7. 広義積分

7.1 広義積分

半開区間 $(a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

極限値 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ が存在するとき，その値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

と書く．関数 f が $[a,b)$ で連続であるときも同様に $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が定義される．

また，区間 $[a,\infty)$ で定義された連続関数 f に対して

極限値 $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx$ が存在するとき，その値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

と書く．同様に $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ も定義される．

これらは定積分の概念を拡張したもので**広義積分**[1] とよばれる．とくに，定義のなかに現れる極限値が存在するとき**広義積分は収束する**，そうでないとき**発散する**という．

例 7.1. (1) 正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2 \qquad (\varepsilon\to+0)$$

なので，区間 $(0,1]$ での広義積分は収束し，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

(2) 正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_\varepsilon^1 = \log 1 - \log\varepsilon = -\log\varepsilon \to +\infty \qquad (\varepsilon\to+0)$$

なので，区間 $(0,1]$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

(3) 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M = 1-e^{-M} \to 1 \qquad (M\to+\infty)$$

なので，区間 $[0,+\infty)$ での広義積分は収束し，

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

(4) 正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^M = \log M \to +\infty \qquad (M\to+\infty)$$

なので，区間 $[1,+\infty)$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx. \qquad \diamondsuit$$

次の事実は基本的である（問題 7-1）：

命題 7.2. (1) 実数 α に対して，広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $\alpha>-1$ である．

(2) 実数 β に対して，広義積分

$$\int_1^\infty x^\beta\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $\beta<-1$ である．

(3) 実数 a に対して，広義積分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $a>0$ である．

例 7.3. 原始関数が求まらなくても，広義積分の収束がわかる場合がある．た

---

[*] 2018 年 6 月 5/6 日

[1] “こうぎせきぶん” と読む．“広義” は “広い意味” という意味．特異積分 improper integral ということもある．

とえば，定数 $k \in (0,1)$ に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \tag{7.1}$$

を考えよう．正の数 $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (x=\sin t)$$

であるが，右辺の被積分関数は $[0,\frac{\pi}{2}]$ で連続であるから，$\varepsilon \to +0$ の極限をとることができて [2]

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt. \qquad \diamondsuit$$

関数 $f(x)$ が (a,b) で連続な場合は区間 $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ における積分が $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (+0,+0)$ である値に収束するとき，その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx \left(= \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0,0)} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx \right)$$

と定める．区間の一端または両端が有限でない場合も同様に定義する．

例 7.4. 正の数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{2}\log(1-x^2)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \\ &= -\frac{1}{2}\bigl(\log\varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log\varepsilon_1\bigr)\end{aligned}$$

であるが，$\varepsilon_1 \to +0$ のとき，右辺の最後の項は発散するので，広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

は発散する．特別な近づけ方で $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (0,0)$ とすると，たとえば $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to +0$ のとき

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \to 0$$

[2] 原始関数の連続性は，微分可能性（定理 5.11）による．

となるが，

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx = 0 \qquad \text{であるとはいわない．} \qquad \diamondsuit$$

■ 広義積分の収束判定 広義積分の値が具体的にわからなくても，収束することはわかる場合がある．

事実 7.5. 区間 $I = (a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ を満たし，さらに

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

この事実の証明は “実数の連続性” による．余裕があれば微分積分学第二で説明するかもしれない [3]．

有用な例を挙げるため，少しだけ準備をしておく：

補題 7.6. 任意の正の整数 m と $x \geqq 0$ に対して $x^m \leqq m!e^x$ が成立する．

証明． 正の整数 m に対して $f_m(x) = m!e^x - x^m$ とおき，m に関する数学的帰納法により $f_m(x) \geqq 0$ を示す．$x \geqq 0$ のとき $(e^x - x)' = e^x - 1 \geqq 0$ であるから，$e^x - x$ は単調非減少 [4]．したがって $e^x - x \geqq e^0 - 0 = 1$. すなわち $f_1(x) \geqq 0$. いま，番号 k に対して $f_k(x) \geqq 0$ $(x \geqq 0)$ が成り立っているならば，$f'_{k+1}(x) = kf_k(x)$ なので，f_{k+1} は $x \geqq 0$ で単調非減少だから $x \geqq 0$ のとき $f_{k+1}(x) \geqq f_{k+1}(0) = m! \geqq 0$. □

