{\dot x(t)+\dot y(t)}\,dt$ 書いたようです．$\displaystyle\int_a^b\sqrt{\bigl(\dot x(t)\bigr)^2+\bigl(\dot y(t)\bigr)^2}\,dt$ です．
- 二つの円柱の共通部分の体積を求める例題で $x^2+z^2\leqq 1$ を変形した式を $z\leqq 1-x^2$ と板書したそうです．$z^2\leqq 1-x^2$ ですね．
- 二つの円柱の共通部分の体積を求める例題で “2 倍” の係数が重複していたようです．
- 講義ノート，問題 4-7 の解答の冒頭：$dF=(2x,3y)\Rightarrow dF=(2x,3y^2)$.

授業に関する御意見

- 質問に対する答えが塩対応に感じます． **山田のコメント：** ちゃんと答えていると思うが．
- $\frac{\pi}{2}\log\sqrt{\frac{3}{2}}$ より $\frac{\pi}{4}\log\frac{3}{2}$ の方が美しいと思います． **山田のコメント：** なるほど．
- $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{5^x-2^x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{5^x-5^0}{x}-\frac{2^x-2^0}{x}\right)\frac{1}{x}\to\infty.$ **山田のコメント：** 正解．
- 講義で “θ” の発音が気になります．
  山田のコメント： “theta” あるいは “teta” のような音だと思うのですが，いい加減に発音しているかも．
- 「ひとつ」が「ひ ε つ」に見えました（文脈で分かりますが） **山田のコメント：** よくそういうの見ますよね（ひとごと感）．
- キーワード原始関数かと思いました． **山田のコメント：** 残念でした．
- 先生が学生のとき，起きたい授業で眠くなったらどうしましたか? （寝る以外の答えでお願いします）．
  山田のコメント： 起きたい授業は起きてました（そんなに多くなかったし）．
- 6 月 1 日，4 日，5 日，6 日，7 日という土日はさんで 5 日連続数学の授業っておかしくないですか．
  山田のコメント： おかしいです．
- 「6/1 日に宗教上の理由で来れない」というのは例えばどういう状況でしょうか． **山田のコメント：** 想定できないです．朝早く起きるのが禁止されているとか．
- 換気のため窓を開けてくださりありがとうございます．快適です．
  山田のコメント： これから天気が悪い季節になると窓をあけられなくて悔しいですね．
- 授業中に板書ミスを指摘できないのはとても歯痒いですね． **山田のコメント：** 指摘してくださってもいいのです．
- 2018 年度最後の提出用紙になるとは寂しいです．お忙しいなかいつもご丁寧に質問に対応していただきありがとうございます．これからも宜しくお願いします． **山田のコメント：** こちらこそ．
- 先生の雑談は結構面白いので完全にはなくさないで欲しいです． **山田のコメント：** はい．
- 京都行くのですか．自分も行きたいです．しょうがないので，八ツ橋期待しときます．
  山田のコメント： 八ツ橋の何をどう期待しますか?
- 各地を飛び回って忙しいですね． **山田のコメント：** それほどではないと思います．
- 出張多すぎません? **山田のコメント：** そうですか?
- 質問シートにのせなくていいです．図もあって面倒だと思います（山田注：というような質問です）．僕の質問の意味がわからなければ後日質問させていただきたいと思います． **山田のコメント：** 質問の意味が分かるように書く努力をすべきでは?
- アルファベットを書くときもっと見やすく書いてくれるとありがたい． **山田のコメント：** ごめんなさい．たとえばどの文字?
- いつもに増して鼻息が荒かった気がした． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- よかった． **山田のコメント：** 何が?
- いい勉強になりました． **山田のコメント：** なにが?
- 「グリーンの定理」という】言葉を聞くと，いつも「グリーンだよっ」を思い出して笑ってしまうのですが，どうすればいいと思いますか．もう 1 か月くらい続いているんですが．．．． **山田のコメント：** 笑えばよいのではないでしょうか．
- 「ハゲとハケほど違う」日常会話でつかってみます． **山田のコメント：** 古臭いネタですが．相手を怒らせてもしらない．
- 夢は大統領． **山田のコメント：** どこの?
- Me too ではなく Me neither だと思います． **山田のコメント：** もとの文は否定文でしょうか．
- なし．/特に無いです．/特にないです/特になし/特にありません **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問 1： 先生が講義のときにおっしゃっていた「なんで面積を S というか」という質問ですが，様々な説があるそうです．ただ，面積は図形を細かく分けて直線で囲む形にして近似し，足しあわせて求めることができて，その「足しあわせ」を英語で読むと sum や summmation となり，その頭文字ではないかという説が有力なのだそうです．

