6. 重積分の変数変換

6.1 重積分の応用

重積分，多重積分は面積，体積などを求めるのに利用できる．ここでは厳密な扱いはせず「微小部分の面積，体積の総和」の極限が面積，体積であると信じて具体例の計算を行おう．

■ 面積 第 5 回（56 ページ）で見たように $\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D の面積とは，D 上で定数関数 1 を積分したものである．

例 6.1. $D=\{(x,y)\,|\,\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\leqq 1\}\subset\mathbb{R}^2$ の面積 $|D|$ を求めよう．図形の対称性から

$$D':=\{(x,y)\,|\,\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\}$$

の面積 $|D'|$ を求めれば $|D|=4|D'|$ である．

$$|D'|=\iint_{D'}1\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3}dx=\int_0^1\left[\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3\right]dy=\frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は $3\pi/8$. ♢

■ 体積（2 変数関数のグラフの下側） 一般に，$\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D を含む領域で定義された連続関数 f が負でない値をもつとき，

$$\Omega_f:=\{\bigl(x,y,z\bigr)\,|\,(x,y)\in D,\ 0\leqq z\leqq f(x,y)\}\subset\mathbb{R}^3$$

は，座標空間 $\mathbb{R}^3$ 内の，f のグラフと xy 平面にはさまれる部分である．この部分の体積を求めよう．D の点 (x,y) を一つの頂点とする D の小さな長方形 $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ と，この長方形上の $f(x,y)$ のグラフで囲まれた部分の体積は，$f(x,y)\Delta x\Delta y$ で近似されるので，考えている図形の体積は次で与えられる：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

*) 2018 年 5 月 21 日/25 日

例 6.2. 関数

$$f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\qquad (a,b \text{ は正の定数})$$

のグラフと xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよう．$f(x,y)$ は

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}$$

上で負でない値をとっている．したがって，考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\frac{2}{3}\pi ab$$

であることがわかる． ♢

■ 体積 平面図形の面積と同様に，$\mathbb{R}^3$ の体積確定集合 Ω の**体積**とは [1]，Ω 上で定数関数 1 を積分したものである．

例 6.3. 空間の部分集合 $D=\{(x,y,z)\,|\,z^2\leqq 4x, y^2\leqq x-x^2\}$ の体積 $|D|$ を求めよう．平面の部分集合 $D'=\{(x,y)\,|\,y^2\leqq x-x^2\}$ に対して

$$\begin{aligned}|D|=\iiint_D dx\,dy\,dz&=\iint_{D'}dx\,dy\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dz\\&=\iint_{D'}4\sqrt{x}\,dx\,dy=\dots=\frac{32}{15}.\end{aligned}$$ ♢

■ 曲面の面積 グラフ $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ の面積を求めよう．ただし D は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合で，f は D 上で C^1-級とする．

集合 D 内の小さな長方形 $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ 上のグラフは，3 点

$$P=\bigl(x,y,f(x,y)\bigr),$$
$$Q=\bigl(x+\Delta x,y,f(x+\Delta x,y)\bigr),\qquad R=\bigl(x,y+\Delta y,f(x,y+\Delta y)\bigr)$$

を頂点にもち PQ, PR を 2 辺にもつ平行四辺形に近い．この微小平行四辺形の面積は，空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

[1] 体積：volume; ここでは $\mathbb{R}^3$ の体積確定集合の定義をきちんとはしていないが，$\mathbb{R}^2$ における面積確定集合，重積分の定義から想像してもらえばよい．

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| \\
&= |(\varDelta x, 0, f(x+\varDelta x, y) - f(x,y)) \times (0, \varDelta y, f(x, y+\varDelta y) - f(x,y))| \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\varDelta x, y) - f(x,y)}{\varDelta x}\right)^2 + \left(\frac{f(x, y+\varDelta y) - f(x,y)}{\varDelta y}\right)^2}\, \varDelta x \varDelta y \\
&\fallingdotseq \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, \varDelta x \varDelta y
\end{aligned}
$$