系 7.7. 任意の負でない実数 p と $x \geqq 0$ に対して

$$x^p \leqq Me^x$$

が成立する．ただし $M = ([p]+1)!$ ($[p]$ は p を超えない最大の整数) である．

証明． まず $0 \leqq x \leqq 1$ なら左辺は 1 以下，右辺は 1 以上であるから結論が成り立つ．$x > 1$ のときは $x^p \leqq x^{[p]+1}$ なので，$m = [p]+1$ とおいて補題 7.6 を適用する． □

[3] 少なくとも，これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する．
[4] 定義域で $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 f は単調非減少であるという．

系 7.8. 任意の実数 p と正の実数 a に対して $\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-ax} = 0$.

証明. $p \leqq 0$ のとき $x \geqq 1$ ならば $x^p \leqq 1$ だから,

$$0 \leqq x^p e^{-ax} \leqq e^{-ax} \to 0 \qquad (x \geqq 1, x \to +\infty).$$

$p \geqq 0$ のときは，補題 7.6 を x の代わりに $ax/2$ として適用すると，$x \geqq 0$ に対して

$$\left(\frac{a}{2}\right)^p x^p \leqq ([p]+1)! e^{ax/2} \tag{7.2}$$

が成り立つので,

$$0 \leqq x^p e^{-ax} \leqq \left(\frac{a}{2}\right)^p ([p]+1)! e^{-ax/2} \to 0 \qquad (x \to +\infty)$$

となり「はさみうち」から結論が得られる. □

命題 7.9. 任意の実数 p に対して，次の広義積分は収束する：

$$\int_1^\infty x^p e^{-ax}\,dx$$

証明. 系 7.8 の証明の中の (7.2) を用いれば,

$$x^p e^{-ax} \leqq e^{-ax/2}$$

だが，$a > 0$ だから，右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は，命題 7.2 から収束する．したがって事実 7.5 から，与えられた広義積分は収束する. □

例 7.10. 負でない実数 p に対して次の広義積分は収束する：

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2}\,dx.$$

このことを確かめよう．被積分関数は 0 で連続だから $[0, 1]$ 区間では積分可能．したがって $[1, +\infty)$ での収束を考えればよい．ここで $x \geqq 1$ なら $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$ なので，$0 \leqq x^p e^{-x^2} \leqq x^p e^{-x}$ $(x \geqq 1)$ が成り立つ．命題 7.9 から右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は収束するから，事実 7.5 から考えている広義積分は収束する. ♢

注意 7.11. とくに $p = 0$ とすると,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

は収束する．この積分を**ガウス積分** [5] という．第 7.2 節で求めるように，この値は $\sqrt{\pi}$ である.

[5] ガウス積分：the Gaussian integral; Gauss (Gauß), Carl Friedlich (1777–1855, G).

■ **関数の定義**　積分を用いて具体的な関数を定義することがある.

例 7.12 (ガンマ関数)**.** 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx \tag{7.3}$$

は収束する（問題 7-2）．そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (s > 0)$$

とおき，これを**ガンマ関数**とよぶ. ♢

例 7.13 (ベータ関数)**.** 正の実数 p, q に関して広義積分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束する（問題 7-4）．この 2 変数関数を**ベータ関数**とよぶ [6]. ♢

7.2　ガウス積分

定理 7.14 (ガウス積分の値)**.**

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{7.4}$$

例 7.10, 注意 7.11 からこの広義積分は収束する．しかし e^{-x^2} の原始関数は初等関数でないことが知られているので，積分の値を求めるには特別なアイディアが必要である．以下，重積分の変数変換の応用として，(7.4) を示す.