お答え： なるほど，なんか後付のような気もしませんか? 体積はなんで sum っていわないんでしょうね．高等学校の教科書で S を使うことが多いので，ここでは使ってみましたが，山田は A (area) を使う方が好き．

質問 2： 面積 S は英語の surface, sum summmation などの説があるらしいです．

お答え： 高等学校の教科書などで，なんで area の A を使わないんでしょうね．

質問 3： 講義ノート定理 6.15「uv 平面上の面積確定集合 E が $\sim$ 成り立つ」について E と D の面積が異なるので，面積拡大率である $|x_u y_v - x_v y_u|$ をかけるとのことでしたが，E と D の面積が異なるのはなぜでしょうか? 1 対 1 対応しているならば集合に含まれる点の数も等しい $\rightarrow$ 点の集合である面の面積も等しいと思えてしまうのですが，どのように捉えればよいのでしょうか．

お答え： 「1 対 1 対応がある」という意味の「点の個数が等しい」ということを「集合の濃度が等しい」といいます．このことと「面積」や「長さ」が等しいということが無関係である，というのがややこしいところ．たとえば区間 $[0,1]$ と区間 $[0,2]$ は写像 $f(t) = 2t$ によって 1 対 1 対応しているが長さは異なります．

質問 4： 講義ノート P 56 の面積確定集合のところで，$f(x,y) = 1$ となっているのには何か意味がありますか？ $f(x,y) = 0$ のほうが自然に思えるのですが. . . .

お答え： なぜ自然に思えるのでしょう．どんな D を持ってきても $f(x,y) = 0$ の D 上での積分は 0 になります（積分を「面積」と無理やり結び付けず，定義を見ること）．実際，(5.6) 式（D の面積の定義式）は 1 を積分しています．

質問 5： 2 変数の重積分を変数変換して積分する際，ヤコビ行列（原文ママ：ヤコビ行列式のことか）をかける理由は変換前後においてどれだけ面積が大きくなったかという拡大率を示しているという理解で正しいですか．

お答え： はい．

質問 6： 今やっている重積分の変数変換で，行列を使わなくて計算してもいいですか?

お答え： 正しく公式を使っていれば OK（$\partial(x,y)/\partial(u,v)$ の絶対値がかかる，というのは大丈夫ですね．）

質問 7： 講義ノートの 67 ページ，2 変数の変数変換の $\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ の部分は，講義注でやった二つのグラフ（図省略；山田注：グラフではない，変数変換による微小な長方形と平行四辺形の関係）のどの部分を表していますか？

お答え： 長方形の像を平行四辺形で近似したときの誤差の部分．

質問 8： 微小領域 $\varDelta D$（山田注：こういう記号は使っていなかったはず）が微小領域 $\varDelta\widetilde{D}$ に写されるとき，平行四辺形にするのは何故ですか？ **お答え：**写像を $\varDelta x$, $\varDelta y$ の 1 次式で近似すると，像が平行四辺形になるから．

質問 9： 領域 D で関数を積分するときに，変数変換を行って領域 D が領域 $\widetilde{D}$ に移されたとき，同じように D の微小領域が，$\widetilde{D}$ の微小領域に移されますが，その時に $\widetilde{D}$ の領域から平行四辺形がはみ出てしまうことはないのですか?