と書けるので，この総和をとれば，求める面積は

$$
\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dx\, dy \tag{6.1}
$$

で求められる．

例 6.4. 関数 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ のグラフの，$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ に対応する部分の面積を求めよう．式 (6.1) から，求める面積は

$$
\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy
$$

である．これを計算すると，求める面積は

$$
\frac{1}{18}\left(6\bigl(\sqrt{3} + \log(7+4\sqrt{3})\bigr) - \pi\right) = 1.28\ldots
$$

である． ◇

6.2 変数変換

■ 置換積分法の公式（一変数） 一変数関数の置換積分法[2] の公式は高等学校で学んだ．ここでは，変数変換が増加関数で与えられる特別な場合に，公式を述べておこう：

定理 6.5 (置換積分法)**.** 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f と，区間 $[\alpha,\beta]$ を含む開区間で定義された単調増加な C^1-級関数 φ で $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ をみたすものをとる．このとき，

$$
\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(u)\bigr)\, \varphi'(u)\, du \tag{6.2}
$$

が成立する[3]．

[2] 置換積分法：integration by substitution.
[3] 変数変換 φ に C^1-級の仮定を付けたのは，式 (6.2) の右辺の被積分関数が連続関数となるためである．

注意 6.6. 変数変換を $x = x(u) = \varphi(u)$ と書いて，式 (6.2) の右辺を

$$
\int_\alpha^\beta f\bigl(x(u)\bigr)\frac{dx}{du}\, du
$$

と書くと覚えやすい．

置換積分法の公式（定理 6.5）が成り立つ理由の説明． 公式 (6.2) の証明は高等学校で学んだ．合成関数の微分公式を用いて原始関数を求める方法のはずだが，連続関数の積分可能性と微積分の基本定理を認めれば，厳密な証明である．

ここでは，さらに別の説明を与える．多重積分の変数変換の公式を考える際には，微積分の基本定理が直接適用できないので，積分の定義に沿った理解が必要だからである．

区間 $[\alpha,\beta]$ の分割 $\varDelta : \alpha = u_0 < u_1 < \cdots < u_N = \beta$ をとり，$x_j = \varphi(u_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ とおけば，φ が単調増加であることから $\varDelta' : x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ は区間 $[a,b]$ の分割となる．

いま，一つの小区間 $[u_{j-1}, u_j]$ に着目すると，φ' はこの区間で連続だから，最小値・最大値をとる．そこで，φ' が $\underline{\eta}_j, \overline{\eta}_j \in [u_{j-1}, u_j]$ でそれぞれ最小値・最大値をとるとすると，補題 5.4 から

$$
\begin{aligned}
&x_j - x_{j-1} = \varphi(u_j) - \varphi(u_{j-1}) = \int_{u_{j-1}}^{u_j} \varphi'(u)\, du \leqq \varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}), \\
&x_j - x_{j-1} \geqq \varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1})
\end{aligned}
$$

が成り立つので，

$$
\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \leqq x_j - x_{j-1} \leqq \varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \tag{6.3}
$$

を得る．この式は，小区間の幅 $u_j - u_{j-1}$ と，対応する小区間の幅 $x_j - x_{j-1}$ の比が $1 : \varphi'$ であることを示している（$\varphi'(*)$ の $*$ は明示していないが，区間 $[u_{j-1}, u_j]$ の中の値である.）

以上の状況で，$g(u) := f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)$, $\underline{\xi}_j = \varphi(\underline{\eta}_j)$, $\overline{\xi}_j = \varphi(\overline{\eta}_j)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
g(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) &= f(\underline{\xi}_j)\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \leqq f(\underline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}), \\
g(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) &= f(\overline{\xi}_j)\varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \geqq f(\overline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\underline{S}_\varDelta(g) \leqq \sum_{j=1}^N f(\underline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}), \qquad \overline{S}_\varDelta(g) \geqq \sum_{j=1}^N f(\overline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1})
$$

となる．

いま (6.3) から $|\varDelta| \to 0$ ならば $|\varDelta'| \to 0$ である．さらに，仮定から f, g はともに連続なので，積分可能性から，これらの不等式の各辺は，$|\varDelta|$ を 0 に近づけると，それぞれ g, f の積分に近づく．したがってこれらの積分の値は等しい． □

