1. 初等関数の微積分

1.1 1 変数関数（復習）

高等学校で学んだ微分・積分は，関数に対する操作であった．

一般に（ある範囲の）数 x に対して，1 つの数 $f(x)$ を対応させる規則 f を（1 変数）**関数**[1] という．このとき，考える x の範囲を関数 f の**定義域**，値 $f(x)$ として想定している数の範囲を f の**値域** という．また，x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の**像** とよぶ[2]．

■ 実数の集合と区間　関数の定義域，値域，像を表現するために集合の言葉を復習しよう：数学的な対象の集まりを**集合**という[3]．とくに，**実数** 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く[4]．

一般に対象 x が集合 X の**要素**であるということを “$x \in X$” と表す．たとえば “$x \in \mathbb{R}$” とは “x は実数全体の集合の要素” すなわち “x は実数” であることを表している．

集合 X のいくつかの要素を集めて得られる集合を X の**部分集合**という[5]．集合 Y が X の部分集合であることを，記号 $Y \subset X$ と表す[6]．すなわち[7]

$$Y \subset X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{“}y \in Y \text{ ならば } y \in X\text{”}$$

である．

---

*) 2018 年 4 月 09 日/13 日 (2018 年 4 月 20 日訂正)

1) 関数（かんすう）：a function; 語源からすれば「函数」と書くのが正しいのかも知れない．

2) 定義域:the domain; 値域: the range; 像: the image.

3) 集合：a set; この説明では集合と集合でないものの区別がつけられないので何も言っていないことになるが，この授業で扱う範囲では，対象が明確に述べられるのでとくに曖昧になることはないはずである．

4) 実数: real numbers; 実数全体の集合: the set of real numbers; $\mathbb{R}$ は 太字の “R”．印刷では “$\boldsymbol{R}$” を用いることもある．実数とは**数直線上にめもることができる数**のことと思っておこう．実数の概念を数学的に満足な形で書き表すのはやさしくないが，後期「微分積分学第二」でその概要を紹介する．

5) 要素: an element; 部分集合: a subset; $X \subset Y$ と $x \in Y$ の区別に注意せよ．

6) 「Y が X の部分集合である」ということを，高等学校の教科書では $Y \subseteqq X$ と書くことが多いが，それ以外の世界では $Y \subset X$ と書くのが多数派のようなので，ここでは後者（高等学校の教科書流でない方）を採用する．この用法では $X \subset X$ は正しい．

7) 記号 “$A \Leftrightarrow B$” は “A であるための必要十分条件は B”，“A と B は同値”，“A if and only if B”，“A is equivalent to B” と読む．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合，すなわち実数の集合で，数直線上のひと続きの部分を表しているものを**区間**という．区間には次のようなものがある：

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\},\\
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, & (-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq a\},\\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq a\},\\
(-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}, & [a,a] &= \{a\}.
\end{aligned}$$

ただし a, b は $a < b$ をみたす実数である．とくに (a,b) を**開区間**，$[a,b]$ を**閉区間**という[8]．

■ 1 変数関数の例

例 1.1. 実数 x に対して実数 x^2 を対応させる対応の規則にいま f という名前をつけると，“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” と考えることができる．引用符で囲んだ部分のことを

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く．また，“f は x を x^2 に対応させる” ということを

$$f\colon x \longmapsto x^2, \qquad f(x) = x^2$$

と書く．矢印 “$\to$” と “$\mapsto$” はこのように使い分ける．

この関数 f によって $\star$ に対応する値（数）が $f(\star)$ である：

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(s) = s^2, \quad f(x^2-1) = (x^2-1)^2.$$

ここで x が実数全体を動くと，その値 $f(x)$ は負でない実数全体[9] を動く．したがって f の像は $[0,+\infty)$ となる[10]．　◇

---

8) 区間: an interval; 開区間 an open interval; 閉区間: a closed interval. 開区間の括弧は他の記号と紛らわしいかもしれない．それを避けるために (a,b) のことを $]a,b[$ などと書く場合もある．無限大 $\pm\infty$ は実数ではないので，たとえば $(0,+\infty]$ という表記はない．

9) 負でない実数: a nonnegative real number; 負でない実数全体 (the set of nonnegative real numbers) は $[0,+\infty)$ のことを表している．正の実数全体 (the set of positive real numbers) は $(0,+\infty)$ のこと．同様に正でない（負の）実数全体 (the set of nonpositive (negative) real numbers) はそれぞれ $(-\infty,0]$, $(-\infty,0)$ を表す．

10) ここでの “像” のことを “値域” という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように “像” と “値域” を使い分ける．

例 1.2. (1) 実数 x に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 -1 に対して平方して -1 になる実数は存在しないから，この対応は関数とみなすことはできない．

(2) 負でない実数に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 4 に対して平方して 4 になる実数は $+2$ と -2 の 2 つがあるから，この対応は関数とみなすことはできない．

(3) 負でない実数全体の集合 $[0,+\infty)$ の要素 x に対して,「平方して x になる負でない実数」はただ 1 つ存在する．これを $\sqrt{x}$ と書くことにすれば，$f\colon x \mapsto f(x)=\sqrt{x}$ は $[0,+\infty)$ を定義域にもつ関数である． ♢

この授業で扱う 1 変数関数は，主に定義域が $\mathbb{R}$ の区間，あるいはそれらの有限個の合併集合であるようなものである．

例 1.3. (1) 開区間 $I=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ の要素 x に対して x の正接 $\tan x$ を対応させる規則 f_1 は，定義域を I，値域を $\mathbb{R}$ とする関数で，f_1 の像は $\mathbb{R}$ である．

(2) 0 でない実数 x に対して $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2}$ を対応させる規則 f_2 は

$$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

を定義域とする関数で [11]，その像は $(0,+\infty)$ である． ♢

関数は一本の式で表される必要はないし，数式で表されている必要もない．

例 1.4. 次の f_3, f_4, f_5 は $\mathbb{R}$ 上で定義された関数である：

(1) 実数 x に対して，

$$f_3(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x & (x\neq 0 \text{ のとき}),\\ 0 & (x=0 \text{ のとき}).\end{cases}$$

[11] 記号 “$\cup$” は合併集合 the union を表す．とくに $A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ または } x\in B\}$.

(2) 実数 x に対して，

$$f_4(x)=\begin{cases} 1 & (x\neq 0 \text{ のとき}),\\ 0 & (x=0 \text{ のとき}).\end{cases}$$

(3) 実数 x に対して，

$$f_5(x)=\begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数のとき}^{12)}),\\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}).\end{cases}$$

関数 f_3, f_4, f_5 の像はそれぞれ $\mathbb{R}$, $\{0,1\}$, $\{0,1\}$ である [13]． ♢

■ **1 変数関数のグラフ** 区間 I で定義された 1 変数関数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ の**グラフ**とは [14]，座標平面の部分集合

$$\{(x,f(x))\,|\,x\in I\}\subset \text{（座標平面）}$$

のことである．関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標平面の曲線になる．図 1.1 は，第 1 回で与えた例 1.3, 1.4 の関数 f_1–f_5 のグラフである．

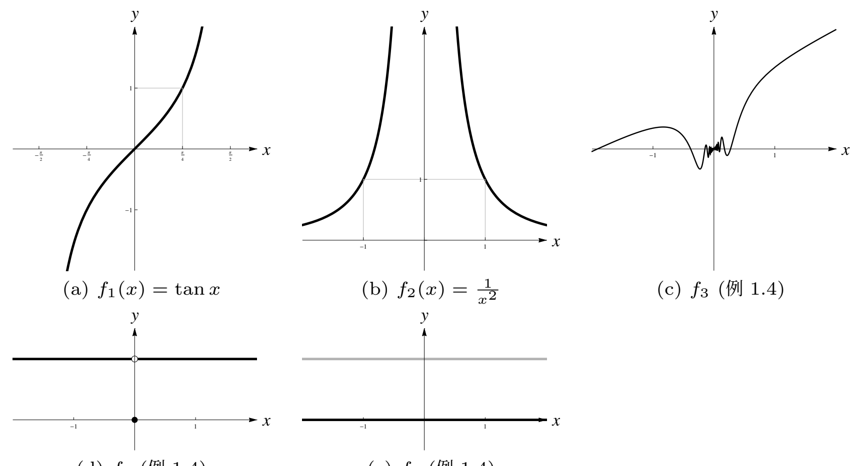
1.2 初等関数

高等学校では，微積分の対象として，多項式・有理式・冪乗根・指数関数・対数関数・三角関数と，具体的な関数を扱った [15]．ここでは，高等学校で学ばなかったいくつかの関数の定義，性質をまとめておく．

■ **三角関数の記号** 高等学校で学んだ**余弦** cosine, **正弦** sine, **正接** tangent の他に，次の記号を用いることがある：

$$\text{(1.1)}\qquad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x},\qquad \sec x := \frac{1}{\cos x},\qquad \csc x := \frac{1}{\sin x}.$$

[12] 有理数: a rational number; 無理数: an irrational number.
[13] 関数 f_3 の像が $\mathbb{R}$ であることを示すには連続関数に関する中間値の定理を用いるが，今は深入りしない．
[14] 関数 f のグラフ: the graph of a function f.
[15] 有理式：a rational function; 冪乗根（巾乗根とも書くが，これは嘘字）：a radical root; 平方根：the square root; 立方根：the cubic root; n-乗根：the n-th root；指数関数：the exponential function; 対数関数：the logarithmic function; 三角関数：the trigonometric functions, the circular functions.



(a) $f_1(x) = \tan x$　(b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$　(c) f_3 (例 1.4)　(d) f_4 (例 1.4)　(e) f_5 (例 1.4)

図 1.1　例 1.3, 1.4 の関数のグラフ．関数 f_5 のグラフの灰色の線は x 座標が有理数，y 座標が 1 である点の集合，黒の線は x 座標が無理数，y 座標が 0 である点の集合を表している．

これらをそれぞれ **余接** cotangent, **正割** secant, **余割** cosecant という [16][17]

例 1.5. 次が成り立つ [18]：

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, && \frac{d}{dx}\cot x = -(1+\cot^2 x), \\ &\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, && \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x, \\ &\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|, && \int \cot x\,dx = \log|\sin x|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

さらに，問題 1-11 で見るように次が成り立つ：

$$\begin{aligned} \int \sec x\,dx &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|, \\ \int \csc x\,dx &= \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|. \qquad \diamondsuit \end{aligned} \tag{1.3}$$

[16] 余割は "cosec" とも書く．また $\sec x = (\cos x)^{-1}$ だが，これを $\cos^{-1} x$ とは書かない．
[17] ここでは，記号 ":=" は「左辺を右辺によって定義する」という意味で用いる．
[18] 式が煩雑になるのを避けるために，ここでは原始関数における任意定数を省略する．

■ 逆三角関数

定義 1.6.
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \cos y$, $0 \leqq y \leqq \pi$ をみたす y を $y = \mathrm{Cos}^{-1} x$ と書く：
$$y = \mathrm{Cos}^{-1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \cos y \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq y \leqq \pi.$$
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ をみたす y を $y = \mathrm{Sin}^{-1} x$ と書く：
$$y = \mathrm{Sin}^{-1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sin y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}.$$
- 与えられた実数 x に対し $x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ をみたす y を $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ と書く：
$$y = \mathrm{Tan}^{-1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \tan y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

これら $\mathrm{Cos}^{-1} x$, $\mathrm{Sin}^{-1} x$, $\mathrm{Tan}^{-1} x$ をそれぞれ**逆余弦関数**，**逆正弦関数**，**逆正接関数**といい，これらをまとめて**逆三角関数**とよぶ [19]

例えば，次が成り立つ [20]：

$$\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \mathrm{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5}{12}\pi, \quad \mathrm{Tan}^{-1}\big(\sqrt{2}-1\big) = \frac{\pi}{8}.$$

例 1.7. (1)　任意の x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して
$$\mathrm{Cos}^{-1} x + \mathrm{Sin}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$
が成り立つ．
実際，$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Cos}^{-1} x\right) = \cos\big(\mathrm{Cos}^{-1} x\big) = x$．ここで，$0 \leqq \mathrm{Cos}^{-1} x \leqq \pi$ だから $-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} - \mathrm{Cos}^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$ なので，$\mathrm{Sin}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Cos}^{-1} x$．

(2)　次が成り立つ：
$$\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} + \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}, \qquad 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$
実際，$\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2}$, $\beta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$ とすると，$\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\beta = \frac{1}{3}$ だから，正接の加法公式を用いれば $\tan(\alpha+\beta) = 1$．ここで，$\mathrm{Tan}^{-1} x$

[19] 逆余弦：arc cosine; 逆正弦：arc sine; 逆正接: arc tangent; 逆三角関数：inverse trigonometric functions. 逆三角関数の記号は，arccos, arcsin, arctan, あるいは $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ と書くこともある．
[20] と書いてあったらとりあえず確かめよ．

が単調増加であることに気をつければ

$$0 < \beta < \alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{2} < \mathrm{Tan}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

ここで $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ なので $\alpha + \beta = \mathrm{Tan}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ となり第 1 式が得られた．正接の 4 倍角の公式から第 2 式が得られる（問題 1-5）[21]．
◇

命題 1.8. 逆三角関数の導関数は次で与えられる：

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{1.4}$$

証明． まず，$y = \mathrm{Cos}^{-1} x$ とすると $x = \cos y$ であるから，逆関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{-1}{\sin y}.$$

ここで $0 \leqq y \leqq \pi$ だから，$\sin y \geqq 0$ なので $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ となり第 1 式を得る．第 2 式は例 1.7 の (1) と第 1 式から得られる．また，$\mathrm{Tan}^{-1} x$ の微分公式を得るには例 1.5 の微分公式を用いればよい（問題 1-3）． □

ただし $\mathrm{Cos}^{-1} x, \mathrm{Sin}^{-1} x$ は $x = \pm 1$ で微分可能でない．

公式 (1.4) から

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Tan}^{-1} x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1} x \tag{1.5}$$

が成り立つことがわかる．ただし第 2 式では $-1 \leqq x \leqq 1$ とする．とくに $\mathrm{Tan}^{-1} 0 = 0, \mathrm{Sin}^{-1} 0 = 0$ なので

$$\mathrm{Tan}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \mathrm{Sin}^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{1.6}$$

が成り立つ．

[21] 例 1.7 (2) の第 2 式をマチン Machin の公式という．少し昔の円周率の高精度計算にはこの公式が用いられた（本節の「余談」参照）．

■ **初等関数**　多項式，冪関数 (x^α の形．冪乗根を含む)，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数に加減乗除，合成の操作を**有限回**施すことによって得られる関数を**初等関数** [22] という．初等関数はその定義域に含まれる開区間上で何回でも微分可能（C^∞-級，第 3 回参照）である [23]．

微分公式から，初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが，初等関数の原始関数は初等関数であるとは限らない．原始関数が初等関数で表されるような積分計算の基本テクニックを演習問題に挙げておく．

■ **双曲線関数**

定義 1.9. 実数 x に対して

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

をそれぞれ x の**双曲的余弦**，**双曲的正弦**，**双曲的正接**とよび，これらを**双曲線関数**という [24][25]．

双曲線関数は，指数関数を用いて表されるので，知らなくてもよいとも言えるが，さまざまな場面で使われるので，少なくとも「読めるように」なっていなければならない．

双曲線関数は三角関数と類似の次の性質をもつ：

命題 1.10. (1) 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ [26][27]．

(2) 加法定理：
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

[22] 初等関数：elementary functions.
[23] ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$，非整数冪 x^α の定義域は $\{x | x > 0\}$ としておく．
[24] 双曲的余弦：hyperbolic cosine; 双曲的正弦：hyperbolic sine; 双曲的正接：hyperbolic tangent; 双曲線関数：hyperbolic functions.
[25] 双曲的余弦 $\cosh t$ と，角度 ht の余弦 $\cos ht$ を混同しないように．印刷物であれば，立体と斜体のフォントの使い分けで 明確に区別できる．
[26] 三角関数と同様に $\cosh^2 x$ は $(\cosh x)^2$ を表す．
[27] とくに $\bigl(x(t), y(t)\bigr) = (\cosh t, \sinh t)$ は xy 平面の双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の右半分のパラメータ表示となる．これが双曲線関数の名前の由来である．

(3) 微分公式：

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x,$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

(4) 積分公式：

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x, \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x,$$
$$\int \tanh x\,dx = \log\cosh x.$$

余談：円周率の近似

実数 t に対して，初項 1, 公比 $-t^2$ の等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}$$

を $t=0$ から x まで定積分すると，式 (1.6) から

$$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x)$$
$$\left(R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\right)$$

を得る．ここで

$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \leqq \int_0^{|x|} t^{2N+2}\,dt = \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$
$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \geqq \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+x^2}\,dt = \frac{1}{2N+3}\frac{|x|^{2N+3}}{1+x^2}$$

なので，

$$\text{(1.7)}\quad \mathrm{Tan}^{-1}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right) + R_N(x),$$
$$\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)(1+x^2)} \leqq |R_N(x)| \leqq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

が成り立つ [28]．とくに $|x| \leqq 1$ とすると

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき})$$

が成り立つので，逆正接関数の無限級数表示が得られる：

$$\text{(1.8)}\qquad \mathrm{Tan}^{-1}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

式 (1.8) で $x=1$ とすると，

$$\text{(1.9)}\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

が得られる．この右辺を適当な項まで計算すれば，円周率の近似値が得られる．式 (1.7) の $R_N(1)$ の形から

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^N}{2N+3}\right) + \widetilde{R}_N, \qquad \frac{2}{2N+3} \leqq |\widetilde{R}_N| \leqq \frac{4}{2N+3}$$

が成り立つことがわかる．この式を用いて円周率を小数 100 位まで求めることを考えよう：誤差 $|\widetilde{R}_N|$ が 10^{-100} を超えないようにするには $N \geqq 10^{100} - \frac{3}{2}$ が必要，$N \geqq 2\times 10^{100} - \frac{3}{2}$ が十分である [29]．

一方，例 1.7 (2) の第 2 式（マチンの公式）の各項に公式 (1.7) を用いると，$\alpha = 1/5$, $\beta = 1/239$ として

$$\text{(1.10)}\quad \pi = 4\left(\sum_{k=0}^{M}\frac{4(-1)^k\alpha^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j\beta^{2j+1}}{2j+1}\right) + R_{M,N},$$
$$|R_{M,N}| \leqq \frac{16\alpha^{2M+3}}{2M+3} + \frac{4\beta^{2N+3}}{2N+3}$$

となる．とくに $R_{M,N}$ が 10^{-100} を超えないためには $M=100$, $N=20$ くらいあれば十分である．公式 (1.9) を用いた計算と比較せよ．

問　題　1

1-1　次の対応は関数を与えるか：

(1) 実数 x に対して 3 乗すると x になるような実数 y を対応させる．

(2) 負でない実数 x に対して 4 乗すると x になるような実数 y を対応させる．

(3) 正の実数 x に対して $a^y = x$ となる y を対応させる．ただし a は正の定数である．

---

[28] これは「微分積分学第二」で扱うテイラーの定理の特別な場合である．

[29] この級数を 1 秒間に 10^{15} 項計算できる機械によって円周率を 100 桁求めるには，3×10^{77} 年 以上かかる．太陽系の年齢が約 50 億 (=5×10^8) 年であることと比較せよ．TSUBAME の演算性能は Peta flops のオーダー，すなわち，1 秒間に 10^{15} 回程度の乗算ができる．ただし，一般に 100 桁程度の高い精度の演算はもっと時間がかかる．

(4) 実数 x に対して $x = \tan y$ をみたす y を対応させる.

(5) 実数 x に対して $x = \tan y$ かつ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ をみたす y を対応させる.