定理 7.14 の証明. いま，正の数 M に対して

$$I_M := \int_0^M e^{-x^2}\,dx$$

とおくと,

$$\begin{aligned}(I_M)^2 &= \left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_0^M e^{-y^2}\left(\int_0^M e^{-x^2}\,dx\right)dy = \iint_{E_M} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\end{aligned} \tag{7.5}$$

が成り立つ．ただし $E_M := [0, M] \times [0, M]$ である.

一方，一般に正の実数 R に対して

$$J_R := \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \qquad D_R := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq R^2, \\ x \geqq 0, y \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{7.6}$$

[6] B はローマ文字の b の大文字ではなく，ギリシア文字 β の大文字である.

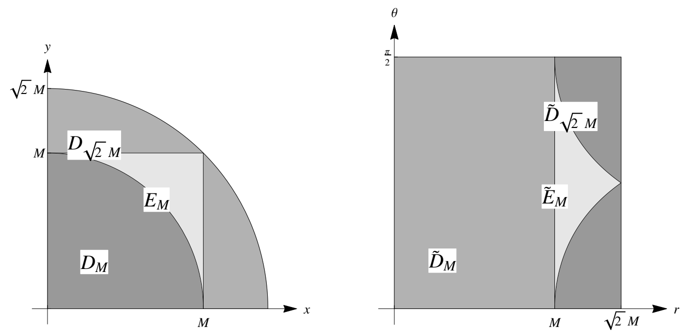

図 7.1　ガウス積分の計算

とおくと，極座標 (r,θ) $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ により D_R は

$$\widetilde{D}_R := \left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqq r\leqq R, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\} = [0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

に対応するから，ヤコビアン $\partial(x,y)/\partial(r,\theta)=r$ に注意すれば，

$$J_R = \iint_{\widetilde{D}_R} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R re^{-r^2}\,dr\right)d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R\left(\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right)'\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\bigl(1-e^{-R^2}\bigr) \tag{7.7}$$

を得る．

　ここで，与えられた M に対して $D_M\subset E_M\subset D_{\sqrt{2}M}$ が成り立つ（図 7.1）から，

$$\frac{\pi}{4}\bigl(1-e^{-M^2}\bigr) = J_M \leqq (I_M)^2 \leqq J_{\sqrt{2}M} = \frac{\pi}{4}\bigl(1-e^{-2M^2}\bigr),$$

となるから

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \lim_{M\to+\infty}(I_M^2) = \frac{\pi}{4}.$$

考えている積分の値は正だから (7.4) が得られた．　□

　応用として，ガンマ関数（例 7.12）の半整数における値が求められる：

系 7.15. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

証明. 定義式 (7.3) の x を u^2 とおくと，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$ □

系 7.16. 定数 μ と正の数 σ に対して次が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1, \tag{7.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \mu, \tag{7.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2. \tag{7.10}$$

証明. 変数変換 $u=(x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ により，正の数 M_1, M_2 に対して

$$\int_{-M_1}^{M_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du \qquad \left(\alpha_j := \frac{M_j+\mu}{\sqrt{2}\sigma}, j=1,2\right)$$

となる．ここで $M_j\to+\infty$ と $a_j\to+\infty$ $(j=1,2)$ は同値だから，定理 7.14 から (7.8) が得られる．

　おなじ変数変換により，(7.9) の積分を計算する：正の数 M_1, M_2 に対して

$$\int_{-M_1}^{M_2}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_{-a_1}^{a_2}\frac{\sqrt{2}\sigma u+\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\,du$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{a_1}^{a_2}ue^{-u^2}\,du + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}}\left(e^{-a_1^2}-e^{-a_2^2}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du \to \mu \quad (a_1,a_2\to+\infty).$$