お答え： もちろんあります．極限をとればはみ出なくなるわけですが．講義ノート 56 ページの「コンパクト集合上の重積分」で，関数 f を D の外側まで（値 0 として）拡張しているのはそのためです．

質問 10： $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$, $\iint_D f(u,v)\,du\,dv = \iint_{\widetilde{D}} g(x,y) \frac{1}{|x_u y_v - x_v y_u|}\,dx\,dy$ は正しいですか．

お答え： $\widetilde{D}$ や g を適切に定義すれば正しい．理由は「逆写像のヤコビ行列式は，もとの写像のヤコビ行列式の逆数」であることによる（自明ではない）．

質問 11： $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$，$D = \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0, y \geqq 0\}$ の問題で，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と置換したのは x^2+y^2 があるためですか． **お答え：**被積分関数にも積分範囲にも x^2+y^2 があるためです．

質問 12： 重積分の変数変換時につく，デターミナントに絶体値（原文ママ：絶対値）がつくのですか．そのまま掛け算してはいけないんですか．

お答え： いけません．たとえば $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 = 1\}$ として $I := \int_D dx\,dy$ を計算すると π となりますが，変数変換 $x = u\sin v$, $y = u\cos v$ という変数変換をするとき対応する積分範囲は $\tilde{D} = \{(u,v)\,|\,0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 2\pi\}$ とでき，ヤコビアンは $J := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -u$ となるので，$\int_{\tilde{D}} J\,du\,dv = 2\pi\int_0^1(-u)\,du = -\pi$ となってしまいます．J に絶対値をつけると積分の値は一致しますね．

質問 13： 重積分の変数変換で行列式の絶対値がでてきましたが，行同士，列同士を入れ替えても行列式の絶対値は変わらないのでしょうか? **お答え：**はい．

質問 14： 一変数関数の置換積分では，たとえば $x = \cos\theta$ と置換したときに $dx = -\sin\theta\, d\theta$ となりますが，変数変換で $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ に絶対値をつけるのは，変数変換が面積を表すからですか?

お答え： 「変数変換が面積を表す」とはどういうことかわからないのですが，たぶん違う．一変数関数の積分では，たとえば $[0,1]$ 区間上での積分を考える際に，向きを考えて $\int_0^1$ と $\int_1^0$ を区別していました．微分が負であるような変数変換では積分の上端と下端の大小関係が入れ替わり，符号がかわります．多変数関数の積分では，積分範囲にこのような向きによる区別をしない（どうしてよいかわからない）ので，絶対値をつけざるを得ないのです．

質問 15： デターミナントが 0 になることがあっても重積分していいんですか．

お答え： ヤコビアンが 0 になるところでも変数変換してよいか，ということですね．多くの場合（連続関数を面積確定集合上で積分，さらにヤコビアンが 0 となる集合が面積 0 ならば）「はい」．

質問 16： 速度は微分すると加速度になりますが，加速度を微分してもなにもならないことをこの前聞いたのですが，逆に面積を積分すると体積になり，体積を積分しても何ともならないのですか? それとも 4 次元が関係してきて意味があるものになるのでしょうか．

お答え： 「何ともならない」とはどういうことでしょうか．加速度の導関数は「加加速度」とでもいうべきものでしょう．すなわち，加速度の変化率．これが「何ともならない」ということの意味をむしろ教えて欲しい．「面積を積分すると体積になる」とはどういうことか，もうすこしきちんと定式化してごらんなさい．そして，それはたくさんある積分の意味付けのうちたった一つであるという，講義で述べた説明を反芻してください．体積を積分したっていいじゃないですか．それに意味をつけるのはあなた．

質問 17： 二次元なら面積，三次元なら体積というように四次元空間以上において求めたものの呼び方はあるのですか．
お答え：一般に「体積」と呼ぶことが多い．あるいは「n 次元の体積」．業界用語では「n 次元測度」．