1-2 逆三角関数，正割，余割，余接関数のグラフを描きなさい.

1-3 (1.2), (1.4) を確かめなさい.

1-4 (1) $\cosh x \geqq 1$, $-1 < \tanh x < 1$ であることを確かめなさい.

(2) $\cosh x$ は偶関数，$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数であることを確かめなさい.

(3) グラフ $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ を描きなさい.

(4) 命題 1.10 を示しなさい.

(5) 三角関数にならって，双曲線関数の 2 倍角の公式，3 倍角の公式，半角の公式，積和公式，和積公式をつくりなさい.

(6) $t = \tanh \dfrac{u}{2}$ とおくとき，$\cosh u$, $\sinh u$ を t で表しなさい.

(7) A, B を定数とするとき，$A\cos t + B \sin t$ は $r\cos(t+\alpha)$, $r\sin(t+\beta)$ の形に表すことができる (合成公式). これにならって，双曲線関数の合成公式をつくりなさい.

(8) $x \geqq 1$ を満たす x に対して，$x = \cosh y$, $y \geqq 0$ をみたす y を $y = \mathrm{Cosh}^{-1} x$ と書くと

$$\mathrm{Cosh}^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)$$

となることを確かめなさい. 同様に $\mathrm{Sinh}^{-1} x$, $\mathrm{Tanh}^{-1} x$ を定義し，

$$\mathrm{Sinh}^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad \mathrm{Tanh}^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

であることを確かめなさい.

1-5 (1) マチンの公式（例 1.7 (2) の第 2 式）が成り立つことを確かめなさい.

(2) 式 (1.10) の $M = 2$, $N = 1$ として円周率の近似値を求めなさい. 小数第何位まで正しい値が得られるか.

1-6 (1) $\log x = (x)' \log x$ であることを用いて $\log x$ の原始関数を求めなさい.

(2) $\mathrm{Cos}^{-1} x$, $\mathrm{Sin}^{-1} x$, $\mathrm{Tan}^{-1} x$ の原始関数を求めなさい.

1-7 負でない整数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ とおく. とくに $n \geqq 2$ のとき $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示し，

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n = 2m), \\ \dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\dfrac{2}{3} & (n = 2m+1) \end{cases}$$

であることを確かめなさい. ただし m は正の整数である. さらに $\sin^n x$ の積分についても同様のことを行いなさい.

1-8 $\sqrt{1-x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい.

(1) $x = \sin\theta$ と置換する.

(2) $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ と置換する.

1-9 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+1)^2$ とするとき，$1/f(x)$ の原始関数を求めなさい (部分分数分解).

1-10 定数 a, b に対して $1/(x^2 - 2ax + b)$ の原始関数を次の場合に求めなさい.

(1) $a^2 - b = 0$ の場合, すなわち $1/(x-a)^2$ の原始関数.

(2) $a^2 - b > 0$ の場合 (部分分数分解).

(3) $a^2 - b < 0$ の場合：$1/(1+u^2)$ の原始関数に帰着させる.

1-11 正割，余割の積分公式 (1.3) を次のようにして導きなさい：

(1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ と置換すると被積分関数は t の有理式となるので，部分分数分解して積分する.

(2) $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$ とおいて $u = \sin x$ と置換する.

(3) $\dfrac{1}{\cos x} = \cosh u$ と置換する.

1-12 関数 $1/\sqrt{1+x^2}$ の原始関数は次で与えられることを確かめなさい：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \mathrm{Sinh}^{-1} x.$$

1-13 $\sqrt{1+x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい：

(1) $(x)'\sqrt{1+x^2}$ とみなして部分積分を行うことにより，$1/\sqrt{1+x^2}$ の積分に帰着する.

(2) $x = \tan\theta$ と置換する.

(3) $x = \sinh u$ と置換する.

1-14 次の関数の原始関数を求めなさい：

$$\frac{1}{1-x^4}, \qquad \frac{1}{1-x^3}, \qquad \frac{1}{1+x^4}.$$

1-15 地球 (半径 R メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもはどれくらい伸びるか. R を用いて表しなさい. さらに，R の具体的な値 (1 メートルが定義されたときのいきさつからすぐにわかる) を用いて，伸びを実際に求めなさい：関数電卓を用いるとどのような値になるか. その答えは何桁目まで正しいか. さらに，手計算で値を求めるためにはどうしたらよいか.

2. 多変数関数と偏微分

2.1 多変数関数

■ 記号　正の整数 n に対して，n 個の実数の組全体の集合を $\mathbb{R}^n$ と書く：

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

たとえば $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \,|\, x,\ y \text{ は実数 }\}$$
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x,\ y,\ z \text{ は実数 }\}$$

である．とくに $\mathbb{R}$ は数直線，$\mathbb{R}^2$ は座標平面，$\mathbb{R}^3$ は座標空間とみなすこともできる．集合 $\mathbb{R}^n$ の要素のことを $\mathbb{R}^n$ の**点**とよんだりする [1]．

■ 多変数関数　集合 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D 上の各点 $(x_1, \dots, x_n)$ に対して実数 $f(x_1, \dots, x_n)$ を対応させる規則 f を D 上で定義された (n 変数) **関数**，D を f の**定義域**という [2]．とくに $n \geqq 2$ の場合を**多変数関数** といい，1 変数関数と区別する．第 1.1 節と同様に，“f は $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数である” ということを次のように表す（とくに断らない限り値域は $\mathbb{R}$ とする）：

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

例 2.1. 点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f_0(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくと f_0 は $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数である [3]：$f_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$．ここで与えた対応の規則は

$$f_0\colon \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

と書ける．とくに $f_0(0, 0) = 0$, $f_0(1, 0) = 1$, $f_0(-1, -1) = \sqrt{2}$ である．　$\diamondsuit$

[*] 2018 年 4 月 16 日/20 日 (2018 年 4 月 27 日訂正)

[1] 数直線: the number line; 座標平面: the coordinate plane, the Cartesian plane; 座標空間: the coordinate space; 点: a point.

[2] この授業では D としてあまり変な部分集合は考えない．D を $\mathbb{R}^n$ の “領域”（ちゃんとした定義のある言葉である）とするのが妥当だが，その定義を述べるのにはすこし手間がかかるので，いまはあまり気にしないことにする．第 3 回，およびテキスト 7 ページの脚注 4 参照．

[3] 2 変数関数の場合，$\mathbb{R}^2$ の点を (x_1, x_2) と書くかわりに (x, y) と書くことがある．このとき “$f(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である” ということもある．この講義では，簡単のため，主に 2 変数関数を扱うが，多くの性質は一般の多変数関数に容易に拡張できる．

例 2.2. 東経 x 度，北緯 y 度の地点の標高を $f_{\mathrm{a}}(x, y)$ メートルとすると，$f_{\mathrm{a}}(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である（定義域は適当に考えよう）．たとえば

$$f_{\mathrm{a}}(\text{富士山頂の経度}, \text{富士山頂の緯度}) = \text{富士山の標高}$$

である．　$\diamondsuit$

例 2.3. いまこの瞬間の，東経 x 度，北緯 y 度の地点の地表における気圧を $f_{\mathrm{p}}(x, y)$ ヘクトパスカルとすれば，$f_{\mathrm{p}}(x, y)$ は x と y の 2 変数関数である．$\diamondsuit$

■ グラフと等高線　1 変数関数の場合（第 1 節；4 ページ）と同様に 2 変数関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$\bigl\{\bigl(x, y, f(x, y)\bigr) \,|\, (x, y) \in D\bigr\}$$

を f の**グラフ**という．関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面になる．

一方，2 変数関数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ と定数 c に対して，D の ($\mathbb{R}^2$ の) 部分集合

$$\{(x, y) \in D \,|\, f(x, y) = c\}$$

を，関数 f の高さ c の**等高線**という [4]．関数 f の高さ c の等高線は，座標空間の xy 平面に平行な平面 $z = c$ によるグラフの切り口となっている．関数 f が “性質がよい” もので，c が “適切な” 値であれば，等高線は座標平面のなめらかな曲線になる．なめらかな曲線になるための条件は第 3 回で扱う．

2 変数関数のグラフや等高線は関数の変化の様子を表しているといってよい．

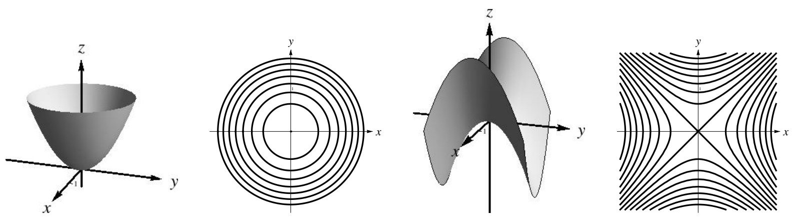
一般に n 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ と定数 c に対して

$$\bigl\{\bigl(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\bigr) \,|\, (x_1, \dots, x_n) \in D\bigr\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\bigl\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \,|\, f(x_1, \dots, x_n) = c\bigr\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$$

をそれぞれ f の**グラフ**，値 c の**等高面**または**等値集合**という．

例 2.4. (1)　$\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ の像は $[0, +\infty)$ である．いま $c \in (0, +\infty)$ に対して，集合 $\{(x, y) | f_1(x, y) = c\}$ は，xy

[4] 等高線: the contour, the level curve, the level set.



(a) f_1 のグラフ・等高線　　(b) f_2 のグラフ・等高線

図 2.1　例 2.4

平面上の原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の円である．これが f_1 の高さ c の等高線であるから，c の値を変化させていくと，等高線は原点を中心とする同心円を描く．このことから，f_1 のグラフは z 軸に垂直な平面できった切り口は円となる（図 2.1 (a)）．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f_2(x,y) = x^2 - y^2$ の像は $\mathbb{R}$ で，実数 c に対して集合 $\{(x,y)|f_2(x,y)=c\}$ は，xy 平面上の双曲線（$c=0$ のときは 2 本の直線）を与える．この関数のグラフと等高線は図 2.1 (b) のようになる． $\diamondsuit$

■ スカラ場　例 2.2, 2.3 のように，関数 f が「座標平面 $\mathbb{R}^2$（の部分集合 D）の各点に対して実数が対応している」とみなせるとき，f を $\mathbb{R}^2$ 上（D 上）の**スカラ場**[5] または平面のスカラ場という．例 2.2 で挙げた標高のスカラ場のグラフは地表そのものであり，等高線は地図で用いられる等高線である．また，例 2.3 で与えられるスカラ場の等高線は等圧線とよばれる．

同様に，3 変数関数が，座標空間の各点に対して実数を対応させているとみなせるとき，空間のスカラ場という[6]．

[5] スカラ場: a scalar field. 「スカラー場」と書くこともある．

[6] いまのところ，スカラ場は多変数関数と同義と思っていて良い．定義域が何がしかの「空間」「世界」であると思えるとき，スカラ場という言葉を使いたくなる．

2.2　偏微分と偏導関数

■ 1 変数関数の微分（復習）　区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された 1 変数関数 f と $a \in I$ に対して極限値

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{2.1}$$

が存在するとき，f は a で**微分可能**であるという．このとき，極限値 (2.1) を f の a における**微分係数**とよび，$f'(a)$ で表す[7]．定義域 I 上のすべての点で f が微分可能ならば，新しい関数

$$f' \colon I \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

が定まる．これを f の**導関数**とよぶ．関数 f を $y = f(x)$ と書き表したとき，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

と書く．この記法は合成関数・逆関数の微分公式を覚えるのに便利であった．

微分可能な関数 f の導関数 f' が微分可能なとき，f' の導関数 f'' を f の **2 次導関数** (2 階微分)，$f''(x)$ の導関数を 3 次導関数... とよぶ[8]．一般に f ($y = f(x)$) の n 次導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

と書く．ここで $f^{(0)}(x) = f(x)$ と約束しておく．

■ 偏微分係数と偏導関数　領域[9] $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数

$$f \colon D \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

を考える．点 $(a,b) \in D$ において，極限値

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

[7] 微分可能: differentiable; 微分係数: the differential coefficient; 導関数: the derivative; f': f-prime (通常 dash とは読まない).

[8] 2 次導関数: the second derivative; 3 次導関数: the third derivative; n 次導関数: the n-th derivative.

[9] 用語 "領域 (a domain)" の意味は第 3 回に述べる．

がともに存在するとき，f は (a,b) で**偏微分可能**であるといって，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

を，f の (a,b) における x に関する (y に関する) **偏微分係数**という.

さらに f が D の各点で偏微分可能なとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x}: D \ni (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathbb{R}$$

は D で定義された 2 変数関数を与える．これを f の x に関する**偏導関数**または**偏微分**という [10]．同様に f の y に関する 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ も定義される.

記号 2.5. 偏導関数の記号 "∂" は**ディー**または**ラウンド・ディー**と読む．これを d と書くことはない．1 行におさめたい時は

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

のように書く．プライム ($'$) は用いない.

■ 偏導関数の計算　関数 f (関数 $f(x,y)$ ということがある) の x に関する偏導関数は，y の値を止めたまま x を変化させて得られる 1 変数関数の導関数とみなせる．したがって $f(x,y)$ が x, y の式で与えられているとき，

(2.2)　　f_x は $f(x,y)$ の y を定数とみなして x に関して微分したもの

(2.3)　　f_y は $f(x,y)$ の x を定数とみなして y に関して微分したもの

である．関数 $f(x,y)$ に対して $f_x(x,y)$ ($f_y(x,y)$) を求めることを「x で (y で) 偏微分する」という.

■ 2 階の偏導関数　関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ がそれぞれ偏微分可能ならば 4 つの 2 変数関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

[10] 偏微分可能: partially differentiable; x に関する偏導関数: the partial derivative with respect to x.

を考えることができる．これらを f の **2 次偏導関数**という [11].

例 2.6. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^2$ に対して

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 6xy, \qquad f_y(x,y) = 3x^2 + 2y.$$

さらにこれを微分して次の 2 次偏導関数を得る：

$$f_{xx} = 6x + 6y, \qquad f_{xy} = 6x, \qquad f_{yx} = 6x, \qquad f_{yy} = 2. \qquad \diamondsuit$$

例 2.7. 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D = \{(x,y) | x \neq 0\}$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$$

に対して，(1.8) を用いれば

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

さらにこれを微分して次の 2 次偏導関数を得る：

$$f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}. \qquad \diamondsuit$$

例 2.6, 2.7 では f_{xy} (x で偏微分して，そのあと y で偏微分したもの) と f_{yx} (y で偏微分してから x で偏微分したもの) が一致する．これは偶然ではなく，**よく使われる状況では f_{xy} と f_{yx} は一致する．**この事実（**偏微分の順序交換定理** [12]）といわれる）を正確に述べるには，2 変数関数の連続性の概念が必要なので，第 3 回で扱う．問題 2-9 は f_{xy} と f_{yx} が一致しない例である.

■ 高階の偏導関数　2 次偏導関数がさらに偏微分可能ならば，3 次偏導関数を考えることができる．一般に 2 変数関数 f ($f(x,y)$) の 3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \dots$$

[11] 2 次偏導関数: the second partial derivatives.

[12] 偏微分の順序交換可能性: the commutativity of partial differentials.

などたくさんあるが，性質のよい関数ならば，たとえば上の 3 つは一致する（偏微分の順序交換定理）．このような場合，3 次偏導関数は

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

の 4 通りとなる．さらに高次の偏導関数も考えることができる．

■ 多変数関数の偏導関数　一般に n 変数関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ の第 i 番目 $(i=1,\dots,n)$ の変数以外を定数とみなして微分して得られた関数を f の x_i に関する偏導関数または偏微分という．変数の個数が多い場合も，よく使われる状況では偏微分の順序交換が可能である：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_l\partial x_k}\qquad (1\leqq k,l\leqq n).$$

微分方程式

自然法則を関数（量）とその導関数（偏導関数）の関係式で表すことがしばしばある．とくに，考えている量を未知としたとき，この関係式を微分方程式という．

■ 常微分方程式　1 変数関数 $u(t)$ とその導関数，2 次導関数 ... の間の関係式を**常微分方程式** [13] といい，その関係式をみたす関数 $u(t)$ を微分方程式の**解**という．

例 2.8. 放射性物質 A が崩壊していく状況を考える．時刻 t における物質 A の質量を $u(t)$ とおくと，$u(t)$ は常微分方程式

$$\frac{du}{dt}=-\lambda u\qquad (\lambda \text{ は正の定数}) \tag{2.4}$$

をみたす．任意の定数 k に対して

$$u(t)=ke^{-\lambda t} \tag{2.5}$$

はこの方程式の解である．逆に，(2.4) の解は (2.5) の形をしている [14]．◇

例 2.9. 理想的なばねの先端につけた質量 m の質点が振動している状況を考える．ばねに沿って x 軸をとり，平衡点を原点とし，時刻 t における質点の位置を $x(t)$ とする．質点に働く力はフックの法則 [15] に従うばねの復元力 $-kx$ ($k>0$ は，ばね定数) および速度に比例する空気抵抗 $-\rho\frac{dx}{dt}$ ($\rho>0$ は定数) のみとすると，時刻 t におけるばねの位置 $x(t)$ は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\rho\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{2.6}$$

をみたす．この方程式は $x=x(t)$ の 2 次導関数を含んでいるので **2 階**常微分方程式という．これに対して (2.4) のような方程式を **1 階**常微分方程式という．この方程式の解は，物理学（力学，電気回路など）で学ぶ．◇

[13] 常微分方程式：an ordinary differential equation.
[14] 方程式 (2.4) の任意の解が (2.5) となることは，一般論として「常微分方程式の解の一意性」から結論することができる．詳しくは「微分積分学第二」で述べる．
[15] フックの法則: Hooke's Law; Hooke, Robert, (1635–1703, En).

■ 偏微分方程式　多変数関数の偏導関数の関係式を**偏微分方程式** [16]，その関係式を満たす関数を偏微分方程式の**解**という．

例 2.10 (ラプラスの方程式・ポアソンの方程式)**.** 2 変数関数 $u=u(x,y)$, 3 変数関数 $w=w(x,y,z)$ をそれぞれ座標平面，座標空間のスカラ場とみなすとき，

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

によりあたらしい関数をつくる対応 Δ を**ラプラス作用素** [17] という．

とくに偏微分方程式 $\Delta u=0$ ($\Delta w=0$) (**ラプラス方程式**と呼ばれる) をみたす関数 u (w) は**調和関数** [18] と呼ばれる．

ラプラス方程式はさまざまな場面に現れる．たとえば，真空中の静電場のポテンシャル (電位) が調和関数となることは電磁気学で学ぶ．また，ニュートンの万有引力の法則に従う重力場のポテンシャル (万有引力の位置エネルギー) は調和関数となることを力学で学ぶ．さらに，空間に電荷や質量が分布している場合は，これらのポテンシャルは $\Delta w=\rho$ ($\rho=\rho(x,y,z)$ は点 (x,y,z) における電荷 (質量) 密度) をみたす．このような $\Delta w=\rho$ (ρ は既知関数) の形の方程式を**ポアソン方程式** [19] とよぶ．◇

例 2.11 (針金の熱伝導)**.** 一様な針金に沿って x 軸を配置し，時刻 t における針金の位置 x における針金の温度を $u(t,x)$ とすると，u は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

をみたす．この方程式を (1 次元の) **熱方程式** [20] という．ただし c は針金の熱容量と熱伝導率によって定まる正の定数である．関数

$$u_0(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}\exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right) \tag{2.8}$$

は $\{(t,x)\,|\,t>0\}\subset\mathbb{R}^2$ で定義された (2.7) の解である（問題 2-10）．これを熱方程式 (2.7) の**基本解**とよぶ．高等学校数学 B で学んだ言葉を用いれば，各 t を指定するごと

[16] 偏微分方程式：a partial differential equation.
[17] ラプラス作用素：the Laplacian; ラプラス：Laplace, Pierre-Simon (1749–1827, F).
[18] 調和関数：a harmonic function.
[19] ポアソン方程式：the Poisson equaiton; ポアソン：Poisson, Siméon Denis (1781–1840, F).
[20] 熱方程式：the heat equation.