■ 線形変換と面積　置換積分法の公式 (6.2) の右辺に φ' がかかるのは，$[a,b]$ の微小区間の幅と，対応する $[\alpha,\beta]$ の微小区間の幅の比が φ'（式 (6.3)）だからである．

このことから，変数変換による微小な図形の面積の変化を調べれば重積分の変数変換公式が得られることが想像できる．そこで，まず，線形変換による面積比の公式を思い出そう：$\mathbb{R}^2$ の各要素 $\boldsymbol{x}$ を列ベクトルとみなし（第 4.1 節参照），$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$L_A\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad (A \text{ は 2 次の正方行列})$$

を考える．このような写像を $\mathbb{R}^2$ の**線形変換**[4] という．行列 A が正則（38 ページ参照）であるとき L_A を**正則な線形変換** とよぶ．

補題 6.7. 正則な線形変換は 1 対 1 の写像である．

証明． 正則な線形変換 L_A が $L_A(\boldsymbol{p}) = L_A(\boldsymbol{q})$ をみたしているとすると，$A\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{q}$ だから両辺に A^{-1} を左からかけると $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ となる．□

補題 6.8. 線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の直線の像は直線または一点である．とくに L_A が正則ならば直線の像は直線になる．

証明． 異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線 l の像を調べよう．P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると直線 l は

$$l = \{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

と表される．ここで，行列の積の性質から

$$L_A\big((1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}\big) = (1-t)A\boldsymbol{p} + tA\boldsymbol{q}$$

なので，l の L_A による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\boldsymbol{p}} + t\tilde{\boldsymbol{q}} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \qquad \tilde{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q}$$

とかける．とくに $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\boldsymbol{p}}$, $\overrightarrow{OQ'} = \tilde{\boldsymbol{q}}$ となる点 P', Q' をとると (1) $P' \neq Q'$ のとき，l' は P', Q' を通る直線となる．(2) $P' = Q'$ のとき l' は 1 点 P' からなる集合である．さらに L_A が正則な線形変換なら，補題 6.7 から (2) のケースは起こりえない．□

補題 6.9. 正則な線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

[4] 線形変換：a linear transformation.

証明． 平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると L_A が 1 対 1 であることに反する．□

補題 6.10. 直線 l 上の異なる 2 点 P, Q をとっておく．直線 l にない 2 点 R, S が直線 l の同じ側にあるための必要十分条件は，$\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ と $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$ が同じ符号をもつことである．ここで $\mathbb{R}^2$ のベクトルは列ベクトルとみなし，det は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式（38 ページ参照）を表す．

証明． ${}^t(a,b) = \overrightarrow{PQ}$ とおき，$\boldsymbol{n} = {}^t(-b,a)$ とすると，(1) $\det(\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ である．ただし右辺は $\mathbb{R}^2$ の内積を表す．(2) $\boldsymbol{n}$ は直線 l に直交する零でないベクトルである．

直線 l 上にない点 R が，直線 l の $\boldsymbol{n}$ が指し示す側にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{PR}$ と $\boldsymbol{n}$ が鋭角をなすことである：$(\overrightarrow{PR}, \boldsymbol{n}) > 0$．このことと (1) から結論が得られる．□

補題 6.11. 線形変換 L_A によって，$\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに L_A が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明． 簡単のため L_A が正則であるとし，平行四辺形 $PQRS$ の像を求める：$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ とすると，線分 PQ は $\{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ となるので，その像は線分 P', Q' となる．ただし P', Q' はそれぞれ L_A による P, Q の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 6.10 から結論を得る (すこし端折った)．□

補題 6.12. 平行四辺形 $PQRS$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ である．ただし $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$ で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明． ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，求める面積は

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}. \tag{6.4}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．ここで $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2)$ とおいて (6.4) を計算すれば結論を得る．□