質問 18： 「determinant」は「行列式」と訳されますが，なぜ行列「式」なのですか．

お答え： 行列の成分の多項式だから．行列（表）でなく，数であることに注意．

質問 19： $\left|\det\begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix}\right|$ は $\left|\begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix}\right|$ と書けますか? **お答え：**はい．紛らわしいですが．

質問 20： 行列 A について，その行列式を $\det A$ と表記していたが，$|A|$ という表記を見たことがある．この 2 者は文脈によって特別に使い分けることはあるのか． **お答え：**特別かどうかわかりませんが $|A|$ はよく使われる表記．絶対値と紛らわしい記号なのでこの講義では使わない（と述べた）．

質問 21： 絶対値を表すときに使う $|\ |$ は行列（原文ママ：行列式のことか?）と区別するため $\|\ \|$ と書いてある書籍を見かけたことがあるのですが，本講義では $\|\ \|$ を用いますか． **お答え：**用いません．$\|\ \|$ は「実数の絶対値」の意味で使うことはそれほど多くないです．ベクトルの大きさ（ノルム）の意味で使うのは普通です．

質問 22： $\det\begin{pmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{pmatrix}$ の det は何かの略ですか? **お答え：**講義で述べたように determinant.

質問 23： 面積を行列式で表記することのメリットは何ですか．ベクトルと似ていて混同しそうです．

お答え： (1) 高次元化が自然にできる (2) 行列式の代数的な性質を用いて議論することができる，などたくさんあるが，あなたがメリットと感じるかどうかは知らない．「似ていて混同する」のは各文字が何（数，ベクトル，行列 etc）を表しているかをきちんとチェックすれば避けられる（そうせよ，と先週の講義で話した）．

質問 24： ヤコビアンは重積分の変数変換の計算以外のところで使いますか． **お答え：**たとえば逆関数定理（講義ノートにはあげていませんが，調べてみましょう．逆写像定理ということもあります）．でもそれだけではない．

質問 25： ヤコビアンを $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ と書くのには何か由来があるのでしょうか． **お答え：**知らないが，いい記号ではない．

質問 26： Jacobi 行列式において，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u$ と左辺のように表記するのはそういうものだからということでした．この ∂ について考えてみたのですが，もとの Jacobi 行列が $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix}$ という形であるからというくらいにしか思えませんでした．(x,y) を微小に増やしたときの変化量と (u,v) を微小に増やしたときの変化量の比というのが偏微分のイメージと近いからでしょうか．

お答え： 無理に意味付けをしない方がいいと思います．いずれにせよあまり良い記号ではないと思います．

質問 27： $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ というのは定めめられたことか，数学的に証明できますか．

お答え： 左辺の記号の意味を右辺によって定義する，ということ．

質問 28： 行列式で表すことに何か意味があるのか．単なる別の表現なのか． **お答え：**何を「表す」ことについて？

質問 29： 講義ノート p62 の外積を用いて曲面の面積を出す式がよく分かりませんでした．外積のやり方は覚えるべきなのでしょうか． **お答え：**はい，覚えないとこの科目はともかく力学や電磁気学を学ぶのに支障がでます．

質問 30： 三次元のヤコビ行列の場合

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = x_r y_\theta z_\varphi + x_\theta y_\varphi z_r + x_\varphi y_r z_\theta - x_r y_\varphi z_\theta - x_\theta y_r z_\varphi - x_\varphi y_\theta z_r$$

で正しいですか． **お答え：**正しいです．

質問 31： 3 変数以上の置換積分でも行列式を用いますか． **お答え：**はい．

質問 32： 3 以上の変数で多重積分の変数変換をしようと思ったとき，ヤコビ行列式はどう処理すればいいですか（以下略）． **お答え：**上の質問と解答参照．

質問 33： 授業では 2 変数の変換について扱いましたが，3 変数以上の関数についての変数変換も今後扱うのでしょうか?