最後に，

$$\int_{-M_1}^{M_2}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}u^2e^{-u^2}\,du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}u\left(\frac{-1}{2}e^{-u^2}\right)'\,du$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\Bigl[-ue^{-u^2}\Bigr]_{-a_1}^{a_2} + \int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du\right)$$

となる．右辺の第 1 項は系 7.8 から 0 に収束する．また，第 2 項の積分は定理 7.14 から求まるので，(7.10) を得る．　□

■ **ガンマ関数とベータ関数**　ガウス積分に似た方法で，例 7.12, 7.13 のガンマ関数とベータ関数の関係式を導くことができる：

定理 7.17. 任意の p, $q>0$ に対して $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

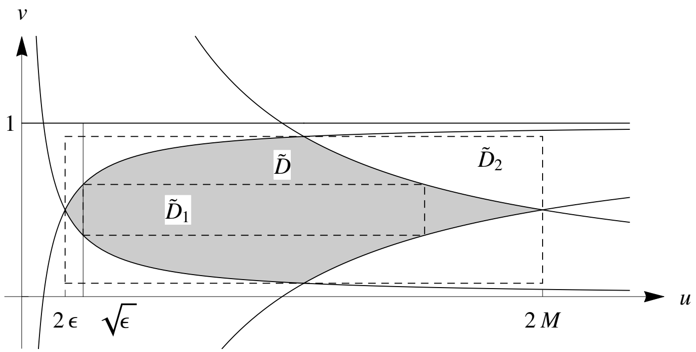

図 7.2　定理 7.17 の証明

証明． 正の数 p, q をとり，固定しておく．正の数 $\varepsilon < 1/4$ と正の数 $M > 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon, M) &:= \iint_{D_{\varepsilon,M}} e^{-x}x^{p-1}\,e^{-y}y^{q-1}\,dx\,dy \\
&= \left(\int_{\varepsilon}^{M} e^{-x}x^{p-1}\,dx\right)\left(\int_{\varepsilon}^{M} e^{-y}y^{q-1}\,dy\right) \qquad D_{\varepsilon,M} = [\varepsilon, M]\times[\varepsilon, M]
\end{aligned}
$$

とおくと，ガンマ関数の定義（例 7.12）から

$$
\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ M\to+\infty}} I(\varepsilon, M) = \Gamma(p)\Gamma(q). \tag{7.11}
$$

一方，変数変換

$$
x = uv, \qquad y = u(1-v)
$$

をほどこすと，xy 平面の部分集合 $D_{\varepsilon,M}$ は uv 平面の部分集合

$$
\widetilde{D} := \left\{(u,v)\,\middle|\,\frac{\varepsilon}{u} \leqq v \leqq \frac{M}{u}, 1-\frac{M}{u} \leqq v \leqq 1-\frac{\varepsilon}{u}\right\}
$$

と 1 対 1 に対応する（図 7.2）．変数変換のヤコビアンは $\partial(x,y)/\partial(u,v) = -u$ であるから，$\widetilde{D}$ 上 $u > 0$ に注意すれば

$$
I(\varepsilon, M) = \iint_{\widetilde{D}} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv
$$

となる．ここで

$$
\widetilde{D}_1 := \left[\sqrt{\varepsilon}, \frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right]\times[\sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon}], \quad \widetilde{D}_2 := [2\varepsilon, 2M]\times\left[\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}, \frac{M}{M+\varepsilon}\right]
$$

とおくと，図 7.2 のように $\widetilde{D}_1 \subset \widetilde{D} \subset \widetilde{D}_2$ だから，

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon, M) &\leqq \iint_{\widetilde{D}_2} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv \\
&= \left(\int_{2\varepsilon}^{2M} e^{-u}u^{p+q-1}\,du\right)\left(\int_{\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}}^{\frac{M}{M+\varepsilon}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\right), \\
I(\varepsilon, M) &\geqq \iint_{\widetilde{D}_1} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv \\
&= \left(\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}} e^{-u}u^{p+q-1}\,du\right)\left(\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1-\sqrt{\varepsilon}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\right).
\end{aligned}
$$