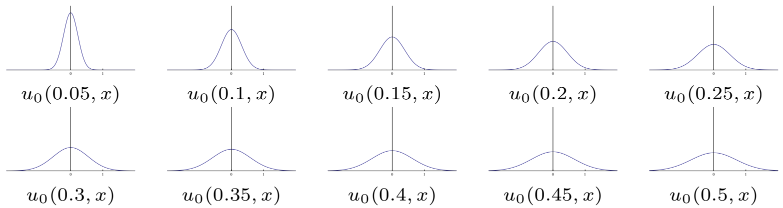


図 2.2　熱方程式の基本解 ($c=1$)

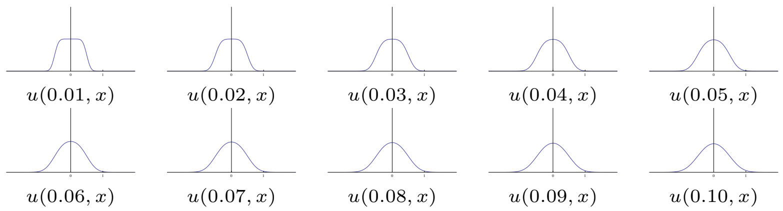


図 2.3　熱方程式の解 (2.9) ($c=1$)

に $u_0(t,x)$ は平均 0，分散 $2ct$ (標準偏差 $\sqrt{2ct}$) の正規分布の密度関数である．とくに

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(t,x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \exp\left(-\frac{x^2}{4ct}\right)\,dx = 1$$

が成り立つ [21]．時刻 t を 0 に近づけると

$$\lim_{t\to+0} u_0(t,x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

と，$t=0$ では定義されないが，$t>0$ ではなめらかな関数を与える (図 2.2)．次に，関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

に対して

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t,x-y)f(y)\,dy \tag{2.9}$$

とすると $u(t,x)$ も (2.7) の解を与えており，$t\to 0$ とすると “大体” f に近づく [22] (図 2.3). ♢

[21] この積分の求め方は，第 7 回に紹介する．
[22] “大体” の説明は今回はしない．

例 2.12 (弦の振動と波動方程式)**.** 一様な弦が振動している状況を考える．弦にそって x 軸をとり，時刻 t における弦の平衡点からのずれを $u(t,x)$ とすると，振幅が小さいときは u は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

をみたす．ただし c は弦の張力と線密度から定まる正の定数である．これを**波動方程式** [23] とよぶ．この方程式の任意の解は

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

と書ける．ただし F, G は (すきなだけ微分可能な) 1 変数関数である (問題 2-11)[24].

熱方程式と同じように，平面や空間の波動方程式は $u_{tt} = c^2\Delta u$ と表される．太鼓の膜の振動や空間の波動は (場合によっては近似的に) この方程式により表される． ♢

問　　題　　2

2-1　次は正しいか：

(1)　区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された関数 f のグラフは存在しないことがある．

(2)　領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f のグラフは存在しないことがある．

2-2　(1)　身の回りの量で，2 変数関数，3 変数関数... で表されるものの具体例を挙げなさい．

(2)　次のような意見に対して，有効な反論をなるべくたくさん挙げなさい：

> 3 変数関数, 4 変数関数 ... のグラフは描くことができない．したがって，このような関数を考えることに実用的な意味はない．

2-3　例 2.1 の関数 f のグラフを描きなさい．また，高さ 1, 2, 3 ... の等高線を描きなさい．

2-4　例 2.4 を確かめなさい．

2-5　1 変数関数 F に対して，$f(x,y) = F(\sqrt{x^2+y^2})$ により 2 変数関数 f を定義する．

(1)　f の等高線はどのような形になるか．

(2)　f のグラフはどのような形になるか．

[23] 波動方程式：the wave equation.
[24] 応用上必要な解を求めるには，さらに境界条件や初期条件を考慮する必要がある．

2-6 2 変数関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0) \text{ のとき })\\ 0 & ((x,y)=(0,0) \text{ のとき })\end{cases}$$

に対して

(1) 次の値を求めなさい:

- $f(0,0)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$, $f(1,3)$.
- $f(2,4)$, $f(3,6)$, $f(4,8)$.
- $f(a,ma)$ (m は定数, a は 0 でない定数).

(2) f の等高線を描きなさい.

(3) f の偏導関数をすべて求めなさい

2-7 一般に n 変数関数の 2 次偏導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい.

2-8 一般に n 変数関数の m 次偏導関数は何通りあるか．偏微分の順序交換ができる場合と，順序を入れ替えた偏微分を区別しなければならない場合について考えなさい.

2-9 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

は 2 階偏微分可能であることを示し，2 次偏導関数を求めなさい.

2-10 式 (2.8) が熱方程式 (2.7) をみたすことを確かめなさい.

2-11 関数

$$u(t,x)=a\sin(x+qt)+b\sin(x-qt) \qquad (a,\ b,\ q \text{ は定数})$$

が波動方程式 (2.10) を満たすような定数 a, b, q の値を求めなさい.

2-12 次の 2 変数関数は調和関数であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}, \qquad g(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}.$$

また，x, y の 3 次以下の多項式で調和関数となるものをすべて求めなさい.

2-13 1 変数関数 $F(t)$ を用いて

$$f(x,y,z)=F(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

という形でかけるような 3 変数関数 f が調和関数となるような F を求めなさい.

2-14 2 変数関数 $f(x,y)$ に関する関係式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right)=0$$

をみたすとき，関数 f のグラフが与える曲面を**極小曲面**という [25]．次の関数 (定義域はどう考えるのがよいか) のグラフは極小曲面であることを確かめなさい：

$$f(x,y)=\log\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}\right),$$
$$g(x,y)=\log\frac{\cos x}{\cos y},$$
$$h(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}.$$

2-15 (1) 実数 θ に対して $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (i は虚数単位) と定める (オイラーの公式)．さらに，複素数 $z=x+iy$ (x, y は実数) に対して

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

と定めよう．すると，e^z の実部 $\mathrm{Re}\,e^z$ および虚部 $\mathrm{Im}\,e^z$ は (x,y) の調和関数であることを確かめなさい.

(2) 複素数 $z=x+iy$ に対して $f(z)=z^m$ (m は正の整数) とする．$\mathrm{Re}\,f(z)$ ($\mathrm{Im}\,f(z)$) は (x,y) の関数とみなすことができるが，これは (x,y) の調和関数であることを $m=2,3,4$ に対して確かめなさい．一般の m ではどうか.

[25] 極小曲面: a minimal surface.

3. 連続性と微分可能性

3.1 1 変数関数の微分可能性と連続性 (復習)

定義 3.1. 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の 1 変数関数 f が $a \in I$ で**連続**であるとは [1]

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである [2]．関数 f が定義域 I の各点で連続なとき f は I で連続である，あるいは**連続関数**であるという．

例 3.2. (1) 次の関数（例 1.4 (2)）は 0 で連続でない：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際 $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = 1$ であるが $f(0) = 0$.

(2) 次の関数 f は 0 で連続でない：

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

実際，$x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ で定めると，$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の極限値は 0 であるが，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = -1$ となるので $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．◇

16 ページで定義を与えた微分可能性から連続性が従う：

定理 3.3. 1 変数関数 f が a で微分可能ならば a で連続である．

証明． 極限の性質から

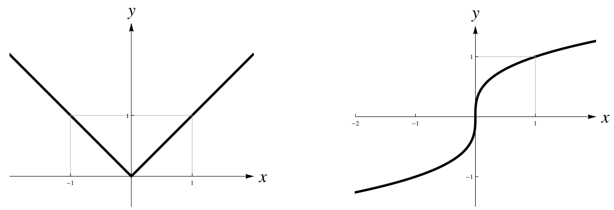
$$\begin{aligned} \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) - f(a) &= \lim_{x \to a}\bigl(f(x) - f(a)\bigr) = \lim_{h \to 0}\bigl(f(a+h) - f(a)\bigr) \\ &= \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} h\right) = \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h \to 0} h\right) \\ &= f'(a) \times 0 = 0. \end{aligned}$$

□

[*] 2018 年 4 月 23 日/30 日 (2018 年 4 月 27 日訂正)

[1] 連続: continuous; 連続関数: a continuous function.

[2] すなわち x が a に近づくとき，その近づき方によらず $f(x)$ が $f(a)$ に近づく．例 3.2 (2) 参照．きちんとした極限の議論は後期に扱う．



$f(x) = |x|$　　$f(x) = \sqrt[3]{x}$

図 3.1　例 3.4

例 3.4. (1) 関数 $f(x) = |x|$ は 0 で微分可能でない（図 3.1 左）．

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $(x \in \mathbb{R})$ で与えられる関数 f は 0 で微分可能でない．実際

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{h}^2} \longrightarrow +\infty \qquad (h \to 0)$$

である．関数 f のグラフは，なめらかな曲線である（図 3.1 右）．

(3) 例 1.4 の (1) で挙げた関数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は 0 で (したがって $\mathbb{R}$ 全体で) 微分可能で，

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} & (x \neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x = 0) \end{cases}$$

となる．実際 $f'(0)$ は “はさみうちの原理” [3] から求まる．◇

■ **C^k-級関数**　区間 I で定義された 1 変数関数 f が区間 I で

- C^0-級である [4] とは I で連続なこと，
- C^1-級であるとは，I で微分可能で，導関数 f' が I で連続となること，
- C^k-級（$k > 0$ は整数）であるとは、f の k 次導関数 $f^{(k)}$ が存在して，それが I で連続となること，
- C^∞-級であるとは，全ての負でない整数 k に対して C^k-級であることとする．

[3] はさみうちの原理: the squeeze theorem.

[4] C^0-級: of class C^0; C^r-級: of class C^r; C^∞-級: of class C^∞ (C-infinity).

例 3.5.
- 例 3.4 (3) の関数 f は $\mathbb{R}$ で微分可能だが，C^1-級ではない．実際，例 3.2 の (2) から導関数 f' は 0 で連続でない．
- 第 1 回の初等関数は，定義域に含まれる開区間で C^∞-級である．ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$ は $\{x \mid x > 0\}$ で定義されているとする． ♢

3.2 多変数関数の連続性・微分可能性

多変数関数の微分可能性の定義を与えよう．簡単のために話を 2 変数関数に限るが，以下の議論は n 変数関数 $(n > 2)$ に容易に一般化できる．

■ **領域** 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**領域**であるとは，それが “ひと続きで端をもたない” ことである [5]．たとえば $\mathbb{R}^2$ 全体，開円板や開長方形 [6]

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}, \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, c < y < d\}$$

は領域である．ただし実定数 r, a, b, c, d は $r > 0$, $a < b$, $c < d$ をみたす．

■ **極限** 2 変数関数 f の極限値が A，すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \qquad \Bigl(f(x,y) \to A \qquad \bigl((x,y) \to (a,b)\bigr)\Bigr) \tag{3.1}$$

をみたす [7] とは (x,y) が**どのような経路で** (a,b) **に近づいても** $f(x,y)$ の値が A に近づくことである [8].」という．とくに $(a+h, b+k)$ が (a,b) に近づくことは (h,k) が $(0,0)$ に近づくことと同じだから

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k). \tag{3.2}$$

事実 3.6. 2 変数関数 α, β, f が

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h,k) = 0, \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h,k) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

をみたしているならば $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f\bigl(a + \alpha(h,k), b + \beta(h,k)\bigr) = A$.

[5] 領域: a domain; もう少し正確な意味はこの節末で述べる

[6] 開円板: an open disc; 開長方形: an open rectangle (rectangular domain).

[7] $(x,y) \to (a,b)$ のときの極限を考える際，f は (a,b) で定義されていなくてもよい（いてもよい）．極限値：the limit.

[8] 極限に関するもう少し厳密な議論は後期の微分積分学第二で扱う．ここでは以下を認めて議論をすすめる．

事実 3.7. (1) (3.1) が成り立つための必要十分条件は，0 に収束する**任意の** 2 組の数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ に対して [9] 次が成り立つことである：

$$\lim_{n\to\infty} f(a + h_n, b + k_n) = A.$$

(2) (3.1) が **成り立たない**ための必要十分条件は，$\{f(a + h_n, b + k_n)\}$ が A に収束しないように，0 に収束する数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ を**うまく選ぶことができる**ことである．

例 3.8. (1) $\mathbb{R}^2$ 全体で定義された関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

を考える（問題 2-6 参照）．いま，$h_n = 1/n$, $k_n = 1/n$, $k'_n = -1/n$ で 3 つの数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$, $\{k'_n\}$ を定めると，これらは 0 に収束し，

$$\lim_{n\to\infty} f(h_n, k_n) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} f(h_n, k'_n) = -1$$

となる．この第 1 式と事実 3.7 (1) から，$(x,y) \to (0,0)$ のとき $f(x,y)$ は 1 以外の実数を極限値にもたない．また第 2 式から $f(x,y)$ は -1 以外の実数を極限値にもたない．これらから $(x,y) \to (0,0)$ のとき $f(x,y)$ は極限値をもたないことがわかる．

一方，0 でない y をひとつ固定して，1 変数関数の極限値をとると

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr) = 0,$$

同様に

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{だから} \quad \lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr) = 0.$$

(2) $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ は $(x,y) \to (0,0)$ としたときの極限値をもたない．一方，

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Bigr) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Bigr) = -1.$$

(3) 関数 $f(x,y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ は $(x,y) \to (0,0)$ で極限値 0 をもつ．実際，$r > 0$ と θ を用いて $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と書くと，

[9] 任意（にんい）の: arbitrary; 任意の X に対して P が成り立つ: P holds for an arbitrary X.

$(x,y)\to(0,0)$ と $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ とは同値である．いま

$$(*)\qquad f(x,y)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta$$

だが，$|\sin 4\theta|\leqq 1$ だから，$(*)$ の右辺は $r\to 0$ で 0 に近づく． ◇

■ 連続性　第 3.1 節にならって 2 変数関数の連続性を次のように定義する：

定義 3.9. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 f が $(a,b)\in D$ で**連続**であるとは，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$$

が成り立つことである．関数 f が定義域 D のすべての点で連続であるとき，f は D で連続，あるいは D 上の連続関数であるという．

例 3.10. (1)　例 3.8 の (1) の関数 f は $(0,0)$ で連続でない．しかし，偏微分可能で $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ である．

(2)　次の関数（問題 2-9）は $(0,0)$ で連続である（例 3.8 (3)）：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr)\end{cases}$$ ◇

変数 x, y と定数に加法・乗法を有限回施して得られる式を**多項式**，多項式の商の形を**有理式**という．多項式であらわされる関数は連続，有理式であらわされる関数は分母が 0 とならない点で連続である．

■ 微分可能性　例 3.10 の (1) の関数は，偏微分可能だが連続ではない．そのような関数を微分可能とは言いがたいだろう．

定義 3.11. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で**微分可能**であるとは，定数 A, B をうまくとり，十分小さい $(h,k)\neq(0,0)$ に対して

$$(3.3)\qquad f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

により $\varepsilon(h,k)$ を定義すると，次が成り立つことである：

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

命題 3.12. 関数 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能ならば，f は (a,b) で偏微分可能で，(3.3) の定数 A, B は $A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$ でなければならない．

証明． 式 (3.3) の $k=0$ として

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\frac{Ah+\varepsilon(h,0)\sqrt{h^2}}{h}=A+\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}$$

だが，$-|\varepsilon(h,0)|\leqq\varepsilon(h,0)\frac{|h|}{h}\leqq|\varepsilon(h,0)|$，かつ $h\to 0$ とすると $\varepsilon(h,0)\to 0$ だから

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b).$$

一方 $h=0$ とすることで $B=f_y(a,b)$ も得られる． □

したがって定義 3.11 は次と同値である：

定理 3.13. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ で微分可能であるための必要十分条件は，f が (a,b) で偏微分可能で，

$$(3.4)\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$$
$$\left(\varepsilon(h,k):=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

が成り立つことである．

命題 3.14. 関数 f が (a,b) で微分可能ならば (a,b) で連続である．

証明． 式 (3.3) の両辺で $(h,k)\to(0,0)$ とすればよい． □

注意 3.15. 命題 3.12 の逆は成立しない．実際，例 3.8 (1) の f は $(0,0)$ で偏微分可能だが連続でない（例 3.10 参照）．したがって，命題 3.14 の対偶から微分可能でない．

■ 微分可能性の十分条件

定理 3.16. 領域 D で定義された 2 変数関数 f が D の各点で偏微分可能，かつ偏導関数 f_x, f_y が D で連続ならば f は D の各点で微分可能である．

証明には平均値の定理を用いる．節末（35 ページ）参照．

例 3.17. 定理 3.16 の逆は成立しない．実際，

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr) \end{cases}$$

は $(0,0)$ で微分可能であるが f_x, f_y は原点で連続でない． ♢

■ 偏微分の順序交換定理

定理 3.18. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f の 2 つの 2 次偏導関数 f_{xy}, f_{yx} が存在してともに連続であるとき，$f_{xy}=f_{yx}$ が成立する．

■ C^k-級関数 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 f が D で

- C^0-級とは D で連続なこと，
- C^1-級とは D の各点で偏微分可能で，f_x, f_y が D で連続となること，
- C^2-級であるとは，f の 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が存在して，それらがすべて D で連続であること，
- C^k-級（k は正の整数）とは f の k 次偏導関数が存在し，それらがすべて D 上で連続となること，
- C^∞-級とは，非負整数 k に対して C^k-級となることである．

系 3.19. 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が

(1) 微分可能ならば C^0-級である（命題 3.14）．

(2) C^1-級ならば微分可能である（定理 3.16）．

(3) $k\leqq m$ のとき C^m-級ならば C^k-級である．

(4) C^2-級ならば $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ（定理 3.18）．

3.3 全微分と近似式

関数 $f(x,y)$ が定義域の点 $P=(a,b)$ で微分可能であるとき，

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \tag{3.5}$$

で与えられる 2 次行ベクトル $(df)_P$ を**関数 f の点 P における全微分**または**微分**という[10]．さらに，(x,y) に対して 2 次行ベクトル $\bigl(f_x(x,y), f_y(x,y)\bigr)$ を対応させる規則 df を f の**全微分**または**微分**という：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{3.6}$$

例 3.20. 関数 $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=y$ に対して $d\varphi=(1,0)$, $d\psi=(0,1)$ である．このことを次のように書く：$dx=(1,0)$, $dy=(0,1)$． ♢

例 3.20 の記号を用いれば (3.6) は

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.7}$$

と書くことができる．これが通常の全微分の表し方である．

例 3.21. 微分可能性の定義式 (3.3) の最後の項は，(h,k) と $(0,0)$ の距離 $\sqrt{h^2+k^2}$ が十分小さいときに，それにくらべてずっと小さくなるので，(h,k) を $(\Delta x,\Delta y)$ と書けば，これが $(0,0)$ に十分に近いときは，近似式

$$\Delta f \fallingdotseq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y, \qquad \bigl(\Delta f := f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)\bigr) \tag{3.8}$$

が成り立つ．ただし $\fallingdotseq$ はおよそ等しいことを表す．この近似式の誤差を評価するには，微分積分学第二で学ぶテイラーの定理を用いる． ♢

■ 曲線に沿う微分 数直線上の区間 I 上で定義された 1 変数関数 $x(t)$, $y(t)$ の組 $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ は I から座標平面 $\mathbb{R}^2$ への写像と思える：

$$\gamma\colon I\ni t\longmapsto \gamma(t) = \bigl(x(t),y(t)\bigr)\in\mathbb{R}^2.$$

このような写像を**曲線**あるいは**曲線のパラメータ表示**という[11]．以下，曲線と言えば $x(t)$, $y(t)$ が微分可能となるもののみを考える[12]．このことを "γ

[10] 数を 2 つ横に並べたものを 2 次行ベクトルという．これは $(1,2)$-型の行列とみなすことができる．行列とベクトルの演算については第 4 回参照．；行ベクトル：a row vector 列ベクトル：a column vector; 全微分：a total differential; 微分：a differential.