お答え： 今回少しだけ扱います．

質問 34： $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \left|\begin{smallmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{smallmatrix}\right|$ であり，これを $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と使うと，変数変換に使えると分かりましたが，3 次元のときも上のような極座標変換を使えるような x, y, z の置き方はあるのでしょうか．

お答え： 講義ノート，問題 6-7．$(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$ を使うこともある．

質問 35： 問題 4-6 なぜ $\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}$ の逆行列から $\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix}$ がでるのか．

お答え： 命題 4-9．2 変数の場合，この事実は，例 4.10（式 (4.10)）で用いている．

質問 36： 内積の説明の際に高次元空間の角度はめんどくさいのように言っていましたが，4 次元空間以上に角度は存在するのですか． **お答え：**はい．$\mathbb{R}^n$ の二つのベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ に対して，それらの内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$，ベクトルの大きさを $|\boldsymbol{x}| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義するとき，二つの零でないベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のなす角を $\operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}\right)$ と定義すればよい．

質問 37： 講義ノート p66 に「$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す」とありますが，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ とも $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 書くのですか?

お答え： $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ではなく $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$（括弧を含めて内積の記号）．さまざまな内積の記号があるので，内積を使うときは講義ノートのように最初に出てきた時に注釈を入れるべき．同じ文脈で記号を混用しないことも大事．

質問 38： 板書で $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx$ の ( ) がうすくかかれていましたが，これはわかりやすくするためにかいたものですか．また $\int dx \int f(x,y)\,dy$ という書き方の方が主流ですか?

お答え： 前半：はい．後半：どちらもよく見かけます．

質問 39： $\int dx \int dy f(x,y)$ という表記はありでしょうか． **お答え：**おのおのの積分の上下端が明記されていればありです．

質問 40： 講義ノート 61 ページの例 6.1 のところで「$\int_0^1 [***]\,dy$」(山田注：積分の中身省略) とありますが「$\int_0^1 (***)\,dy$」と書いても間違ってないですよね． **お答え：**もちろん正しいです．むしろ [ ] の方が紛らわしいかも．

質問 41： 講義ノート P66 で ${}^t(a,b)$ と括弧の左上に t が書いてあるものがいくつかあるのですが，何か特別な意味があるのですか． **お答え：**講義ノート 37 ページ．

質問 42： 原始関数と聞くたびに日本語的違和感を感じます．訳語だと思いますが，原始というのはこの場合どういうニュアンスなのですか． **お答え：**Primitive functions.

質問 43： 例 6.16 の問題で，

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2-x^2}{1+x^2}}\right) dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{Tan}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\right) dx$$

の計算の仕方がわかりません．なにかヒントをください． **お答え：**Tan^{-1} の中身を置換してみては?

質問 44： 授業中，山田先生は「三角形の一つの辺とその両端の角から三角形の面積の公式がある」とおっしゃっていました．それは (図省略：一辺の長さ α，両端の角の大きさ θ_1, θ_2 の三角形の絵) のとき，三角形の面積 $= \frac{\alpha^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \sin\theta_2}$ でしょうか． **お答え：**その半分．

質問 45： 三角形の面積の求め方ですが，3 辺の長さがわかっているときはヘロンの公式，2 辺の長さとその間の角がわかっているときは $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ （図省略）とおっしゃっていましたが，1 辺の長さとその両端の角がわかっているとき（図省略：辺の長さ a，両端の角の大きさ B, C）は $\frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$ で求めるのですか?

お答え： それで正しいですね．

質問 46： $z = xf(x+y)+y$ とありましたが，$f(x+y)$ は 1 変数関数だと仰っていました．しかし z を決めるには x と y を決める必要があるので 2 変数関数ではないのですか．

お答え： 講義資料 10 の質問 44 のことでしょうか．どこに $f(x+y)$ が一変数関数であるとかいてありますか? $f(t)$ が一変数関数と書いてあるのでは?