ここで $\varepsilon \to +0$, $M \to +\infty$ とすると，2 つの不等式の右辺はともに $\Gamma(p+q)B(p,q)$ に収束するので，結論が得られた． □

正規分布

確率的に値が定まるような変数を**確率変数**という．確率変数が特定の値をとるときの確率が指定されているとき，変数の値と確率の対応を**確率分布**という．

硬貨（いかさまでない）を 10 回投げて表がでた回数を X を確率変数とみなせば，$X = k$ となる確率は ${}_{10}\mathrm{C}_k/2^{10}$ であることは高等学校で学んだ．このような分布を**二項分布**という（ということが高等学校の教科書にもある）．一般に，確率変数 X が値 x_j をとる確率が p_j (>0) ならば，とりうるすべての値 x_j に関する総和は $\sum p_j = 1$ となる（何かが起こる確率は 1）．ここで，同じ範囲で和をとって

$$
\mu := \sum p_j x_j, \qquad \sigma^2 := \sum p_j(x_j-\mu)^2
$$

とおき μ を X の**平均**，σ^2 を**分散**，σ を**標準偏差**という [7]．

確率変数が連続的な値をとる場合，それが「特定の値をとる」ということは滅多に起こらない．そこで，確率変数の値が「ある範囲」にある場合の確率を指定し，その指定のしかたを確率分布とする．すなわち，任意の区間 (a,b) に対して $a \leqq X \leqq b$ となる確率 $P_{(a,b)}$ を指定することが確率分布を定めることとする．とくに，この確率が

$$
P_{(a,b)} = \int_a^b \rho(x)\,dx \qquad \rho(x) \geqq 0
$$

と，積分を用いて表されているとき，考えている確率分布の**確率密度関数**は $\rho(x)$ である，という．確率変数の値がどれかの実数になる確率は 1，任意の区間に対して $P_{(a,b)} \geqq 0$ にならなければならないから，密度関数は

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1, \qquad \rho(x) \geqq 0 \tag{7.12}
$$

をみたさなければなならない．さきに述べた離散的な場合との類推で，確率密度関数が

[7] 確率変数：a stochastic variable, a random variable, 確率分布：a probability distribution, 二項分布：the binomial distribution, 平均：the mean, 分散：the variance, 標準偏差：the standard deviation, 確率密度関数：a probability density function.

ρ となるような確率分布に対して,

$$\mu := \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx, \qquad \sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\rho(x)\,dx$$

をそれぞれ平均，分散という.

さて，実数 μ と正の数 σ に対して

$$\rho(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2}\sigma}}$$

とおくと，系 7.16 の式 (7.8) は，ρ が (7.12) をみたしていることを表している．この ρ を確率密度関数にもつような確率分布のことを**正規分布**という [8]．系 7.16 は，この正規分布の平均，分散がそれぞれ μ, σ^2 であることを表している.

高次元の球の体積

ガンマ関数を用いると，高い次元の球の体積を簡単に表すことができる（問題 5-9 参照）．正の整数 n と実数 R に対して $\mathbb{R}^n$ の半径 R の**球**（球体）[9] とは

$$B^n(R) := \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,|\, (x_1)^2+(x_2)^2+\dots+(x_n)^2 \leqq R^2\} \subset \mathbb{R}^n$$

のことで，その体積とは，積分

$$V_n(R) := \int\cdots\iint_{B^n(R)} dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

のことである．とくに

$$\alpha_n := V_n(1)$$

とすると，変数変換 $y_j = Rx_j$ $(j=1,\dots,n)$ を行うことにより，$V^n(R) = R^n\alpha_n$ がわかる．とくに，小学校・中学校・高等学校で $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$ であることを学んだ.