[11] 曲線：a curve; 曲線のパラメータ表示：a parametric representation of the curve.

[12] だからといって γ の像が "なめらか" な図形になるとは限らない．たとえば曲線 $\gamma(t)=\bigl(t-\sin t, 1-\cos t\bigr)$ はサイクロイド (cycloid) を与える．このパラメータ表示の 2 つの成分はともに微分可能（さらに C^∞-級）であるが，$t=2n\pi$ に対応する点 $(2n\pi,0)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$ で尖った形をしている．

は微分可能” という．微分可能な曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ に対して

$$\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \bigl(\dot x(t), \dot y(t)\bigr) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を曲線上の点 $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ における**速度ベクトル**という[13]．パラメータ t の値を時刻とみなし，$\gamma(t)$ を時刻 t における点の位置とみなすことによって，曲線 $\gamma(t)$ は平面上の点の運動を表していると考えられる．このとき，速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ は時刻 t における運動する点の**速度**とみなすことができる．

例 3.22. (1) ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ と点 $P = (a, b)$ に対して

$$\gamma(t) = \bigl(a + tv_1, b + tv_2\bigr)$$

は $t = 0$ で点 P を通り一定の速度 $\boldsymbol{v}$ で直線上を運動する点，すなわち P を通り $\boldsymbol{v}$ に平行な直線を表す（図 3.2 左）．

(2) パラメータ s に対して $\sigma(s) = (\cos s, \sin s)$ $(-\pi < s < \pi)$ は原点を中心とする半径 1 の円から $(-1, 0)$ を除いた部分を表す[14]．速度ベクトルは $(-\sin s, \cos s)$ となるから，速さは 1 で一定である（図 3.2 中央）．

(3) 次も原点を中心とする半径 1 の円から $(-1, 0)$ を除いた図形を表す：

$$\tilde\sigma(t) := \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

この式で $t = \tan\frac{s}{2}$ とすると，(2) の表示が得られる（図 3.2 右）．◇

2 変数関数 $f(x, y)$ と曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ に対して，

$$F(t) = f\bigl(x(t), y(t)\bigr). \tag{3.9}$$

は，1 変数関数を与える．

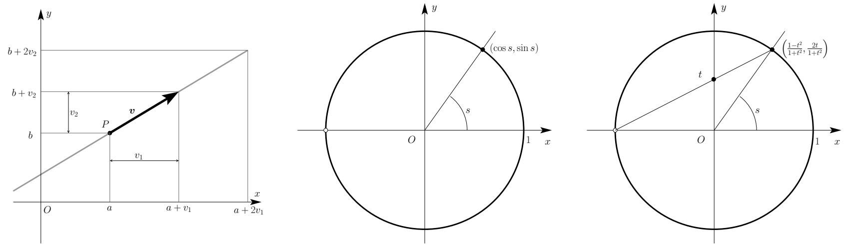
命題 3.23. 微分可能な 2 変数関数 $f(x, y)$ と微分可能な曲線 $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ に対して，(3.9) は 1 変数関数として微分可能で，次が成り立つ：

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}(t).$$

証明． 実数 t を一つ固定して，δ の 1 変数関数 $h(\delta)$, $k(\delta)$ をそれぞれ

$$h(\delta) := x(t + \delta) - x(t), \qquad k(\delta) := y(t + \delta) - y(t)$$

[13] 速度ベクトル：the velocity vector; 速さ：the speed. 違いを思い出しておこう．
[14] 直線：a line; 円：a circle.



(1) (2) (3)

図 3.2 例 3.22

とすると，x, y の連続性から $\delta \to 0$ のとき $h(\delta)$, $k(\delta) \to 0$．さらに

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} - \dot x(t) = \frac{h(\delta)}{\delta} - \dot x(t), \qquad \varepsilon_2(\delta) := \frac{k(\delta)}{\delta} - \dot y(t)$$

とおけば，$x(t)$, $y(t)$ の微分可能性より $\delta \to 0$ のとき，$\varepsilon_1(\delta)$, $\varepsilon_2(\delta) \to 0$．これらの記号を用いると，$f$ の微分可能性から

$$\begin{aligned}
F(t + \delta) - F(t) &= f\bigl(x(t+\delta), y(t+\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\
&= f\bigl(x(t) + h(\delta), y(t) + k(\delta)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)h(\delta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)k(\delta) + \varepsilon\bigl(h(\delta), k(\delta)\bigr)\sqrt{h(\delta)^2 + k(\delta)^2}
\end{aligned}$$

となる．ただし $\varepsilon(h, k)$ は $(h, k) \to (0, 0)$ のときに 0 に近づく関数である．したがって，

$$\begin{aligned}
&\frac{F(t+\delta) - F(t)}{\delta} \\
&\quad = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\bigl(\dot x(t) + \varepsilon_1(\delta)\bigr) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\bigl(\dot y(t) + \varepsilon_2(\delta)\bigr) \\
&\qquad + \varepsilon\bigl(h(\delta), k(\delta)\bigr)\frac{|\delta|}{\delta}\sqrt{\bigl(\dot x(t) + \varepsilon_1(\delta)\bigr)^2 + \bigl(\dot y(t) + \varepsilon_2(\delta)\bigr)^2}.
\end{aligned}$$

ここで $\delta \to 0$ のとき $\varepsilon_j(\delta) \to 0$, $(j = 1, 2)$，また $\bigl(h(\delta), k(\delta)\bigr) \to (0, 0)$ なので $\varepsilon(h(\delta), k(\delta)) \to 0$．さらに $\bigl||\delta|/\delta\bigr| = 1$ であることに注意すると

$$F'(t) = \lim_{\delta \to 0}\frac{F(t+\delta) - F(t)}{\delta} = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\dot x(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t), y(t)\bigr)\dot y(t) \qquad \square$$

領域

この節の冒頭で “領域” のいい加減な定義を与えた．整合性のため，ここで領域の定義を与えるが，当面はあまり気にしなくてよい．

定義. 閉区間 $I=[a,b]$ 上の 2 つの連続関数 x, y の組 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ を座標平面 $\mathbb{R}^2$ の**連続な道**，点 $\gamma(a)$，$\gamma(b)$ をそれぞれ γ の**始点**, **終点**とよぶ.

定義. 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**連結**であるとは，D の各点 P, Q に対して P を始点，Q を終点とする連続な道 $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2$ で各 $\gamma(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ が D の点となるものが存在することをである.（この概念は正確には "弧状連結性" という）.

定義. 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 $P=(a,b)$ と正の実数 ε に対して

$$U_\varepsilon(P):=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}\subset\mathbb{R}^2$$

で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合を "点 P を中心とした半径 ε の**円板**" という.

定義. 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**開集合** [15] であるとは D の各点 P に対して $U_\varepsilon(P)\subset D$ となるような正の数 ε をとることができることである.

ここでは証明を与えないが，次の事実は重要である：

事実. 連続関数 $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して，集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)>0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である.

定義. 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の連結かつ開集合となる部分集合を**領域**という.

定理 3.16・定理 3.18 の証明

これらの定理を証明するためには，高等学校で学んだ平均値の定理 [16] を用いる：

定理 (平均値の定理). 関数 f が区間 I で微分可能であるとき，点 $a\in I$ と $a+h\in I$ となるような h に対して，次をみたす θ が存在する：

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h\qquad(0<\theta<1).$$

定理 3.16 の証明. 点 $(a,b)\in D$ で微分可能であることを示す：0 に近い h, k に対して (3.4) のように $\varepsilon(h,k)$ を定め，これが 0 に近づくことを示す．いま，k を一つ固定して $F(h):=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)$ とおくと，f の偏微分可能性から F は h の微分可能な関数で $F'(h)=f_x(a+h,b+k)$, $F(0)=0$ が成り立つ．そこで F に平均値の定理を適用すると

$$F(h)=F(h)-F(0)=F'(\theta h)h=f_x(a+\theta h,b+k)h\qquad(0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．同様に $G(k)=f(a,b+k)-f(a,b)$ とおくと，k ごとに

$$G(k)=G'(\delta k)k=f_y(a,b+\delta k)k\qquad(0<\delta<1)$$

をみたす δ をとることができる．したがって

$$\varepsilon(h,k)=\frac{F(h)+G(k)-f_x(a,b)h-f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

[15] 開集合: an open set; 連結集合: a connected set; 円板: a disc (disk).
[16] 平均値の定理: the mean value theorem. 証明は後期の微分積分学第二で与える.

$$=\bigl(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a,b)\bigr)\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}+\bigl(f_y(a,b+\delta k)-f_y(a,b)\bigr)\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

となるが，$|\theta h|<|h|$, $|\delta k|<|k|$ と，$|h/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$, $|k/\sqrt{h^2+k^2}|\leqq 1$ から，右辺は $(h,k)\to(0,0)$ のときに 0 に近づく. □

定理 3.18 の証明. 点 $(a,b)\in D$ を固定して $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ を示す．いま,

$$V=V(h,k):=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)}{hk}$$

とおく．ただし，h, k は十分 0 に近い数とする．このとき

$$V=\frac{1}{k}\frac{F(h)-F(0)}{h}\qquad\bigl(F(t):=f(a+t,b+k)-f(a+t,b)\bigr)$$

だが，$F'(t)=f_x(a+t,b+k)-f_x(a+t,b)$ に注意して平均値の定理を適用すれば,

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{k}F'(\theta_1 h)=\frac{1}{k}\bigl(f_x(a+\theta_1 h,b+k)-f_x(a+\theta_1 h,b)\bigr)\\&=\frac{1}{k}\bigl(F_1(k)-F_1(0)\bigr)\qquad(F_1(t):=f_x(a+\theta_1 h,b+t))\end{aligned}$$

となる $\theta_1\in(0,1)$ が存在する．さらに $F_1'(t)=f_{xy}(a+\theta_1 h,b+t)$ に注意すれば，平均値の定理から次を満たす θ_1, θ_2 が存在することがわかる：

$$(\star)\qquad V=f_{xy}(a+\theta_1 h,b+\theta_2 k)\qquad\bigl(\theta_1,\theta_2\in(0,1)\bigr).$$

同様に $V=(G(k)-G(0))/(hk)$ $(G(t):=f(a+h,b+t)-f(a,b+t))$ とすると

$$(\star\star)\qquad V=f_{yx}(a+\varphi_1 h,b+\varphi_2 k)\qquad\bigl(\varphi_1,\varphi_2\in(0,1)\bigr)$$

となる φ_1, φ_2 が存在する．f_{xy}, f_{yx} の連続性から $(\star)$, $(\star\star)$ の $(h,k)\to(0,0)$ とする極限をとれば，$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ が成り立つことがわかる. □

問　題　3

3-1 例 3.4, 3.8, 3.10, 3.17 を確かめなさい.

3-2 2 変数関数が連続であること，偏微分可能であること，微分可能であること，C^1-級であることの間の関係を整理しなさい.
例：微分可能 $\Rightarrow$ 連続；連続 $\not\Rightarrow$ 微分可能．実際 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ は $(0,0)$ で連続だが微分可能でない.

3-3 関数 $f(x,y)=e^x(\cos y+\sin y)$ に対して $f(0.1,0.2)$ の近似値を式 (3.8) を用いて求めなさい．また，計算機などで求めた値とどれくらい近いか調べなさい.

3-4 2 変数関数 f が "標高を表すスカラ場"（例 2.2），曲線 $\gamma(t)$ が，時刻 t とともに移動する人の運動と思うとき，式 (3.9) で表される 1 変数関数はどのようなものか，説明しなさい.

4. チェイン・ルール

4.1 行列とベクトルの演算

2 変数，3 変数の関数を扱う際に必要なベクトル・行列 [1] の演算をまとめておく．ここでは数（**スカラ**）は実数とする．

数を n 個横に並べたものを n 次**行ベクトル**，縦に並べたものを n 次**列ベクトル**という [2]．たとえば

$$(1,2), \qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad (1,2,3), \qquad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

はそれぞれ 2 次行ベクトル，2 次列ベクトル，3 次行ベクトル，3 次列ベクトルである．この講義では，ベクトルを通常**列ベクトルの形**に表し，一つの文字で表すときは，ローマ文字の太字を用いる：

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = {}^t(x_1,x_2), \qquad {}^t\boldsymbol{x} = (x_1,x_2).$$

ここで ${}^t(*)$ は，行（列）ベクトルの各成分を縦（横）に並べ直す操作（**転置**）を表す [3]．一方，第 3 回の (3.6) のように全微分は行ベクトルを用いて表す．行ベクトルと列ベクトルの**積**を次のように定める（順番に注意）：

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2, \quad (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

高等学校で学んだベクトルの内積は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ と表すことができる．

数を 2×2 (3×3) の正方形にならべたものを 2 次（3 次）**正方行列**という [4]．以下簡単のために次数を 2 に限るが，3 次の場合も想像してほしい．

ここでは，正方行列を表すのにローマ文字の大文字を用いる．行列 A を

---

[*] 2018 年 5 月 7 日/11 日

[1] ベクトル：a vector, 英語の発音から “ヴェクタ” と読むべきな気がする．行列：a matrix, matrices. 行列の一般論や詳細は「線形代数学第一」で扱う．

[2] スカラ：a scalar; 行ベクトル：a row vector; 列ベクトル：a column vector.

[3] 転置：transposition.

[4] 正方行列：a square matrix.

$$\text{(4.1)}\qquad A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) \qquad \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\alpha_1 = (a_{11},a_{12})\\ \alpha_2 = (a_{21},a_{22})\end{pmatrix}$$

と書くとき，第一行の右辺の式を行列 A の**列ベクトルへの分解**，第二行の式を**行ベクトルへの分解**という．

正方行列 A を (4.1) のように表すとき，これに列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 行ベクトル ξ を掛ける演算を次のように定義する：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\alpha_1\boldsymbol{x}\\ \alpha_2\boldsymbol{x}\end{pmatrix}, \qquad \xi A = (\xi\boldsymbol{a}_1, \xi\boldsymbol{a}_2).$$

これを用いて正方行列 A と B の積を次のように定める：

$$AB = \begin{pmatrix}\alpha_1\boldsymbol{b}_1 & \alpha_1\boldsymbol{b}_2\\ \alpha_2\boldsymbol{b}_1 & \alpha_2\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix} \qquad \left(A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix},\ B = (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\right).$$

正方行列と列ベクトルの積は列ベクトル，行ベクトルと正方行列の積は行ベクトル，正方行列と正方行列の積は正方行列である．

2 次正方行列 A に対して

$$\text{(4.2)}\qquad AA^{-1} = A^{-1}A = E \qquad \left(E := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

をみたす正方行列 A^{-1} が存在するとき，A は**正則行列である**といい，A^{-1} を A の**逆行列**という．ここで E は 2 次の**単位行列**といい，次の性質を満たす [5]：任意の 2 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$，2 次行ベクトル ξ, 2 次正方行列 A に対して

$$\text{(4.3)}\qquad E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \qquad \xi E = \xi, \qquad EA = AE = A.$$

式 (4.1) の形の A に対して

$$\text{(4.4)}\qquad \det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定まるスカラ $\det A$ を A の**行列式**とよぶ [6]．行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ であり，このとき，A^{-1} は次のように表される．

$$\text{(4.5)}\qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

---

[5] 正則行列：a regular matrix; 逆行列：the inverse matrix; 単位行列：the identity matrix.

[6] 行列式: determinant.

4.2 方向微分

ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ を，ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y)$ に対して数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x,y)$ を対応させる規則だと見なす[7]．例 3.22 の (1) で挙げた，点 $P = {}^t(a,b)$ を出発して一定の速度 $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ で動く点の運動 $\gamma(t)$ を考えよう：

$$\gamma(t) = P + t\boldsymbol{v} = {}^t\bigl(a + v_1 t, b + v_2 t\bigr).$$

定義 4.1. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が，点 $P = (a,b) \in D$ において $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)$ 方向に**方向微分可能**であるとは，1 変数関数

$$F(t) := f(a + v_1 t, b + v_2 t) = f(P + t\boldsymbol{v})$$

が $t = 0$ で微分可能となることである．このとき，微分係数 $F'(0)$ を f の P における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**といい[8]，どんなベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分可能なとき，f は P で**方向微分可能**という．

命題 3.23 から次がわかる：

命題 4.2. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $P = (a,b) \in D$ で微分可能ならば f は P で方向微分可能である．とくに $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は次で与えられる：

$$(df)_P \boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) v_2 \qquad \Bigl(\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2)\Bigr). \tag{4.6}$$

■ 勾配ベクトル 点 P を含む領域で定義された微分可能な関数 f に対して

$$\operatorname{grad} f_P := \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} = {}^t\bigl((df)_P\bigr)$$

で定まるベクトルを f の P における**勾配ベクトル**という[9]．これを用いると，方向微分 (4.6) は内積 “$\cdot$” を用いて

$$(df)_P \boldsymbol{v} = \bigl(\operatorname{grad} f_P\bigr) \cdot \boldsymbol{v}$$

と表すことができる．勾配ベクトル $\operatorname{grad} f_P$ が零ベクトルでないとき，このベクトルは P を通る f の等高線に垂直な方向を与えている（問題 4-4）．

[7] 関数の定義域の点の座標は行ベクトルで表したが，これからしばらくの間は列ベクトルで表すことにする．
[8] 方向微分：the directional derivative.
[9] 勾配ベクトル：the gradient vector.