質問 47： 重積分において偏積分すると何がわかるのかわかりません．

お答え： そうですか（としか言いようがありません）．板と面密度の喩え話ではわかりませんか？

質問 48： 定理 3.16 の証明のところで $F(h) := f(a+h, b+k) - f(a, b+k)$ なのになぜ G は $G(k) = f(a, b+k) - f(a, b)$ なのでしょうか．$G(k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b)$ ではないのでしょうか．

お答え： ご質問のように G を置き換えたとき，それ以降の議論はすべて上手くいくか確かめましたか?

質問 49： 講義ノート P48 の問題 4-9 について，$a = 0$ のとき $y = \pm\sqrt{-(x^2+1)+\sqrt{4x^2+1}}$ になり，$\varphi'(0)$ は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{-(h^2+1)+\sqrt{4h^2+1}}-0}{h}$ で表せると思うのですが，そうすると $\varphi'(0)$ は 1 になりません．どこが間違っているのでしょうか？何卒ご指摘願います．

お答え： $y = \varphi(x)$ とグラフ表示をしたときの微分係数のことですね．y について解いた式が間違っています．

質問 50： 重積分の積分区間を図でかいたとき積分区間がわかれる場合をどうやって見分けるのかわかりません．

お答え： 最初の「積分区間」は積分範囲のことですね．たとえば x に関して積分するなら，y 軸に垂直な直線との共通部分がいくつにわかれるか．

質問 51： 何でも書いて良いと言われた中間試験予告の紙って，カンニングペーパーとして使うのはナシですよね?

お答え： 「カンニング・ペーパー」として何を想像しているかがわからないのでなんともお答えできませんが「事前に書き込んでおいたものを自分で参照する」ために使って下さい．

質問 52： 講義ノート P70 の問題 6-1 について，$8\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}}dx\right)dy\right]$ と立式して解くと，途中で $\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-z^2}\,dz$ を計算することになると思いますが，$\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-z^2}\,dz = \frac{\pi}{4}$ となってしまい，答えが合いません．何が間違っているのでしょうか．何卒ご指摘願います．

お答え： $\int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-z^2}\,dz$ が間違っています．

質問 53： 講義ノート P70 問題 6-2 について，$f(x, y)$ の範囲が $\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2\pi R\sin\frac{r}{R}$ になるのはなぜですか？また，式 (6.1) を使っても $4\pi^3R^2\sin^2\frac{r}{R}$ になってしうあうのですが，なぜですか．

お答え： 後半は何がなるのでしょう．前半：北極から出る長さが r の子午線の端点を P とし，中心と北極を結ぶ線分と，中心と P を結ぶ線分のなす角は，r/R．

質問 54： 例えば（図省略：$y = x^2$ のグラフの下側の面積）の面積は $\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 y\times\Delta x$ でこの積分の中身は（図省略，幅 Δx の短冊形）となります．$\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$ のとき，$\int_0^4$ は x について固定していると考えたときで，x で固定して考えるとき，$\int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y)\,dy \to \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y)\,\Delta y$ これは最初の短冊型のように図示するとどのようになるのでしょう．質問としてはこの重積分の図的理解ができません．$f(x, y)$ は点として考えればよいのですか． **お答え：**「図もあって面倒だからシートに載せなくてよい」というご指示がありましたが，もともとのご質問自体がよくわかりません．「図的理解」とはなんですか．それは必要なものですか？

質問 55： $I = \iint_D f(x(u, v), y(u, v))\,\left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix}\right|\,du\,dv$ の式の中で，$\left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{pmatrix}\right|$ の意味は何ですか．$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\end{pmatrix}\Delta u$ と $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\Delta v$ の変化方向は一定ですか．

お答え： 前半，ヤコビ行列式の絶対値．後半，(u, v) を固定して，ベクトルの部分は一定と考えています．

質問 56： $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$，$D = \{(x, y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0, y \geqq 0\}$ の例について，$x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ と変換したとき，変換による拡大率が $\left|\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}\right|$ となっていますが，重積分する範囲を拡大してそもそも値に影響してこないところが理解できません．あと，その部分の答えが $\log\sqrt{\frac{3}{2}}$ と黒板に書いてありましたが，$\frac{\pi}{2}\log\sqrt{\frac{3}{2}}$ な気がします．