定理 7.18. $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

証明. 関数 $f(x_1,\dots,x_n) := e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}$ を考えると,

$$\int\cdots\iint_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}\,dx_1\,dx_2\,\dots dx_n = \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^n = \sqrt{\pi}^n. \tag{7.13}$$

一方，$r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ とすると $f=e^{-r^2}$ となるので，r から $r+\Delta r$ の区間で f の積分はおよそ

$$\begin{aligned} f(r)\times(\text{半径 } r \text{ から } r+\Delta r \text{ までの球殻の体積}) &= f(r)\bigl(V^n(r+\Delta r)-V^n(r)\bigr)\\ &= f(r)\alpha_n\bigl((r+\Delta r)^n - r^n\bigr) = f(r)\alpha_n\cdot nr^{n-1}\Delta r + (\Delta r)^2(\dots) \end{aligned}$$

[8] 正規分布：the normal distribution．正規分布は確率分布の単なる例ではなく，重要な意味をもっている．確率や統計の教科書などで「中心極限定理」を調べてみよ.

[9] 球：a ball．表面だけを表すときは**球面** a sphere という語を用いる.

となる（問題 5-7, 第 5 回の体積密度と質量の関係を参照せよ）．f の $\mathbb{R}^n$ の全体での積分は，この体積の総和だが，Δr^2 の項は，総和をとって $\Delta r\to 0$ としたときに 0 となってしまう項なので [10],

$$\int\cdots\iint_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n = \int_0^{\infty} n\alpha_n e^{-r^2} r^{n-1}\,dr$$

となる．この右辺の積分は $r^2=u$ と置換することで，ガンマ関数の定義から

$$n\alpha_n\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-u}u^{\frac{n}{2}-1}\,du = \frac{n}{2}\alpha_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \alpha_n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

ここで問題 7-3 を用いた．この式と (7.13) が等しいことから結論が得られる. □

問　題　7

7-1 命題 7.2 を確かめなさい.

7-2 例 7.12 の広義積分 (7.3) が収束することを確かめなさい.（注意：この積分は区間の上端も下端も広義積分なので，たとえば $(0,1]$ での積分と $[1,+\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある.）

7-3 任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ であることを示しなさい．これを用いて，正の整数 n に対して $\Gamma(n)=(n-1)!$ であることを確かめなさい.

7-4 例 7.13 の広義積分が収束することを確かめなさい.

7-5 $[0,+\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対して

$$\hat{f}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt \tag{*}$$

で与えられる s の関数 $\hat{f}$ を f のラプラス変換という [11]．つぎを確かめなさい.

(1) 関数 $f(t)=1$ に対して，(*) は $s>0$ で収束し $\hat{f}(s)=1/s$ となる.

(2) 関数 $f(t)=t$ に対して，(*) は $s>0$ で収束し $\hat{f}(s)=1/s^2$ となる.

(3) 関数 $f(t)=t^k$ (k は正の整数) に対して，(*) は $s>0$ で収束し $\hat{f}(s)=k!/s^{k+1}$ となる.

(4) 関数 $f(t)=e^{at}$ (a は定数) に対して，(*) は $s>a$ で収束し $\hat{f}(s)=1/(s-a)$ である.

(5) 関数 $f(t)=\cos\omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s>0$ で収束し，$\hat{f}(s)=s/(s^2+\omega^2)$ である.

(6) 関数 $f(t)=\sin\omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s>0$ で収束し，$\hat{f}(s)=\omega/(s^2+\omega^2)$ である.

[10] ここでは $r=+\infty$ までの積分を考えるので，この議論は少々不正確．有限の範囲で積分しておいて極限をとるのが正しい.

[11] 一般には s は複素変数と考えるべきだが，ここでは実変数と思うことにする．ラプラス変換は線形常微分方程式を解くのに便利なツールだが，この科目では扱わない.「工業数学」などの授業で学ぶはずである.