4.3 合成関数の微分 (チェイン・ルール)

曲線に沿う微分の公式（命題 3.23）と偏微分の意味から直ちに次のことがわかる：

定理 4.3 (チェイン・ルール[10])**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ と，2 つの 2 変数関数

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

がともに微分可能であるとき[11]，2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)$$

は微分可能で，次が成り立つ：

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta).$$

注意 4.4. 物理学や工学では，定理 4.3 の $\tilde{f}(\xi,\eta)$ のことを $f(x,y)$ と同じ f を用いて $f(\xi,\eta)$ のように表すことがある．文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である．このとき (適当に省略して) 定理 4.3 の結論を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と表すことができる．さらに，従属変数に名前をつけて

$$z = f(x,y) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr) = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

と表して次のように書くこともできる：

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

■ $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とその微分 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ を考える．これは D の各点 (x,y) に対して $\mathbb{R}^2$ の要素 $F(x,y)$ を対応させる対応の規則である．$F(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の要素だから，それを (ξ,η) と書けば，各 ξ, η は (x,y) の関数だから，写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ とは領域

[10] チェイン・ルール：the chain rule.
[11] ξ: xi; η: eta. ギリシア文字 ξ, η, ζ (zeta) はしばしばローマ文字 (x,y,z) の対応物として使われる．

$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 個の関数の組とみなすことができる：

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longmapsto \bigl(\xi(x,y), \eta(x,y)\bigr) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.7}$$

このとき，2 つの 2 変数関数 $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ を F の**成分**とよぶ[12]．式が長くなるのを避けるために，ベクトル記法を用いて

$$\boldsymbol{\xi} = F(\boldsymbol{x}) \qquad \bigl(\boldsymbol{\xi} = (\xi,\eta),\ \boldsymbol{x} = (x,y)\bigr)$$

などと書くことがある．写像 $F = (\xi,\eta)\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ が C^k**-級** であるとは[13]，各成分 ξ, η が C^k-級 (26 ページ）となることである．

定義 4.5. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^1-級写像 $F = (\xi,\eta)\colon D \to \mathbb{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

で与えられる 2 次正方行列を F の**微分**または**ヤコビ行列** という[14]．

■ 合成写像・逆写像とその微分 領域 D, $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^2$，$G\colon U \to \mathbb{R}^2$ が，任意の $\boldsymbol{x} = (x,y) \in D$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \in U$ をみたすとき，

$$G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto G\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

で与えられる写像 $G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を F と G の**合成写像**[15] という．

命題 4.6. 上の状況で，F, G がともに C^1-級ならば

$$d(G \circ F) = dG\,dF, \qquad \text{すなわち} \qquad d(G \circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr)\,dF(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ただし右辺の積は行列の積を表す．

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対してそれ自身を対応させる写像

$$\mathrm{id}_D\colon D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{id}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in D$$

を D 上の**恒等写像**[16] という．領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ から $U \subset \mathbb{R}^2$ への写像 $F\colon D \to$

[12] 写像：a map；成分: components.
[13] 本来なら微分可能性から定義していくべきだが，簡単のため C^k-級の概念だけを定義しておく．こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない．
[14] 微分：the differential；ヤコビ行列：the Jacobian matrix；ヤコビ：Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851, D).
[15] 合成：the composition.
[16] 恒等写像：the identity map；定義域 D が文脈より自明な場合は，id_D を単に id と書く場合がある．

U に対して，$G \circ F = \mathrm{id}_D$, $F \circ G = \mathrm{id}_U$ をみたす写像 $G\colon U \to D$ が存在するとき，G を F の**逆写像**といい，$G = F^{-1}$ と書く[17]．

例 4.7. 領域

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$$

に対して

$$F\colon D \ni (r,\theta) \longmapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U,$$
$$G\colon U \ni (x,y) \longmapsto G(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\right) \in D$$

とすると $G = F^{-1}$, $F = G^{-1}$ である．実際, $(r,\theta) \in D$ に対して $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\mathrm{Tan}^{-1}\tan\theta = \theta$（定義 1.6 参照）だから，$r > 0$ に注意すれば

$$G \circ F(r,\theta) = G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}, \mathrm{Tan}^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)$$
$$= (r, \mathrm{Tan}^{-1}\tan\theta) = (r,\theta) = \mathrm{id}_D(r,\theta).$$

一方，$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}(y/x)$ とすると，逆正接関数の定義から $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta > 0$．したがって，$x > 0$ に注意して

$$\cos\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$$
$$= \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} = \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

これらから $F \circ G(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x,y) = \mathrm{id}_U(x,y)$. ♢

注意 4.8. 座標平面上の点 (x,y) に対して例 4.7 のように $(r,\theta) = G(x,y)$ と定めるとき, (r,θ) を座標平面の**極座標**という．これに対して，(x,y) を**直交座標系** あるいは **デカルト座標系**という[18]．

[17] 逆写像：the inverse map; F^{-1}: the inverse of F/F-inverse;
[18] 極座標：the polar coordinate system; 直交座標系：the orthognonal cooridnate system; デカルト座標系：the Cartesian coordinate system; デカルト：: Descartes, René (Renatus Cartesius; 1596–1650).

例 4.7 の表示では，(x,y) 平面の右半分しか極座標で表示できないが，通常は次のように平面のほぼ全体を表せるように拡張する：領域

$$\widetilde{D}=\{(r,\theta)\,|\,r>0,-\pi<\theta<\pi\},\quad \widetilde{U}=\{(x,y)\,|\,y\neq 0 \text{ または } x>0\}$$

を考え，$h\colon \widetilde{U}\to\mathbb{R}$ を

$$h(x,y):=\begin{cases}\operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x} & (x>0)\\ -\operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{x}{y}+\dfrac{\pi}{2} & (x\leqq 0, y>0)\\ -\operatorname{Tan}^{-1}\dfrac{x}{y}-\dfrac{\pi}{2} & (x\leqq 0, y<0)\end{cases}$$

と定め [19]，

$$\widetilde{F}\colon \widetilde{D}\ni(r,\theta)\longmapsto \widetilde{F}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\widetilde{U},$$
$$\widetilde{G}\colon \widetilde{U}\ni(x,y)\longmapsto \widetilde{G}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2},h(x,y)\right)\in\widetilde{D}$$

とおけば $\widetilde{F}=\widetilde{G}^{-1}$, $\widetilde{G}=\widetilde{F}^{-1}$ となる．座標平面上の点 (x,y) に対応する $(r,\theta)=\widetilde{G}(x,y)$ を (x,y) の極座標という．

命題 4.9. 写像 $F\colon\mathbb{R}^2\supset D\to U\subset\mathbb{R}^2$ が逆写像 $G=F^{-1}$ をもち，F，F^{-1} ともに C^1-級ならば，

$$dF^{-1}=(dF)^{-1}\qquad \text{すなわち}\qquad d(F^{-1})\big(F(\boldsymbol{x})\big)=\big(dF(\boldsymbol{x})\big)^{-1}$$

が成り立つ．ただし右辺の “-1” は 正方行列の逆行列を表す.

証明. 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して，$F^{-1}\circ F=\mathrm{id}_D$ に命題 4.6 を適用すれば $dF^{-1}dF=E$, また $F\circ F^{-1}=\mathrm{id}_U$ に命題 4.6 を適用すれば $dFdF^{-1}=E$. したがって dF^{-1} は dF の逆行列である． □

■ 変数変換

例 4.10 (平面極座標とラプラシアン)**.** 例 4.7 の状況を考える：

(4.8) $$x=x(r,\theta)=r\cos\theta,\qquad y=y(r,\theta)=r\sin\theta.$$

このとき $F\colon(r,\theta)\mapsto(x,y)$ の微分（定義 4.5）は

(4.9) $$dF=\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},$$

[19] $h(x,y)$ は原点 $(0,0)$ と点 (x,y) を結ぶ平面上の有向線分が x 軸の正の部分と成す角を表している．この関数は，たとえば C や Fortran などでは `atan2(x,y)` という関数として実装されている．

だから，その逆写像 $G=F^{-1}$ の微分は，命題 4.9 と逆行列の公式 (4.5) から

(4.10) $$dG=\begin{pmatrix}r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{pmatrix}=(dF)^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix}$$

となる．したがって

(4.11) $$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

平面上の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

(4.12) $$\Delta z=\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を対応させる Δ を**ラプラス作用素**または**ラプラシアン**という（例 2.10）．いま，$f(x,y)$ を (4.8) によって (r,θ) の関数とみなしたとき，Δf を f の r,θ に関する偏導関数を用いて表そう．式 (4.11) を用いれば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos^2\theta f_{rr}-\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta}+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}\sin^2\theta f_r+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sin^2\theta f_{rr}+\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta f_r-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$$

なので，次を得る．

(4.13) $$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}.\qquad\diamondsuit$$

4.4 陰関数

領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数 $F(x,y)$ に対して，式 $F(x,y)=0$ は x と y の関係式である．これを “y について解く” ことができたとしよう：

$$F(x,y)=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad y=\varphi(x).$$

このとき，関係式 $F(x,y)=0$ は関数 $y=\varphi(x)$ を暗に表しているので，$y=\varphi(x)$ の**陰関数** [20] 表示という．

例 4.11. (1) $F(x,y)=2x-3y+5$ とすると，$F(x,y)=0$ は $y=\frac{1}{3}(2x+5)$ と書ける．また，同じ式は $x=\frac{1}{2}(3y-5)$ とも書ける．

(2) $F(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと，関係式 $F(x,y)=0$ は y について解

[20] 陰関数：an implicit function.

けない．しかし，F の定義域を $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ に限ると

$$(x,y) \in U \text{ かつ } F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

と，y は x の関数とみなせる．同様に定義域を $U' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < 0\}$ に限れば，関係式は関数 $y = -\sqrt{1-x^2}$ を与える．また，定義域を $\{(x,y) | x > 0\}$ とすれば，$F(x,y) = 0$ は $x = \sqrt{1-y^2}$ と書ける． $\diamondsuit$

■ 陰関数定理　一般に $f(x,y) = 0$ が y についてとけるか否かを判定するのは難しいが，次の十分条件が知られている：

定理 4.12 (陰関数定理の特別な場合)**.** 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^k-級関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点 $(x_0, y_0) \in D$ をとる．もし，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立っているならば，P を含む領域 $U \subset D$ と，$\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^k-級の 1 変数関数 $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

$$(x,y) \in U \quad \text{かつ} \quad F(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in I \quad \text{かつ} \quad y = \varphi(x).$$

とくに各 $x \in I$ に対して $F\bigl(x, \varphi(x)\bigr) = 0$ が成立する．

定理の結論は，P の十分近くで，$F(x,y) = 0$ が y について解けることを表している．また，定理 4.12 で変数 x と y の役割を取り替えれば，$F_x(P) \neq 0$ ならば P の近くで $F(x,y) = 0$ は x について解けることもわかる．

変数の個数が多いときも同様の性質が成り立つ．

例 4.13. $\mathbb{R}^3$ で定義された 3 変数関数 $F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ は C^∞-級である．点 $P = (0,0,1)$ は $F(P) = 0$ をみたしているが，さらにまた $F_z(P) = 2 \neq 0$ が成り立つ．このとき，$U := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$，$V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ とすると，

$$F(x,y,z) = 0 \text{ かつ } (x,y,z) \in U \Leftrightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ かつ } (x,y) \in V$$

となる．すなわち $F(x,y,z) = 0$ は z について解ける．集合 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, F(x,y,z) = 0\}$ は $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面だが，関係式を z について解いて，“北半球” のグラフ表示が得られたことになる [21]． $\diamondsuit$

[21] 球面：a sphere; これは球の表面を表す．中身の詰まった球は，単に球 a ball，あるいは球体という．北半球：the Northern Hemisphere.

■ なめらかな曲線　領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 F に対して，集合 $C = \{(x,y) \in D \,|\, F(x,y) = 0\}$ を考える．点 $P \in C$ に対して，P を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 U をうまくとれば，共通部分 $C \cap U$ が C^∞-級関数のグラフと合同となるとき，C は P の近くで**なめらかな曲線** [22] であるということにする．各点の近くでなめらかな曲線であるとき C を単に**なめらかな曲線**であるという．

例 4.14. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ は原点を中心とする半径 1 の円 [23] となるが，これはなめらかな曲線である．実際，点 $P \in C$ は

$$U_1 := \{(x,y) \,|\, y > 0\}, \qquad U_2 := \{(x,y) \,|\, y < 0\},$$
$$U_3 := \{(x,y) \,|\, x > 0\}, \qquad U_4 := \{(x,y) \,|\, x < 0\}$$

のいずれかの要素となるが，各 $j = 1,2,3,4$ に対して $C \cap U_j$ は C^∞-級関数 $\sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$ のグラフと合同である． $\diamondsuit$

定理 4.12 から次がすぐにわかる：

命題 4.15. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 F に対して $C := \{(x,y) \in D \,|\, F(x,y) = 0\}$ とおく．各 $P \in C$ で $(dF)_P \neq (0,0)$ ならば C はなめらかな曲線である．

例 4.16. 関数 $F(x,y) := 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$ に対して

$$dF_{(x,y)} = \bigl(4x(1 - x^2 - y^2), -4y(1 + x^2 + y^2)\bigr)$$

だから $dF_{(x,y)} = (0,0)$ となるのは $(x,y) = (0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ のときのみである．とくに $F(\pm 1, 0) \neq 0$，$F(0,0) = 0$ なので，$C = \{(x,y) \,|\, F(x,y) = 0\}$ は $(0,0)$ の近くをのぞいてなめらかな曲線である．この曲線は**レムニスケート** [24] とよばれる（問題 4-9 の $a = 0$ の場合）． $\diamondsuit$

■ 陰関数の微分法

命題 4.17. 定理 4.12 の状況で $F(x,y) = 0$ が $y = \varphi(x)$ の陰関数表示となっているとき，次が成り立つ：

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \qquad \bigl(y = \varphi(x)\bigr).$$

[22] なめらかな曲線：a smooth curve.
[23] 円：a circle; 原点を中心とする半径 1 の円：the circle centered at the origin with radius 1.
[24] レムニスケート：the lemniscate.

証明． 恒等式 $F(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分すると，命題 3.23（定理 4.3）により

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dx}F\bigl(x,\varphi(x)\bigr)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx}\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{d\varphi(x)}{dx}.\end{aligned}$$

定理 4.12 の仮定から，考えている点の近くで $F_y\neq 0$ だから結論を得る． □

命題 4.17 の結論の式を次のように書くこともある：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

同様に，$F(x,y)=0$ が $x=\psi(y)$ の陰関数表示で，$F_x\neq 0$ であるとき，

$$\frac{d\psi}{dy}(y)=-\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}\quad\bigl(x=\psi(y)\bigr)\quad\text{すなわち}\quad\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}.$$

問　　題　　4

4-1 命題 4.2 を確かめなさい．

4-2 平面上の点 (x,y) における標高が，多項式 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くとき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる経路上の部分を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は例 3.22 の (2) である．

4-3 点 $P=(a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．このとき，f の点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分 $(df)_P(\boldsymbol{v})$ が最大になるのは $\boldsymbol{v}$ が $(\mathrm{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント：$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであることに注意．

4-4 点 $P=(a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．点 P を通る f の等高線を $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(\gamma(0)=P)$ とパラメータ表示するとき，$t=0$ における γ の速度ベクトル $\dot\gamma(0)$ は $(\mathrm{grad}\,f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，“等高線は勾配ベクトルに直交する”．

4-5 定数 $c\ (\neq 0)$ に対して $\xi=x+ct,\ \eta=x-ct$ により変数変換 $(t,x)\mapsto(\xi,\eta)$ を定める．このとき，C^2-級関数 $f(t,x)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}$$

となることを確かめなさい．さらに，$f_{tt}-c^2f_{xx}=0$ を満たす C^2-級関数 f は，2 つの C^2-級の 1 変数関数 F,G を用いて $f(t,x)=F(x+ct)+G(x-ct)$ という形に書けることを示しなさい．

方程式 $f_{tt}=c^2f_{xx}$ を**波動方程式**という（例 2.12）．ここに述べたことを，“波動方程式のダランベールの解法[25]”という（第 2 回の問題 2-11）．

4-6 空間のスカラ場 $f(x,y,z)$ に対して $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ を対応させる Δ を空間の**ラプラス作用素**という（第 2 回の問題 2-13）．空間の変数変換

$$x=r\cos\theta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad z=r\sin\varphi$$
$$\left(r>0,-\pi<\theta<\pi,-\tfrac{\pi}{2}<\varphi<\tfrac{\pi}{2}\right)$$

に対して

$$\begin{pmatrix}r_x&r_y&r_z\\\theta_x&\theta_y&\theta_z\\\varphi_x&\varphi_y&\varphi_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi&\sin\theta\cos\varphi&\sin\varphi\\-\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}&\frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}&0\\-\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi&-\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi&\frac{1}{r}\cos\varphi\end{pmatrix}$$

であることを確かめ，

$$\Delta f=f_{rr}+\frac{2}{r}f_r+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi}-\frac{1}{r^2}\tan\varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい．

4-7 $F(x,y)=x^2-y^3$ とするとき $F(x,y)=0$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ，この図形の形を描きなさい．

4-8 定理 4.12 の状況，すなわち $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\}$ の点 $P=(x_0,y_0)$ において $F_y\neq 0$ であり，P の近くで C がグラフ $y=\varphi(x)$ と表されているとする．このとき次を示しなさい：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

ただし，右辺の F_{xx} などは $(x,\varphi(x))$ における値を表す．

4-9 定数 a に対して $F(x,y)=2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2-a$，$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\}$ とおく．このとき C がグラフ $y=\varphi(x)$ と書けるような範囲を調べ，そこでの φ の増減，変曲点を調べ C の形を描きなさい（ヒント：a の値によって場合分けが起きる）．

4-10 $\mathbb{R}^3$ の領域 D 上で定義された C^∞ 級の 3 変数関数 $F(x,y,z)$ を用いて関係式 $F(x,y,z)=0$ を考える．とくに，点 $P=(a,b,c)$ において $F(P)=F(a,b,c)=0$ が成り立ち，さらに，P において F_x, F_y, F_z のいずれもが 0 でないとする．このとき，P の近くで $F(x,y,z)=0$ は x, y, z のいずれの変数についても解くことができる：

$$F(x,y,z)=0\qquad\Leftrightarrow\qquad x=\xi(y,z),\quad y=\eta(z,x),\quad z=\zeta(x,y).$$

点 P の近くで $F(x,y,z)=0$ が成り立っているとき，

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}(y,z)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial z}(z,x)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}(y,z)=-1\quad\text{すなわち}\quad\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

であることを確かめなさい．

[25] ダランベール：d'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783, F).

5. 重積分の考え方

5.1　1 変数関数の積分再論

まず，1 変数関数の定積分の定義を概観し，連続関数に関しては，それが高等学校で学んだ定義と同等であることを述べる．

■ **積分可能性**　閉区間 $[a,b]$ の**分割**とは，有限個の実数の列

$$\Delta = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_N\} \qquad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b)$$

のことである．分割 Δ の**幅**とは，次で定まる正の数のこととする [1]：

$$|\Delta| := \max\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}.$$

区間 $I = [a,b]$ 上の 1 変数関数 f と，区間 I の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して，次のように定める [2]：

$$\overline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j \Delta x_j, \quad \underline{S}_\Delta(f) := \sum_{j=1}^{N} \underline{f}_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1} \tag{5.1}$$

$$\bar{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最大値”}),$$

$$\underline{f}_j := (\text{区間 } [x_{j-1}, x_j] \text{ での } f \text{ の “最小値”}).$$

定義 5.1. 区間 I で定義された関数 f が I で**積分可能** [3] である，とは I の分割 Δ の幅が 0 に近づくとき $\overline{S}_\Delta(f)$, $\underline{S}_\Delta(f)$ が同じ値に近づくことである．このとき，その値を区間 I における f の**積分**といい，次のように書く [4]：

$$\int_I f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b f(x)\,dx\right).$$

[*] 2018 年 5 月 14 日/21 日

[1] 最大値 $\max\{a_1, \dots, a_N\}$ は，数 $a_1, \dots, a_N$ のうち最大の値を表す．

[2] 関数 f は区間 $[x_{j-1}, x_j]$ で最大値（最小値）をとるとは限らないので，きちんと定義を述べるためには上限 the superimum（下限 the infinimum）という言葉を使う．これは微分積分学第二で扱う．本節では，主に連続関数の積分を扱う．定理 5.8 で述べるように閉区間で連続な関数はその区間で最大値・最小値をとるから，ここで最大値，最小値と言っても問題は生じない．

[3] 積分可能：integrable; 区間 I における f の積分：the integral of f on the interval I.