お答え： 拡大は「パラメータ変換による微小面積の拡大」です．積分範囲を拡大しているなどとだれも言っていないのです．後半：書かれているのは最初の積分の答えですね．

質問 57： 極座標に変数変換するイメージはわくのですが，その他の変数変換のイメージがわきません．適当に自分の都合の良いように変換していいということですか．

お答え： 一変数関数の置換積分のときはどうでしたか？都合のよい変換をしていたのでは？その際，イメージがないと計算できませんでしたか？

質問 58： 変数変換の際に $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくのは分かるのですが，x と y を u と v を使って変数変換する例がわからないので教えて下さい．

お答え： 質問の意味がわかりません．$x = u\cos v$, $y = u\sin v$ という変換はわかりますか?

質問 59： 講義資料にコンパクト集合フレーズ（山田注：「という」が抜けてますね）がありましたが，小さくまとまった集合とは具体的にどのような集合ですか．

お答え： 小さくまとまっているかどうかは知りません．言葉の定義は講義ノート 55 ページ（コンパクト部分集合，省略してコンパクト集合）．

質問 60： 「強い意味での単調増化（原文ママ：単調増加）」とはどういう意味ですか．

お答え： 口頭で説明したので伝わっていなかったかも．導関数がつねに正である，という意味です．

質問 61： 2 変数の時のヤコビは納得できたが，3 変数の方はまだ良くわからないので，イメージをつかめるように説明してほしいです．

お答え： ヤコビって何ですか？ヤコビ行列のことですか？ヤコビ行列式のことですか？変数変換 $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

のこと，ヤコビ行列式はその行列式．

質問 62： 講義ノート P65 8 行目の正方行列とは何ですか． **お答え：**講義ノート 37 ページ，下から 3 行目．

質問 63： 講義ノート 6 の 64 ページに φ' が出て来ますが，これが φ に対してどのような操作をしたものなのかわかりません． **お答え：**微分．

質問 64： 講義資料 10 の質問 77 に $F(x, y, z) = 0$ は関数ではないのでは，という注がありますが，なぜ関数ではないのですか? **お答え：**等式だからです．$F(x, y, z)$ は関数．

質問 65： 講義資料 10 の質問 79 に P56 系 5.16 は定義ではないとありますが，長さの定義はなんですか？また面積の定義はなんですか？

お答え： 系 5.16 の系が「定義」の誤りではない，というのは納得していただけますね．もしこれが定義であったなら，命題 5.15 の意味がなくなってしまいます．命題 5.15 の証明の中に長さの定義らしきものが書いてあります（ちゃんと定義するためにはもう少し言葉の準備が必要なのでここではやらない）．$\mathbb{R}^2$ の部分集合の面積の定義は (5.6) 式，$\mathbb{R}^3$ の曲面の場合はその定義らしきもの（ちゃんとはやっていない）が講義ノート 63 ページあたりにあります．

質問 66： 自分たち生徒が普段重積分を解く上で「変数変換をしないと解けない！」という問題はありますか?

お答え： あなた達は多分「生徒」ではない（という話は講義の際にしましたね．覚えていますか？）ので「ある」という答えも「ない」という答えも真だと思います．ちなみに「積分を解く」という言葉に強い違和感をもっています．「積分を求める」のではないでしょうか．

質問 67： 重積分の方の質問はないのですが，授業最後の極限をどう解いたら（山田注：求めたら？） いいのか分かりません．ヒントを頂けないでしょうか． **お答え：**$1/x$ でくくる．

質問 68： 金曜日の話になりますが，何故数学の先生である山田先生が消防に謝りに行くのでしょうか．

お答え： 管理職だから．実際には行っていませんが．