補題 6.13. 線形変換 L_A による平行四辺形 D の像の面積は，$|\det A|\,|D|$ である．ただし $|D|$ は D の面積である．

証明． 平行四辺形 $D = PQRS$ の頂点 P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$,

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$$

とおく．P, Q, R の L_A による像をそれぞれ P', Q', R' と書くと，

$$\overrightarrow{P'Q'} = A\boldsymbol{q} - A\boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{P'R'} = A\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|D'| = |\det(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})| = \bigl|\det\bigl(A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\bigr)\bigr| = \bigl|\det A \cdot \det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\bigr| = |\det A|\,|D|. \qquad \square$$

■ 2 変数の変数変換　$\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset (u,v) \longmapsto F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

を考えると，微分可能性（定義 3.11 と定理 3.16 参照）[5] から，

$$\begin{aligned} &F(a+h, b+k) \\ &\quad = F(a,b) + \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}(h,k) \\ &\qquad\qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h,k)| \to 0 \qquad \bigl((h,k) \to (0,0)\bigr) \end{aligned}$$

と書ける．この ${}^t(h,k)$ の係数行列は，F の微分 dF またはヤコビ行列 (定義 4.5) である．このことから，(h,k) が十分小さいときは，近似式

$$\Phi(h,k) := F(a+h, b+k) - F(a,b) \doteqdot \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

が成り立つ．

[5] 定義 3.11 は実数に値をとる関数の微分可能性の定義だが，各成分 $x(u,v)$, $y(u,v)$ が微分可能な関数なので，それらが定義の条件式をみたすことがわかる．とくに x, y に対応する “おつり” の項を ε_1, ε_2 とおいて $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とすれば，ここで与える式を得る．

記号． ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

と書き，**ヤコビ行列式** という [6]．

近似式 (6.5) から次のことがわかる：

事実 6.14. 十分小さい Δu, Δv に対して，uv-平面上の，点

$$(a,b), \quad (a+\Delta u, b), \quad (a, b+\Delta v), \qquad (a+\Delta u, b+\Delta v)$$

を頂点とする長方形を変数変換 $F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ で写した像は，

$$\begin{aligned} &\bigl(x(a,b), y(a,b)\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_v(a,b)\Delta v\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\Delta u + x_v(a,b)\Delta v, y(a,b) + y_u(a,b)\Delta u + y_v(a,b)\Delta v\bigr) \end{aligned}$$

を頂点とする平行四辺形に十分に近い．とくに，像の面積は

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \Delta v$$

で近似される．ただし，この係数は，変数変換のヤコビ行列式の絶対値を表す．

■ 重積分の変数変換　重積分は，考えている集合上の微小部分の面積と関数の値の積の総和の極限だから，変数変換による面積の関係（事実 6.14）から次が成り立つことがわかる：

定理 6.15 (重積分の変数変換)**．** $\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$(u,v) \longmapsto \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$$

によって，uv 平面上の面積確定集合 E が xy 平面上の面積確定集合 D と 1 対 1 に対応しているとき，D 上の連続関数 f に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

が成り立つ．

[6] ヤコビ行列式：the Jacobian.

例 6.16. 重積分

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} \qquad D := \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0\}$$

を求めよう（まずは，第 5 回でやったように計算してみよ）．座標変換

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{6.6}$$

により集合

$$E := \left\{(r,\theta)\ \middle|\ 1 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

は D に 1 対 1 に移される．変数変換 (r,θ) のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

なので，定理 6.15 から

$$\int_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \int_E \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r\,dr}{1+r^2}\right] d\theta = \frac{\pi}{2}\log\frac{3}{2}$$

を得る．直接求めた値と比較せよ． ♢

注意 6.17. 例 6.16 で積分範囲を

$$D_1 := \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2\}, \qquad D_2 := \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 2\}$$

と拡張しよう．変数変換 (6.6) により，

$$E_1 := \{(r,\theta)\,|\,1 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\},$$
$$E_2 := \{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$$

は，それぞれ D_1, D_2 に「ほぼ 1 対 1」に移るが，D_1 上の x 軸の負の部分，D_2 上の原点には，重なりがある．しかし，この部分の面積は 0 なので積分に影響せず，変数変換

$$\iint_{D_j} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \iint_{E_j} \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} \qquad (j=1,2)$$