[4] ここでの定義では $a < b$ が仮定されている．1 変数関数の積分は，下端と上端の大小が逆転している場合も考えるのが普通なので，それを含め (5.2) で定義する．

例 5.2. 区間 $[0,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

を考える [5]．分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して各区間 $[x_{j-1}, x_j]$ には有理数も無理数も含まれるので

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 1(x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = 1, \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0,$$

したがって f は $[0,1]$ で積分可能でない．◇

例 5.3. 区間 $[-1,1]$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を考える．$[-1,1]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \dots, x_N\}$ に対して番号 $k = k(\Delta)$ を $0 \in [x_{k-1}, x_k]$ となるようにとると，f の最大値は，区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で 1，それ以外の小区間では 0 になる．また f の最小値は 0 だから，

$$\overline{S}_\Delta(f) = x_k - x_{k-1} \qquad \bigl(k = k(\Delta)\bigr), \qquad \underline{S}_\Delta(f) = 0.$$

ここで $0 < x_k - x_{k-1} \leqq |\Delta|$ だから，$|\Delta|$ をどんどん小さくしていくと $\overline{S}_\Delta(f)$ は 0 に近づく．したがって，f は $[-1,1]$ で積分可能で積分の値は 0．◇

■ **定積分とその性質**　関数 f が区間 $I = [a,b]$ で積分可能であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_I f(x)\,dx, \qquad \int_b^a f(x)\,dx := -\int_I f(x)\,dx \tag{5.2}$$

と書き f の**定積分** [6] という．定義から次がわかる．

補題 5.4. 区間 $I = [a,b]$ 上で積分可能な 2 つの関数 f, g が

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

をみたしているならば，次が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

[5] 脚注 2 で「主に連続関数を扱う」と述べたにもかかわらず，この関数は連続ではない．

[6] 定積分：the definite integral.

ここでは深入りしないが，定義から直接，次の事実を導くことができる：

補題 5.5 (積分の線型性). 関数 f, g が区間 $[a,b]$ で積分可能ならば，$f+g$, αf (α は定数) はそれぞれ $[a,b]$ で積分可能で，次が成り立つ：

$$\int_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

また，区間を分割することで次を示すことができる [7]：

補題 5.6. 数 a, b, c を含む閉区間で積分可能な関数 f に対して

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

区間を分割して積分の値を求めるには次のやり方が有効である

命題 5.7. 区間 $[a,b]$ の分割の列

$$\Delta^{[n]} : a = x_0^{[n]} < x_1^{[n]} < \dots < x_{N_n}^{[n]} = b \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

で $\lim_{n\to\infty} |\Delta^{[n]}| = 0$ をみたすものをとる．各番号 n と $j = 1, 2, \dots, N_n$ に対して $\Delta^{[n]}$ の第 j 番目の区間の点 $\xi_j^{[n]}$ をとる：$\xi_j^{[n]} \in [x_{j-1}^{[n]}, x_j^{[n]}]$. もし，関数 f が $[a,b]$ で積分可能なら

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{N_n} f(\xi_j^{[n]}) \left(x_j^{[n]} - x_{j-1}^{[n]} \right) \right) \tag{5.3}$$

が成り立つ.

証明. 式 (5.1) の定義から，式 (5.3) の右辺の和を S_n とおくと，

$$\underline{S}_{\Delta^{[n]}}(f) \leqq S_n \leqq \overline{S}_{\Delta^{[n]}}(f)$$

が成り立つ．ここで f の積分可能性と $|\Delta^{[n]}| \to 0$ の仮定から，この式の両辺は $n\to\infty$ としたとき f の $[a,b]$ での定積分の値に収束する. □

[7] 数 c が区間 $[a,b]$ の内部にある場合は，$[a,c]$ と $[c,b]$ の分割を合わせて $[a,b]$ の分割とすることで，等式を示すことができる（深入りはしない）．さらに a, b, c の大小関係が $a<c<b$ でない場合でも (5.2) の定義を用いれば，結論が成り立つことが容易に分かる.

■ **微積分学の基本定理**　区間 $I=[a,b]$ で定義された関数 f が I **で連続**または I **上の連続関数**である [8] とは，I の各点 α に対して $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ となることであった．これは

$$\alpha \text{ に収束する任意の数列 } \{x_n\} \text{ に対して} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) \tag{5.4}$$

が成り立つことと同値である．次は，高等学校で学んだ連続関数の重要な性質であるが，ここでは証明抜きに認めることにする [9]：

定理 5.8 (最大・最小値の存在). 閉区間 $I=[a,b]$ で定義された連続関数 f は I で最大値・最小値をとる．すなわち任意の $x \in I$ に対して $f(x) \leqq f(\alpha)$, $f(x) \geqq f(\beta)$ をみたす α, $\beta \in I$ が存在する.

以上の言葉のもと次の「連続関数の積分可能性定理」[10] が成り立つ：

定理 5.9. 閉区間 $I=[a,b]$ で定義された**連続関数** f は I で積分可能である.

ここで，f が連続ならば，その絶対値をとった関数 $|f|$ も連続だから，

系 5.10 (積分の三角不等式). 関数 f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続ならば，$|f|$ は積分可能で，次が成り立つ：

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

証明. $|f|$ の積分可能性は $|f|$ の連続性と定理 5.9 からわかる．さらに，不等式は $-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$ と補題 5.4 からしたがう. □

微積分学の基本定理（定理 5.11）は，本節での積分の定義と高等学校での積分の定義の関係を表す重要な定理である：

定理 5.11 (微積分学の基本定理). 区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数 f に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

とおくと F は I で微分可能で $F'(x) = f(x)$ が成り立つ.

[8] 連続：continuous, 連続関数：a continuous function.

[9] 後期の微分積分学第二で扱う.

[10] このことの証明は「連続性」という実数の性質によっている．実際，通常見られる証明では「閉区間で定義された連続関数の一様連続性」を用いるが，その証明には実数の連続性公理が必要である.

証明． 区間 $[a,b]$ の点 x と，$x+h$ が $[a,b]$ に入るような h をとると，補題 5.6 から

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

したがって，補題 5.5, 系 5.10 を用いれば

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_x^{x+h} f(x)\,dt\right| \\ &= \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\{f(t)-f(x)\}\,dt\right| \leqq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h}\bigl|f(t)-f(x)\bigr|\,dt\right|.\end{aligned}$$

ここで，0 に収束する数列 $\{h_n\}$ を x と $x+h_n$ が $[a,b]$ に含まれるようにとる．すると，t の関数 $g(t) := |f(t)-f(x)|$ は $I_n := [x, x+h_n]$ で連続だから，そこで最大値をとる．とくに $g(t_n) = |f(t_n)-f(x)| \geqq g(t)$ が各 $t \in I_n$ で成り立つような $t_n \in I_n$ が存在する．$t_n \in I_n$ だから $n \to \infty$ で $t_n \to x$．補題 5.4 から

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} g(t_n)\,dt\right| = \frac{1}{|h|}|h|g(t_n) = g(t_n).$$

ここで $n \to \infty$ とすると g の連続性から $g(t_n) \to g(x) = 0$ となるので，

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = 0. \qquad \square$$

■ 原始関数と積分（定積分）の計算　1 変数関数 f の**原始関数**[11] とは $F'(x) = f(x)$ となる関数 F のことである．

区間 I で定義された関数 f の 2 つの原始関数 F, G は $G(x) = F(x) +$ 定数をみたす．実際，$\bigl\{G(x)-F(x)\bigr\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ なので $G(x) - F(x)$ は I で定数である．すなわち，**区間 I で定義された関数 f の原始関数は，定数の差をのぞいてただ一つ定まる**．

命題 5.12. 区間 I で連続な関数 f には原始関数が存在する．

証明． 区間 I 内の点 a を一つ固定して $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ とおけばよい． $\square$

例 5.13. 関数 e^{-x^2} の原始関数は (定数の差をのぞき) $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ である． $\diamondsuit$

[11] 原始関数：the primitive

連続関数 f に対して，その原始関数が $F(x)$ であることを

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

と書く [12]．次は，高等学校では「定積分の定義」となっていたものである：

命題 5.14. 区間 I 上の f の一つの原始関数を F とするとき，I の点 a, b に対して次が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

■ 曲線の長さ（道のり）

命題 5.15. 区間 $[a,b]$ 上の C^1-級関数 f のグラフの長さ (弧長) は，

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

で与えられる．

証明． 区間 $[a,b]$ の分割 $\varDelta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ に対して点 $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_N, f(x_N))$ を結ぶ折れ線の長さは

$$I_\varDelta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1+\left(\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2}\,(x_j - x_{j-1})$$

で与えられる．ここで，平均値の定理から

$$\frac{f(x_j)-f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = f'(\xi_j) \qquad x_{j-1} < \xi_j < x_j$$

を満たす ξ_j が存在するから，

$$I_\varDelta = \sum_{j=1}^N \sqrt{1+(f'(\xi_j))^2}\,(x_j - x_{j-1}) \qquad (\varDelta_j = x_j - x_{j-1})$$

となる．ここで f が C^1-級だから $\sqrt{1+f'(x)^2}$ は連続なので，命題 5.7 より $|\varDelta| \to 0$ のとき $I_\varDelta$ は結論の積分に収束する． $\square$

系 5.16. パラメータ t により $\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ と表示された平面上の C^1-級曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

[12] “$+C$” と積分定数を書くこともある．

5.2　多変数関数の積分

ここでは，多変数（とくに 2 変数）関数の積分の定義を与える．以降，厳密な議論を行うには極限のきちんとした取り扱いが必要となるが，煩雑な議論はひとまずおいて，多変数関数の積分の定義と意味を学ぼう．

閉区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ に対して

$$\begin{aligned}[a,b]\times[c,d] &= \{(x,y)\,|\,x\in[a,b], y\in[c,d]\}\\ &= \{(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b, c\leqq y\leqq d\}\subset\mathbb{R}^2\end{aligned}$$

を $[a,b]$ と $[c,d]$ の**直積**という [13]．この集合は座標平面 $\mathbb{R}^2$ の長方形とその内部を表している．いま，区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割をそれぞれ

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\qquad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d \tag{5.5}$$

ととると，長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ は，mn 個の小さな長方形に分割される：

$$I=[a,b]\times[c,d]=\bigcup_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,n}}\Delta_{jk},\qquad \Delta_{jk}=[x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]$$

この分割の 2 つのことなる長方形は，たかだか境界にしか共通部分をもたない [14]．このような長方形の分割を Δ と書くとき，分割の**幅**とは

$$|\Delta|:=\max\{(x_1-x_0),(x_2-x_1),\dots,(x_m-x_{m-1}),(y_1-y_0),\dots,(y_n-y_{n-1})\}$$

で与えられる正の数のことである．

■ コンパクト集合　$\mathbb{R}^2$ の部分集合が **閉集合**であるとは，その補集合が開集合 (第 3 回参照) となることである [15]．連続関数 $f_1,\dots,f_n$ に対して

$$\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,f_1(x)\geqq 0,\dots,f_n(x)\geqq 0\}\subset\mathbb{R}^2$$

という形で表される集合は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．また，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が**有界**であるとは，十分大きい長方形 I をとれば $D\subset I$ となることである．$\mathbb{R}^2$ の有界な閉集合のことを**コンパクト部分集合**という [16]．

[13] 直積：the Cartesian product; 長方形：a rectangle.
[14]「たかだか」は「多くとも」の意味．少なくとも (at least) と対になる at most の訳語．
[15] 閉集合：a closed set；補集合：the comlement.
[16] 有界集合：a bounded set; コンパクト集合: a compact set．ここでの定義は，通常のコンパクト集合の定義とはことなるが，$\mathbb{R}^n$ の場合はこの性質をもつことがコンパクト性の必要十分条件である．

■ 長方形上の重積分　長方形 $I=[a,b]\times[c,d]$ で定義された関数 f と I の分割 (5.5) に対して，和

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_{j+1}-x_j)(y_{k+1}-y_k)$$

$$(\text{ただし }\xi_{jk}\in[x_{j-1},x_j],\ \eta_{jk}\in[y_{k-1},y_k])$$

を考える．幅 $|\Delta|$ を 0 に近づけるとき，(ξ_{jk},η_{jk}) のとり方によらずにこの和が一定の値に近づくとき，f は I で**積分可能**という．さらに，その極限値を長方形 I 上の f の**重積分**または**二重積分**といい [17]，次のように書く [18]：

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

■ コンパクト集合上の重積分　平面 $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合 D 上で定義された関数 f を考える．このとき，D を含む長方形 I をひとつとり，

$$\tilde f(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & \bigl((x,y)\in D\bigr)\\ 0 & \bigl((x,y)\notin D\bigr)\end{cases}$$

と定め，I 上での $\tilde f$ が積分可能であるときに f は D で**積分可能**である，といい

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_I \tilde f(x,y)\,dx\,dy$$

と書く．この値を f の D 上での重積分という [19]．

■ 面積確定集合　コンパクト部分集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で，定数関数 $f(x,y)=1$ が積分可能であるとき，D を**面積確定集合**,

$$|D|:=\iint_D dx\,dy \tag{5.6}$$

を D の**面積**という [20]．

[17] 二重積分：double integral; 多重積分：multiple integral.
[18] 習慣にしたがって積分記号 $\int$ を 2 つ並べるが，ひとつしか書かない場合もある．
[19] この重積分は，コンパクト集合 D を覆う長方形 I のとり方によらない．
[20] 面積確定集合：a measurable set; 面積：area.

■ **積分可能性**　コンパクト集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 f が**連続**である，とは D を含むある開集合 Ω 上で連続な関数 $\tilde{f}$ で，D 上で f と一致するものが存在すること，と定める．ここでは証明を与えないが，次のことは認めておきたい：

定理 5.17. $\mathbb{R}^2$ の面積確定なコンパクト部分集合 D 上で定義された連続関数 f は D で積分可能，である．

例 5.18. 平面の長方形領域 $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ は面積確定で $|I| = (b-a)(d-c)$ である．　◇

理論的な背景は準備不足ではあるが，以下に重積分の計算法を挙げる．重積分の意味がわかれば計算法は自明と思われる：

命題 5.19. 区間 $[a,b]$ で定義された (1 変数の) 連続関数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ が $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を満たしているとする．このとき，

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), a \leqq x \leqq b\}$$

とおく (図示せよ) と，これは $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合である．とくに，D は面積確定で，次が成り立つ：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx. \tag{5.7}$$

式 (5.7) の右辺の形（1 変数関数の定積分を 2 回繰り返す）を**累次積分**という [21]．式 (5.7) の累次積分は次のように書くこともある：

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

命題 5.19 が成り立つ理由． 実際，区間 $[a,b]$ の分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ をとると，その小区間 $[x_{j-1}, x_j]$ に対応する D の部分

$$D_j := \{(x,y) \in D \,|\, x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

における f の積分は，分割が十分に細かいときは

$$\left[\int_{\varphi(x_{j-1})}^{\psi(x_{j-1})} f(x_j, y)\,dy\right] \Delta x_j \qquad (\Delta x_j = x_j - x_{j-1})$$

で近似される．添字 j を動かしてこれらの和をとって $|\Delta| \to 0$ とすれば，1 変数関数の積分の意味から結論が得られる．　□

[21] 累次積分：an iterated integral.

例 5.20. 長方形 $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ を含む領域上の連続関数 $f(x,y)$ に対して，

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \quad \diamondsuit$$

例 5.21. コンパクト集合 $D = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leqq 1\}$ 上で関数 $f(x,y) = x^2$ を積分する：$D = \left\{(x,y) \,|\, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, -1 \leqq x \leqq 1\right\}$ なので，命題 5.19 から

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right] dx = 2\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\,dy\right] dx \\ &= 2\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

一方，$D = \left\{(x,y) \,|\, -\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}, -1 \leqq y \leqq 1\right\}$ と表し直せば

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right] dy = 2\int_{-1}^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2\,dx\right] dy \\ &= 2\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^3\right) dy = 4\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt{1-y^2}^3\right) dy = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

積分の順序を交換することで計算の手間が違ってくることに注意しよう．　◇

■ **多重積分**　同様に $\mathbb{R}^3$ のコンパクト部分集合 D 上での積分 (三重積分)，体積確定集合，体積，さらに一般に $\mathbb{R}^m$ 上の積分も定義される．たとえば，

- x 軸上の区間 $[a,b]$ に沿って横たわる棒の，点 x における線密度を $\rho(x)$ (kg/m) とすると，棒全体の質量は $\left(\int_a^b \rho(x)\,dx\right)$ kg.
- xy 平面上に，コンパクト集合 D の形に板が横たわっている．このとき 点 $(x,y) \in D$ における板の面密度を $\rho(x,y)$ (kg/m^2) とすると，板全体の質量は $\left(\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy\right)$ kg である．
- 空間のコンパクト集合 D の形の立体の点 $(x,y,z) \in D$ における密度が $\rho(x,y,z)$ (kg/m^3) ならば，立体の質量は $\left(\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right)$ kg.

問 題 5

5-1 高等学校の教科書では，関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

と定義することが多い．この定義を採用しなかった理由を挙げなさい．

5-2 楕円 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ について，

(1) E が囲む平面の部分の面積は πab であることを示しなさい．

(2) E の長さは次で与えられることを示しなさい：

$$4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt, \qquad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

(3) 地球の地軸を含む平面による切り口は，赤道方向に長軸，地軸方向に短軸をもつ楕円になる．赤道方向の半径は 6377.397km，極方向の半径は 6356.079km とするときこの楕円の周の長さの近似値を求めなさい．(ヒント：近似式 $\sqrt{1-x} \fallingdotseq 1 - \frac{x}{2}$ (x が小さいとき) を用いる.)

5-3 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第一象限の部分の 1 点を $P = (x, y)$ とする．$O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ とし，線分 OA, OP, および双曲線の弧 AP で囲まれた部分の面積を $t/2$ とするとき，P の座標 x, y を t で表しなさい．

5-4 放物線 $y = x^2$ の $0 \leqq x \leqq a$ に対応する部分の長さを求めなさい．

5-5 サイクロイド $\gamma(t) = \bigl(t - \sin t, 1 - \cos t\bigr)$ の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分と x 軸で囲まれる図形の面積， および弧の長さを求めなさい．

5-6 次の積分の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, $\quad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x + y \leqq 1, \\ x \geqq 0, y \geqq 0 \end{matrix}\right\}$,

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{y}\,dx\,dy$, $\quad D = \{(x, y) \,|\, 1 \leqq y \leqq x^2, 2 \leqq x \leqq 4\}$,

(3) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dx\,dy$, $\quad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq \pi, \\ 0 \leqq y \leqq \sin x \end{matrix}\right\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, $\quad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} x \geqq 0, y \geqq 0, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1 \end{matrix}\right\}$,

(5) $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, $\quad D = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \begin{matrix} x, y, z \geqq 0 \\ x + y + z \leqq 1 \end{matrix}\right\}$.

5-7 空間に半径 R の球体がある．中心からの距離 r における球体の (体積) 密度が $\rho = \rho(r)\mathrm{kg/m^3}$ で与えられるとき，球体の質量を ρ を用いて表しなさい．ただし ρ は $[0, R]$ で定義された連続関数である．

5-8 $\mathbb{R}^2$ の長方形 $I = [a, b] \times [c, d]$ を含む領域で定義された C^2-級関数 F に対して

$$\iint_I \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

であることを確かめなさい．

5-9 $\mathbb{R}^3$ 原点を中心とする半径 1 の球体 D の体積を $\displaystyle\iiint_D dx\,dy\,dz$ を計算することにより求めなさい．同様のことを $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ に対して行い，半径 1 の 4 次元球体，5 次元球体の “体積” を求めなさい．

5-10 座標空間の次の図形の体積を求めなさい．ただし a, b, c は正の定数である：

$$\left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1\right\}, \quad \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leqq 1\right\}$$

5-11 $\mathbb{R}^2$ の単位閉円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqq 1\}$ を含む領域で定義された 2 つの C^1-級関数 F, G に対して

$$\begin{aligned}&\iint_D \bigl(G_x(x, y) - F_y(x, y)\bigr)\,dx\,dy \\ &\qquad = \int_0^{2\pi} \Bigl(-F(\cos t, \sin t)\,(\sin t) + G(\cos t, \sin t)\,(\cos t)\Bigr)\,dt\end{aligned}$$

が成り立つことを確かめなさい．

一般に，曲線 $C: \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ $(a \leqq t \leqq b)$ と 2 変数関数 F, G に対して

$$\begin{aligned}&\int_C \Bigl(F(x, y)\,dx + G(x, y)\,dy\Bigr) \\ &\qquad := \int_a^b \left(F\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dx}{dt} + G\bigl(x(t), y(t)\bigr)\frac{dy}{dt}\right)\,dt\end{aligned}$$

を C に沿う $F\,dx + G\,dy$ の線積分という．閉円板の連続変形で得られる集合 $\widetilde{D}$ の境界がなめらかな曲線 C であるとき，次が成り立つ（証明は省略する)：

$$\iint_{\widetilde{D}} \bigl(G_x(x, y) - F_y(x, y)\bigr)\,dx\,dy = \int_C \Bigl(F(x, y)\,dx + G(x, y)\,dy\Bigr)$$

（グリーン・ストークスの定理)．これは命題 5.12 の 2 次元版である．

6. 重積分の変数変換

6.1　重積分の応用

重積分，多重積分は面積，体積などを求めるのに利用できる．ここでは厳密な扱いはせず「微小部分の面積，体積の総和」の極限が面積，体積であると信じて具体例の計算を行おう．

■ 面積　第 5 回（56 ページ）で見たように $\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D の面積とは，D 上で定数関数 1 を積分したものである．

例 6.1. $D = \{(x,y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ の面積 $|D|$ を求めよう．図形の対称性から

$$D' := \{(x,y) \mid \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$$

の面積 $|D'|$ を求めれば $|D| = 4|D'|$ である．

$$|D'| = \iint_{D'} 1\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3} dx = \int_0^1 \left[\sqrt{1-\sqrt[3]{y^2}}^3\right] dy = \frac{3\pi}{32}.$$

したがって求める面積は $3\pi/8$.　$\diamondsuit$

■ 体積（2 変数関数のグラフの下側）　一般に，$\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D を含む領域で定義された連続関数 f が負でない値をもつとき，

$$\Omega_f := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ 0 \leqq z \leqq f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

は，座標空間 $\mathbb{R}^3$ 内の，f のグラフと xy 平面にはさまれる部分である．この部分の体積を求めよう．D の点 (x,y) を一つの頂点とする D の小さな長方形 $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ と，この長方形上の $f(x,y)$ のグラフで囲まれた部分の体積は，$f(x,y)\Delta x \Delta y$ で近似されるので，考えている図形の体積は次で与えられる：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

[*] 2018 年 5 月 21 日/25 日

例 6.2. 関数

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \qquad (a, b \text{ は正の定数})$$

のグラフと xy 平面で囲まれた部分の体積を求めよう．$f(x,y)$ は

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\}$$

上で負でない値をとっている．したがって，考えている図形の体積は

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi ab$$

であることがわかる．　$\diamondsuit$

■ 体積　平面図形の面積と同様に，$\mathbb{R}^3$ の体積確定集合 Ω の**体積**とは [1]，Ω 上で定数関数 1 を積分したものである．

例 6.3. 空間の部分集合 $D = \{(x,y,z) \mid z^2 \leqq 4x, y^2 \leqq x - x^2\}$ の体積 $|D|$ を求めよう．平面の部分集合 $D' = \{(x,y) \mid y^2 \leqq x - x^2\}$ に対して

$$\begin{aligned}|D| &= \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{D'} dx\,dy \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dz \\ &= \iint_{D'} 4\sqrt{x}\,dx\,dy = \cdots = \frac{32}{15}.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

■ 曲面の面積　グラフ $z = f(x,y)$ $((x,y) \in D)$ の面積を求めよう．ただし D は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合で，f は D 上で C^1-級とする．

集合 D 内の小さな長方形 $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ 上のグラフは，3 点

$$P = \bigl(x, y, f(x,y)\bigr),$$
$$Q = \bigl(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)\bigr), \qquad R = \bigl(x, y+\Delta y, f(x, y+\Delta y)\bigr)$$

を頂点にもち PQ, PR を 2 辺にもつ平行四辺形に近い．この微小平行四辺形の面積は，空間ベクトルの外積 (ベクトル積) を用いて

[1] 体積：volume; ここでは $\mathbb{R}^3$ の体積確定集合の定義をきちんとはしていないが，$\mathbb{R}^2$ における面積確定集合，重積分の定義から想像してもらえばよい．

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}| \\
&= |(\Delta x, 0, f(x+\Delta x, y) - f(x,y)) \times (0, \Delta y, f(x, y+\Delta y) - f(x,y))| \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right)^2}\,\Delta x \Delta y \\
&\fallingdotseq \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\,\Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

と書けるので，この総和をとれば，求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\,dx\,dy \tag{6.1}$$

で求められる．

例 6.4. 関数 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ のグラフの，$D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ に対応する部分の面積を求めよう．式 (6.1) から，求める面積は

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$$

である．これを計算すると，求める面積は

$$\frac{1}{18}\left(6\bigl(\sqrt{3} + \log(7+4\sqrt{3})\bigr) - \pi\right) = 1.28\dots$$

である． ♢

6.2 変数変換

■ 置換積分法の公式（一変数） 一変数関数の置換積分法[2] の公式は高等学校で学んだ．ここでは，変数変換が増加関数で与えられる特別な場合に，公式を述べておこう：

定理 6.5 (置換積分法)**.** 区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f と，区間 $[\alpha,\beta]$ を含む開区間で定義された単調増加な C^1-級関数 φ で $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ をみたすものをとる．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(u)\bigr)\,\varphi'(u)\,du \tag{6.2}$$

が成立する[3]．

[2] 置換積分法：integration by substitution.

[3] 変数変換 φ に C^1-級の仮定を付けたのは，式 (6.2) の右辺の被積分関数が連続関数となるためである．

注意 6.6. 変数変換を $x = x(u) = \varphi(u)$ と書いて，式 (6.2) の右辺を

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(x(u)\bigr)\frac{dx}{du}\,du$$

と書くと覚えやすい．

置換積分法の公式（定理 6.5）が成り立つ理由の説明. 公式 (6.2) の証明は高等学校で学んだ．合成関数の微分公式を用いて原始関数を求める方法のはずだが，連続関数の積分可能性と微積分の基本定理を認めれば，厳密な証明である．

ここでは，さらに別の説明を与える．多重積分の変数変換の公式を考える際には，微積分の基本定理が直接適用できないので，積分の定義に沿った理解が必要だからである．

区間 $[\alpha,\beta]$ の分割 $\Delta : \alpha = u_0 < u_1 < \cdots < u_N = \beta$ をとり，$x_j = \varphi(u_j)$ $(j = 0,1,\dots,N)$ とおけば，φ が単調増加であることから $\Delta' : x_0 < x_1 < \cdots < x_N$ は区間 $[a,b]$ の分割となる．

いま，一つの小区間 $[u_{j-1}, u_j]$ に着目すると，φ' はこの区間で連続だから，最小値・最大値をとる．そこで，φ' が $\underline{\eta}_j, \overline{\eta}_j \in [u_{j-1}, u_j]$ でそれぞれ最小値・最大値をとるとすると，補題 5.4 から

$$\begin{aligned}
&x_j - x_{j-1} = \varphi(u_j) - \varphi(u_{j-1}) = \int_{u_{j-1}}^{u_j} \varphi'(u)\,du \leqq \varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}), \\
&x_j - x_{j-1} \geqq \varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1})
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \leqq x_j - x_{j-1} \leqq \varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \tag{6.3}$$

を得る．この式は，小区間の幅 $u_j - u_{j-1}$ と，対応する小区間の幅 $x_j - x_{j-1}$ の比が $1 : \varphi'$ であることを示している（$\varphi'(*)$ の $*$ は明示していないが，区間 $[u_{j-1}, u_j]$ の中の値である.）

以上の状況で，$g(u) := f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)$, $\underline{\xi}_j = \varphi(\underline{\eta}_j)$, $\overline{\xi}_j = \varphi(\overline{\eta}_j)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
g(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) &= f(\underline{\xi}_j)\varphi'(\underline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \leqq f(\underline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}), \\
g(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) &= f(\overline{\xi}_j)\varphi'(\overline{\eta}_j)(u_j - u_{j-1}) \geqq f(\overline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}).
\end{aligned}$$

したがって

$$\underline{S}_\Delta(g) \leqq \sum_{j=1}^N f(\underline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1}), \qquad \overline{S}_\Delta(g) \geqq \sum_{j=1}^N f(\overline{\xi}_j)(x_j - x_{j-1})$$

となる．

いま (6.3) から $|\Delta| \to 0$ ならば $|\Delta'| \to 0$ である．さらに，仮定から f, g はともに連続なので，積分可能性から，これらの不等式の各辺は，$|\Delta|$ を 0 に近づけると，それぞれ g, f の積分に近づく．したがってこれらの積分の値は等しい． □

■ 線形変換と面積　置換積分法の公式 (6.2) の右辺に φ' がかかるのは，$[a,b]$ の微小区間の幅と，対応する $[\alpha,\beta]$ の微小区間の幅の比が φ'（式 (6.3)）だからである．

このことから，変数変換による微小な図形の面積の変化を調べれば重積分の変数変換公式が得られることが想像できる．そこで，まず，線形変換による面積比の公式を思い出そう：$\mathbb{R}^2$ の各要素 $\boldsymbol{x}$ を列ベクトルとみなし（第 4.1 節参照），$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$L_A\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \qquad (A \text{ は 2 次の正方行列})$$

を考える．このような写像を $\mathbb{R}^2$ の**線形変換**[4] という．行列 A が正則（38 ページ参照）であるとき L_A を**正則な線形変換** とよぶ．

補題 6.7. 正則な線形変換は 1 対 1 の写像である．

証明． 正則な線形変換 L_A が $L_A(\boldsymbol{p}) = L_A(\boldsymbol{q})$ をみたしているとすると，$A\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{q}$ だから両辺に A^{-1} を左からかけると $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$ となる．□

補題 6.8. 線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の直線の像は直線または一点である．とくに L_A が正則ならば直線の像は直線になる．

証明． 異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線 l の像を調べよう．P, Q の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると直線 l は

$$l = \{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

と表される．ここで，行列の積の性質から

$$L_A\bigl((1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}\bigr) = (1-t)A\boldsymbol{p} + tA\boldsymbol{q}$$

なので，l の L_A による像は

$$l' = \{(1-t)\tilde{\boldsymbol{p}} + t\tilde{\boldsymbol{q}} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \qquad \tilde{\boldsymbol{p}} = A\boldsymbol{p}, \quad \tilde{\boldsymbol{q}} = A\boldsymbol{q}$$

とかける．とくに $\overrightarrow{OP'} = \tilde{\boldsymbol{p}}$, $\overrightarrow{OQ'} = \tilde{\boldsymbol{q}}$ となる点 P', Q' をとると (1) $P' \neq Q'$ のとき，l' は P', Q' を通る直線となる．(2) $P' = Q'$ のとき l' は 1 点 P' からなる集合である．さらに L_A が正則な線形変換なら，補題 6.7 から (2) のケースは起こりえない．□

補題 6.9. 正則な線形変換 L_A による $\mathbb{R}^2$ の平行な 2 直線の像は平行な 2 直線である．

[4] 線形変換：a linear transformation.

証明． 平行な 2 直線の像は 2 つの直線であるが，これらが交わるとすると L_A が 1 対 1 であることに反する．□

補題 6.10. 直線 l 上の異なる 2 点 P, Q をとっておく．直線 l にない 2 点 R, S が直線 l の同じ側にあるための必要十分条件は，$\det(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})$ と $\det(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ})$ が同じ符号をもつことである．ここで $\mathbb{R}^2$ のベクトルは列ベクトルとみなし，det は 2 つの 2 次列ベクトルを並べてできる行列の行列式（38 ページ参照）を表す．

証明． ${}^t(a,b) = \overrightarrow{PQ}$ とおき，$\boldsymbol{n} = {}^t(-b,a)$ とすると，(1) $\det(\overrightarrow{PQ}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ である．ただし右辺は $\mathbb{R}^2$ の内積を表す．(2) $\boldsymbol{n}$ は直線 l に直交する零でないベクトルである．

直線 l 上にない点 R が，直線 l の $\boldsymbol{n}$ が指し示す側にあるための必要十分条件は $\overrightarrow{PR}$ と $\boldsymbol{n}$ が鋭角をなすことである：$(\overrightarrow{PR}, \boldsymbol{n}) > 0$．このことと (1) から結論が得られる．□

補題 6.11. 線形変換 L_A によって，$\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部は $\mathbb{R}^2$ の平行四辺形とその内部，または線分に移る．とくに L_A が正則ならば平行四辺形の像は平行四辺形である．

証明． 簡単のため L_A が正則であるとし，平行四辺形 $PQRS$ の像を求める：$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ とすると，線分 PQ は $\{(1-t)\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \,|\, 0 \leqq t \leqq 1\}$ となるので，その像は線分 P', Q' となる．ただし P', Q' はそれぞれ L_A による P, Q の像．各辺に対して同様のことを考えれば，平行四辺形の像が平行四辺形となることがわかる．さらに，平行四辺形の内部は 4 つの辺を含む直線の一方の側の共通部分なので，補題 6.10 から結論を得る (すこし端折った)．□

補題 6.12. 平行四辺形 $PQRS$ の面積は $|\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ である．ただし $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR}$ で，これらを 2 次の列ベクトルとみなしている．

証明． ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると，求める面積は

$$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,|\sin\theta| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}. \tag{6.4}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．ここで $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, b_2)$ とおいて (6.4) を計算すれば結論を得る．□

補題 6.13. 線形変換 L_A による平行四辺形 D の像の面積は，$|\det A|\,|D|$ である．ただし $|D|$ は D の面積である．

証明． 平行四辺形 $D = PQRS$ の頂点 P, Q, R の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$,

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}$$

とおく．P, Q, R の L_A による像をそれぞれ P', Q', R' と書くと，

$$\overrightarrow{P'Q'} = A\boldsymbol{q} - A\boldsymbol{p} = A(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{a}, \qquad \overrightarrow{P'R'} = A\boldsymbol{b}$$

であるから

$$|D'| = |\det(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b})| = \bigl|\det\bigl(A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\bigr)\bigr| = \bigl|\det A \cdot \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\bigr| = |\det A|\,|D|. \qquad \square$$

■ **2 変数の変数変換**　$\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset (u,v) \longmapsto F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^2$$

を考えると，微分可能性（定義 3.11 と定理 3.16 参照）[5] から，

$$\begin{aligned} &F(a+h, b+k) \\ &\quad = F(a,b) + \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}(h,k) \\ &\qquad\qquad |\boldsymbol{\varepsilon}(h,k)| \to 0 \qquad \bigl((h,k) \to (0,0)\bigr) \end{aligned}$$

と書ける．この ${}^t(h,k)$ の係数行列は，F の微分 dF またはヤコビ行列 (定義 4.5) である．このことから，(h,k) が十分小さいときは，近似式

$$\text{(6.5)} \quad \varPhi(h,k) := F(a+h, b+k) - F(a,b) \fallingdotseq \begin{pmatrix} x_u(a,b) & x_v(a,b) \\ y_u(a,b) & y_v(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

[5] 定義 3.11 は実数に値をとる関数の微分可能性の定義だが，各成分 $x(u,v)$, $y(u,v)$ が微分可能な関数なので，それらが定義の条件式をみたすことがわかる．とくに x, y に対応する "おつり" の項を ε_1, ε_2 とおいて $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とすれば，ここで与える式を得る．

記号． ヤコビ行列の行列式を

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

と書き，**ヤコビ行列式** という [6]．

近似式 (6.5) から次のことがわかる：

事実 6.14. 十分小さい $\varDelta u$, $\varDelta v$ に対して，uv-平面上の，点

$$(a,b), \quad (a+\varDelta u, b), \quad (a, b+\varDelta v), \qquad (a+\varDelta u, b+\varDelta v)$$

を頂点とする長方形を変数変換 $F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ で写した像は，

$$\begin{aligned} &\bigl(x(a,b), y(a,b)\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\varDelta u, y(a,b) + y_u(a,b)\varDelta u\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_v(a,b)\varDelta v, y(a,b) + y_v(a,b)\varDelta v\bigr), \\ &\bigl(x(a,b) + x_u(a,b)\varDelta u + x_v(a,b)\varDelta v, y(a,b) + y_u(a,b)\varDelta u + y_v(a,b)\varDelta v\bigr) \end{aligned}$$

を頂点とする平行四辺形に十分に近い．とくに，像の面積は

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \varDelta u \varDelta v$$

で近似される．ただし，この係数は，変数変換のヤコビ行列式の絶対値を表す．

■ **重積分の変数変換**　重積分は，考えている集合上の微小部分の面積と関数の値の積の総和の極限だから，変数変換による面積の関係（事実 6.14）から次が成り立つことがわかる：

定理 6.15 (重積分の変数変換)**.** $\mathbb{R}^2$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$(u,v) \longmapsto \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$$

によって，uv 平面上の面積確定集合 E が xy 平面上の面積確定集合 D と 1 対 1 に対応しているとき，D 上の連続関数 f に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

が成り立つ．

[6] ヤコビ行列式：the Jacobian.

例 6.16. 重積分

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} \qquad D := \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2, x \geqq 0\}$$

を求めよう（まずは，第 5 回でやったように計算してみよ）．座標変換

$$(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{6.6}$$

により集合

$$E := \left\{(r,\theta)\,\middle|\,1 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

は D に 1 対 1 に移される．変数変換 (r,θ) のヤコビ行列式は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

なので，定理 6.15 から

$$\int_D \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \int_E \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r\,dr}{1+r^2}\right] d\theta = \frac{\pi}{2}\log\frac{3}{2}$$

を得る．直接求めた値と比較せよ． ◇

注意 6.17. 例 6.16 で積分範囲を

$$D_1 := \{(x,y)\,|\,1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2\}, \qquad D_2 := \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 2\}$$

と拡張しよう．変数変換 (6.6) により，

$$E_1 := \{(r,\theta)\,|\,1 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\},$$
$$E_2 := \{(r,\theta)\,|\,0 \leqq r \leqq \sqrt{2}, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$$

は，それぞれ D_1, D_2 に「ほぼ 1 対 1」に移るが，D_1 上の x 軸の負の部分，D_2 上の原点には，重なりがある．しかし，この部分の面積は 0 なので積分に影響せず，変数変換

$$\iint_{D_j} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \iint_{E_j} \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} \qquad (j=1,2)$$

が成り立つ．

■ 多重積分の変数変換公式 同様に多重積分の変数変換の公式を次のように述べることができる：

定理 6.18 (多重積分の変数変換)**.** $\mathbb{R}^n$ の領域上で定義された C^1-級写像

$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto \bigl(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)\bigr)$$

によって，$\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 E がコンパクト集合 D に 1 対 1 に対応しているとき，D 上の連続関数 f に対して

$$\int\cdots\int_D f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$$
$$= \int\cdots\int_E f\bigl(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_n(u_1,\dots,u_n)\bigr)\,|J|\,du_1\,du_2\,\dots\,du_n$$

が成り立つ．ただし，

$$J := \frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)} = \det\begin{pmatrix} (x_1)_{u_1} & \dots & (x_1)_{u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n)_{u_1} & \dots & (x_n)_{u_n} \end{pmatrix}$$

である．

問　題　6

6-1 空間の集合

$$\Omega := \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1, y^2+z^2 \leqq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

の体積を求めなさい．

6-2 空間の原点を中心とする半径 $R\ (>0)$ の球面

$$S_R = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 = R^2\}$$

の，北極 $N = (0,0,R)$ とそれ以外の球面 S_R 上の点 P を結ぶ球面上の曲線のうち最短のものは，P を通る経線である．このことを既知として，N と P を結ぶ経線の長さを N と P の（球面）距離という．さらに，北極を中心とする半径 r の円とは，N との距離が r であるような球面上の点の集合のことと定める．以下，北極 N を中心とする半径 r の円を C_r と書く．

(1) C_r はどんな図形か．緯度，経度などの言葉を用いて説明しなさい．

(2) C_r の長さ L_r を r の式で表しなさい．(ヒント：平面の円とみなしたときの半径を求めれば良い)．

(3) C_r を境界にもつ球面 S_R の部分で，北極 N を含む部分の面積 A_r を r の式で表しなさい．ただし，$0 < r < \pi R/2$ とする．

(4) 次の極限値を求めなさい：$\displaystyle\lim_{r\to+0}\frac{L_r}{2\pi r}$, $\displaystyle\lim_{r\to+0}\frac{A_r}{\pi r^2}$.