が成り立つ．

■ 多重積分の変数変換公式 同様に多重積分の変数変換の公式を次のように述べることができる：

定理 6.18 (多重積分の変数変換)**.** $\mathbb{R}^n$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto \bigl(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)\bigr)$$

によって，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 E がコンパクト集合 D に 1 対 1 に対応しているとき，D 上の連続関数 f に対して

$$\int\cdots\int_D f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$
$$= \int\dots\int_E f\bigl(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)\bigr)\,|J|\,du_1\,du_2\,\dots\,du_n$$

が成り立つ．ただし，

$$J := \frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)} = \det\begin{pmatrix} (x_1)_{u_1} & \dots & (x_1)_{u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n)_{u_1} & \dots & (x_n)_{u_n} \end{pmatrix}$$

である．

問　題　6

6-1 空間の集合

$$\Omega := \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1, y^2+z^2 \leqq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

の体積を求めなさい．

6-2 空間の原点を中心とする半径 $R\ (>0)$ の球面

$$S_R = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 = R^2\}$$

の，北極 $N=(0,0,R)$ とそれ以外の球面 S_R 上の点 P を結ぶ球面上の曲線のうち最短のものは，P を通る経線である．このことを既知として，N と P を結ぶ経線の長さを N と P の（球面）距離という．さらに，北極を中心とする半径 r の円とは，N との距離が r であるような球面上の点の集合のことと定める．以下，北極 N を中心とする半径 r の円を C_r と書く．

(1) C_r はどんな図形か．緯度，経度などの言葉を用いて説明しなさい．

(2) C_r の長さ L_r を r の式で表しなさい．(ヒント：平面の円とみなしたときの半径を求めれば良い)．

(3) C_r を境界にもつ球面 S_R の部分で，北極 N を含む部分の面積 A_r を r の式で表しなさい．ただし，$0 < r < \pi R/2$ とする．

(4) 次の極限値を求めなさい：$\displaystyle\lim_{r\to+0}\frac{L_r}{2\pi r}$, $\displaystyle\lim_{r\to+0}\frac{A_r}{\pi r^2}$.

6-3 xy 平面上の面積確定集合 D が上半平面 $\{(x,y)\,|\,y>0\}$ に含まれているとする．このとき，次のことを確かめなさい．

(1) xy 平面が座標空間に含まれているとみなす．D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は

$$2\pi\iint_D y\,dx\,dy$$

である．

(2) D の重心の座標は

$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\,dy\right)$$

である．

6-4 xy 平面上のなめらかな曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\bigl(f'(x)\bigr)^2}\,dx$$

で与えられることを確かめなさい．ただし，区間 $[a,b]$ 上で $f(x)>0$ であるとする．

6-5 xy 平面上の曲線 C が

$$C:\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

とパラメータ表示されている．ただし $x(t)$, $y(t)$ は t の一変数関数として C^1-級で，区間 $[a,b]$ で $y(t)>0$ であるとする．このとき，次のことを確かめなさい．

(1) 曲線 C を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

(2) 曲線 C の重心の座標は

$$\frac{1}{L}\left(\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$

$$\left(L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$

で与えられる．

6-6 問題 5-6 の各々の積分を，次の変数変換を行うことによって求め，直接計算した結果と比較しなさい．

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(2) $x = uv$, $y = v$.

(3) $x = u$, $y = v\sin u$.

(4) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

(5) $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$.

6-7 問題 5-7 を，変数変換

$$(x,y,z) = \bigl(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\bigr)$$

を用いて説明しなさい

6-8 C^1-級の 1 変数関数 φ が $\varphi(0)=0$ を満たしているとき，

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(u)\,du$$

の右辺を $u = tx$ と変数変換して t に関する積分とみなすことにより，

$$\varphi(x) = x\psi(x)$$

をみたす 連続関数 ψ が存在することを示しなさい（これは，多項式に関する因数定理の一般化とみなすことができる）．