6-3 xy 平面上の面積確定集合 D が上半平面 $\{(x,y)\,|\,y>0\}$ に含まれているとする．このとき，次のことを確かめなさい．

(1) xy 平面が座標空間に含まれているとみなす．D を x 軸の周りに一回転して得られる立体の体積は

$$2\pi\iint_D y\,dx\,dy$$

である．

(2) D の重心の座標は

$$\frac{1}{|D|}\left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right) \qquad \left(|D| = \iint_D dx\,dy\right)$$

である．

6-4 xy 平面上のなめらかな曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\bigl(f'(x)\bigr)^2}\,dx$$

で与えられることを確かめなさい．ただし，区間 $[a,b]$ 上で $f(x)>0$ であるとする．

6-5 xy 平面上の曲線 C が

$$C:\gamma(t) = \bigl(x(t), y(t)\bigr) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

とパラメータ表示されている．ただし $x(t)$, $y(t)$ は t の一変数関数として C^1-級で，区間 $[a,b]$ で $y(t)>0$ であるとする．このとき，次のことを確かめなさい．

(1) 曲線 C を x 軸の周りに一回転させて得られる曲面の面積は

$$2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられる．

(2) 曲線 C の重心の座標は

$$\frac{1}{L}\left(\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt, \int_a^b y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$
$$\left(L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\right)$$

で与えられる．

6-6 問題 5-6 の各々の積分を，次の変数変換を行うことによって求め，直接計算した結果と比較しなさい．

(1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

(2) $x=uv$, $y=v$.

(3) $x=u$, $y=v\sin u$.

(4) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

(5) $x=r\cos\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$.

6-7 問題 5-7 を，変数変換

$$(x,y,z) = \bigl(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\bigr)$$

を用いて説明しなさい

6-8 C^1-級の 1 変数関数 φ が $\varphi(0)=0$ を満たしているとき，

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(u)\,du$$

の右辺を $u=tx$ と変数変換して t に関する積分とみなすことにより，

$$\varphi(x) = x\psi(x)$$

をみたす 連続関数 ψ が存在することを示しなさい（これは，多項式に関する因数定理の一般化とみなすことができる）．

7. 広義積分

7.1　広義積分

半開区間 $(a,b]$ で定義された連続関数 f に対して

極限値　$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$　が存在するとき，その値を　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

と書く．関数 f が $[a,b)$ で連続であるときも同様に $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が定義される．

また，区間 $[a,\infty)$ で定義された連続関数 f に対して

極限値　$\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_{a}^{M} f(x)\,dx$　が存在するとき，その値を　$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$

と書く．同様に $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ も定義される．

これらは定積分の概念を拡張したもので**広義積分**[1] とよばれる．とくに，定義のなかに現れる極限値が存在するとき**広義積分は収束する**，そうでないとき**発散する**という．

例 7.1.　(1)　正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon}) \to 2 \qquad (\varepsilon\to+0)$$

なので，区間 $(0,1]$ での広義積分は収束し，

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

(2)　正の数 $\varepsilon\in(0,1)$ に対して

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_\varepsilon^1 = \log 1 - \log\varepsilon = -\log\varepsilon \to +\infty \qquad (\varepsilon\to+0)$$

なので，区間 $(0,1]$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

(3)　正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M = 1-e^{-M} \to 1 \qquad (M\to+\infty)$$

なので，区間 $[0,+\infty)$ での広義積分は収束し，

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

(4)　正の数 M に対して

$$\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_1^M = \log M \to +\infty \qquad (M\to+\infty)$$

なので，区間 $[1,+\infty)$ での次の広義積分は発散する：

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx. \qquad \diamondsuit$$

次の事実は基本的である（問題 7-1）：

命題 7.2.　(1)　実数 α に対して，広義積分

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $\alpha>-1$ である．

(2)　実数 β に対して，広義積分

$$\int_1^\infty x^\beta\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $\beta<-1$ である．

(3)　実数 a に対して，広義積分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は $a>0$ である．

例 7.3. 原始関数が求まらなくても，広義積分の収束がわかる場合がある．た

---

[*] 2018 年 6 月 5/6 日

[1] “こうぎせきぶん” と読む．“広義” は “広い意味” という意味．特異積分 improper integral ということもある．

とえば，定数 $k \in (0,1)$ に対して広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \tag{7.1}$$

を考えよう．正の数 $\varepsilon \in (0,1)$ に対して

$$\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}(1-\varepsilon)} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (x=\sin t)$$

であるが，右辺の被積分関数は $[0,\frac{\pi}{2}]$ で連続であるから，$\varepsilon \to +0$ の極限をとることができて [2)]

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt. \qquad \diamondsuit$$

関数 $f(x)$ が (a,b) で連続な場合は区間 $[a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2]$ における積分が $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (+0,+0)$ である値に収束するとき，その極限値を広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx \left(= \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0,0)} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx\right)$$

と定める．区間の一端または両端が有限でない場合も同様に定義する．

例 7.4. 正の数 ε_1, $\varepsilon_2 \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x}{1-x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{2}\log(1-x^2)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\\ &= -\left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2}\\ &= -\frac{1}{2}\bigl(\log\varepsilon_2 + \log(2-\varepsilon_2) - \log(2-\varepsilon_1) - \log\varepsilon_1\bigr)\end{aligned}$$

であるが，$\varepsilon_1 \to +0$ のとき，右辺の最後の項は発散するので，広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

は発散する．特別な近づけ方で $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \to (0,0)$ とすると，たとえば $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \to +0$ のとき

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\bigl(\log(1-x)+\log(1+x)\bigr)\right]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 \to 0$$

[2)] 原始関数の連続性は，微分可能性（定理 5.11）による．

となるが，

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx = 0 \qquad \text{であるとはいわない．} \qquad \diamondsuit$$

■ 広義積分の収束判定 広義積分の値が具体的にわからなくても，収束することはわかる場合がある．

事実 7.5. 区間 $I=(a,b]$ で定義された連続関数 f, g がともに I 上で $f(x) \geqq 0$, $g(x) \geqq 0$ を満たし，さらに

$$f(x) \leqq g(x) \qquad (x \in I), \qquad \text{かつ} \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{が収束する}$$

ならば，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

は収束する．

この事実の証明は“実数の連続性”による．余裕があれば微分積分学第二で説明するかもしれない [3)]．

有用な例を挙げるため，少しだけ準備をしておく：

補題 7.6. 任意の正の整数 m と $x \geqq 0$ に対して $x^m \leqq m!e^x$ が成立する．

証明． 正の整数 m に対して $f_m(x) = m!e^x - x^m$ とおき，m に関する数学的帰納法により $f_m(x) \geqq 0$ を示す．$x \geqq 0$ のとき $(e^x - x)' = e^x - 1 \geqq 0$ であるから，$e^x - x$ は単調非減少 [4)]．したがって $e^x - x \geqq e^0 - 0 = 1$. すなわち $f_1(x) \geqq 0$. いま，番号 k に対して $f_k(x) \geqq 0$ $(x \geqq 0)$ が成り立っているならば，$f'_{k+1}(x) = kf_k(x)$ なので，f_{k+1} は $x \geqq 0$ で単調非減少だから $x \geqq 0$ のとき $f_{k+1}(x) \geqq f_{k+1}(0) = m! \geqq 0$. □

系 7.7. 任意の負でない実数 p と $x \geqq 0$ に対して

$$x^p \leqq Me^x$$

が成立する．ただし $M = ([p]+1)!$ ($[p]$ は p を超えない最大の整数) である．

証明． まず $0 \leqq x \leqq 1$ なら左辺は 1 以下，右辺は 1 以上であるから結論が成り立つ．$x > 1$ のときは $x^p \leqq x^{[p]+1}$ なので，$m = [p]+1$ とおいて補題 7.6 を適用する． □

[3)] 少なくとも，これと関連した話題を級数の収束判定の項で説明する．
[4)] 定義域で $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つとき，関数 f は単調非減少であるという．

系 7.8. 任意の実数 p と正の実数 a に対して $\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-ax} = 0$.

証明. $p \leqq 0$ のとき $x \geqq 1$ ならば $x^p \leqq 1$ だから,

$$0 \leqq x^p e^{-ax} \leqq e^{-ax} \to 0 \qquad (x \geqq 1, x \to +\infty).$$

$p \geqq 0$ のときは，補題 7.6 を x の代わりに $ax/2$ として適用すると，$x \geqq 0$ に対して

$$\left(\frac{a}{2}\right)^p x^p \leqq ([p]+1)! e^{ax/2} \tag{7.2}$$

が成り立つので,

$$0 \leqq x^p e^{-ax} \leqq \left(\frac{a}{2}\right)^p ([p]+1)! e^{-ax/2} \to 0 \qquad (x \to +\infty)$$

となり「はさみうち」から結論が得られる. □

命題 7.9. 任意の実数 p に対して，次の広義積分は収束する：

$$\int_1^\infty x^p e^{-ax}\, dx$$

証明. 系 7.8 の証明の中の (7.2) を用いれば,

$$x^p e^{-ax} \leqq e^{-ax/2}$$

だが，$a > 0$ だから，右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は，命題 7.2 から収束する．したがって事実 7.5 から，与えられた広義積分は収束する. □

例 7.10. 負でない実数 p に対して次の広義積分は収束する：

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^2}\, dx.$$

このことを確かめよう．被積分関数は 0 で連続だから $[0,1]$ 区間では積分可能．したがって $[1, +\infty)$ での収束を考えればよい．ここで $x \geqq 1$ なら $e^{-x^2} \leqq e^{-x}$ なので，$0 \leqq x^p e^{-x^2} \leqq x^p e^{-x}$ $(x \geqq 1)$ が成り立つ．命題 7.9 から右辺の $[1, +\infty)$ での広義積分は収束するから，事実 7.5 から考えている広義積分は収束する. ♢

注意 7.11. とくに $p = 0$ とすると,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\, dx + \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$$

は収束する．この積分を**ガウス積分**[5] という．第 7.2 節で求めるように，この値は $\sqrt{\pi}$ である.

[5] ガウス積分：the Gaussian integral; Gauss (Gauß), Carl Friedlich (1777–1855, G).

■ **関数の定義**　積分を用いて具体的な関数を定義することがある.

例 7.12 (ガンマ関数). 実数 $s > 0$ に対して広義積分

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \tag{7.3}$$

は収束する（問題 7-2）．そこで

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \qquad (s > 0)$$

とおき，これを**ガンマ関数**とよぶ. ♢

例 7.13 (ベータ関数). 正の実数 p, q に関して広義積分

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

は収束する（問題 7-4）．この 2 変数関数を**ベータ関数**とよぶ [6]. ♢

7.2　ガウス積分

定理 7.14 (ガウス積分の値).

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{7.4}$$

例 7.10, 注意 7.11 からこの広義積分は収束する．しかし e^{-x^2} の原始関数は初等関数でないことが知られているので，積分の値を求めるには特別なアイディアが必要である．以下，重積分の変数変換の応用として，(7.4) を示す.

定理 7.14 の証明. いま，正の数 M に対して

$$I_M := \int_0^M e^{-x^2}\, dx$$

とおくと,

$$\begin{aligned}(I_M)^2 &= \left(\int_0^M e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \left(\int_0^M e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2}\, dy\right) \\ &= \int_0^M e^{-y^2}\left(\int_0^M e^{-x^2}\, dx\right) dy = \iint_{E_M} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\end{aligned} \tag{7.5}$$

が成り立つ．ただし $E_M := [0, M] \times [0, M]$ である.

一方，一般に正の実数 R に対して

$$J_R := \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy, \qquad D_R := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq R^2, \\ x \geqq 0, y \geqq 0 \end{array} \right\} \tag{7.6}$$

[6] B はローマ文字の b の大文字ではなく，ギリシア文字 β の大文字である.

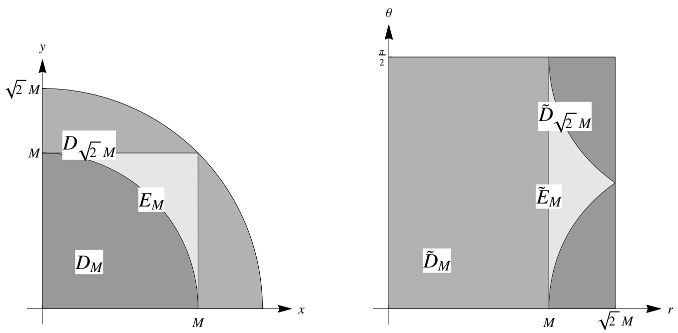


図 7.1　ガウス積分の計算

とおくと，極座標 (r,θ) $(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$ により D_R は

$$\widetilde{D}_R := \left\{(r,\theta)\ \middle|\ 0\leqq r\leqq R, 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right\} = [0,R]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

に対応するから，ヤコビアン $\partial(x,y)/\partial(r,\theta)=r$ に注意すれば，

$$J_R = \iint_{\widetilde{D}_R} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R re^{-r^2}\,dr\right)d\theta \tag{7.7}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R\left(\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right)'dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\bigl(1-e^{-R^2}\bigr)$$

を得る．

ここで，与えられた M に対して $D_M\subset E_M\subset D_{\sqrt{2}M}$ が成り立つ（図 7.1）から，

$$\frac{\pi}{4}\bigl(1-e^{-M^2}\bigr) = J_M \leqq (I_M)^2 \leqq J_{\sqrt{2}M} = \frac{\pi}{4}\bigl(1-e^{-2M^2}\bigr),$$

となるから

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \lim_{M\to+\infty}(I_M^2) = \frac{\pi}{4}.$$

考えている積分の値は正だから (7.4) が得られた． □

応用として，ガンマ関数（例 7.12）の半整数における値が求められる：

系 7.15. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

証明. 定義式 (7.3) の x を u^2 とおくと，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}. \qquad \square$$

系 7.16. 定数 μ と正の数 σ に対して次が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1, \tag{7.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \mu, \tag{7.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma^2. \tag{7.10}$$

証明. 変数変換 $u=(x-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$ により，正の数 M_1, M_2 に対して

$$\int_{-M_1}^{M_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du \qquad \left(\alpha_j := \frac{M_j+\mu}{\sqrt{2}\sigma}, j=1,2\right)$$

となる．ここで $M_j\to+\infty$ と $a_j\to+\infty$ $(j=1,2)$ は同値だから，定理 7.14 から (7.8) が得られる．

おなじ変数変換により，(7.9) の積分を計算する：正の数 M_1, M_2 に対して

$$\begin{aligned}\int_{-M_1}^{M_2}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx &= \int_{-a_1}^{a_2}\frac{\sqrt{2}\sigma u+\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\,du\\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{a_1}^{a_2}ue^{-u^2}\,du + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du\\ &= \frac{\sqrt{2}\sigma}{2\sqrt{\pi}}\left(e^{-a_1^2}-e^{-a_2^2}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du \to \mu \quad (a_1,a_2\to+\infty).\end{aligned}$$

最後に，

$$\begin{aligned}\int_{-M_1}^{M_2}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}u^2e^{-u^2}\,du = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-a_1}^{a_2}u\left(\frac{-1}{2}e^{-u^2}\right)'du\\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\left[-ue^{-u^2}\right]_{-a_1}^{a_2} + \int_{-a_1}^{a_2}e^{-u^2}\,du\right)\end{aligned}$$

となる．右辺の第 1 項は系 7.8 から 0 に収束する．また，第 2 項の積分は定理 7.14 から求まるので，(7.10) を得る． □

■ ガンマ関数とベータ関数　ガウス積分に似た方法で，例 7.12, 7.13 のガンマ関数とベータ関数の関係式を導くことができる：

定理 7.17. 任意の p, $q>0$ に対して $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

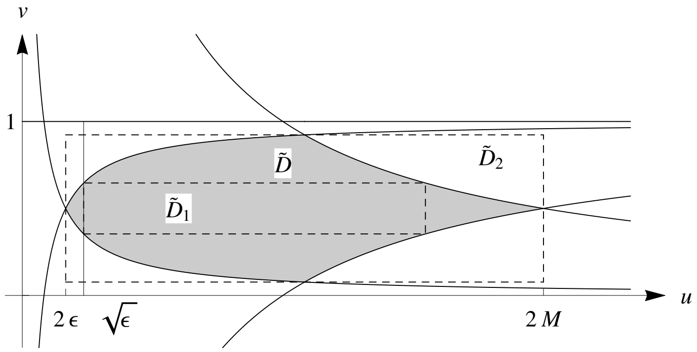


図 7.2　定理 7.17 の証明

証明． 正の数 p, q をとり，固定しておく．正の数 $\varepsilon < 1/4$ と正の数 $M > 1$ に対して

$$I(\varepsilon, M) := \iint_{D_{\varepsilon,M}} e^{-x}x^{p-1}\,e^{-y}y^{q-1}\,dx\,dy$$
$$= \left(\int_{\varepsilon}^{M} e^{-x}x^{p-1}\,dx\right)\left(\int_{\varepsilon}^{M} e^{-y}y^{q-1}\,dy\right) \qquad D_{\varepsilon,M} = [\varepsilon, M]\times[\varepsilon, M]$$

とおくと，ガンマ関数の定義（例 7.12）から

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ M\to+\infty}} I(\varepsilon, M) = \Gamma(p)\Gamma(q). \tag{7.11}$$

一方，変数変換

$$x = uv, \qquad y = u(1-v)$$

をほどこすと，xy 平面の部分集合 $D_{\varepsilon,M}$ は uv 平面の部分集合

$$\widetilde{D} := \left\{(u,v)\,\middle|\,\frac{\varepsilon}{u} \leqq v \leqq \frac{M}{u}, 1-\frac{M}{u} \leqq v \leqq 1-\frac{\varepsilon}{u}\right\}$$

と 1 対 1 に対応する（図 7.2）．変数変換のヤコビアンは $\partial(x,y)/\partial(u,v) = -u$ であるから，$\widetilde{D}$ 上 $u > 0$ に注意すれば

$$I(\varepsilon, M) = \iint_{\widetilde{D}} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv$$

となる．ここで

$$\widetilde{D}_1 := \left[\sqrt{\varepsilon}, \frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right]\times[\sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon}], \quad \widetilde{D}_2 := [2\varepsilon, 2M]\times\left[\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}, \frac{M}{M+\varepsilon}\right]$$

とおくと，図 7.2 のように $\widetilde{D}_1 \subset \widetilde{D} \subset \widetilde{D}_2$ だから，

$$I(\varepsilon, M) \leqq \iint_{\widetilde{D}_2} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv$$
$$= \left(\int_{2\varepsilon}^{2M} e^{-u}u^{p+q-1}\,du\right)\left(\int_{\frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}}^{\frac{M}{M+\varepsilon}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\right),$$
$$I(\varepsilon, M) \geqq \iint_{\widetilde{D}_1} e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,du\,dv$$
$$= \left(\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\frac{M}{1-\sqrt{\varepsilon}}} e^{-u}u^{p+q-1}\,du\right)\left(\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1-\sqrt{\varepsilon}} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\,dv\right).$$

ここで $\varepsilon \to +0$, $M \to +\infty$ とすると，2 つの不等式の右辺はともに $\Gamma(p+q)B(p,q)$ に収束するので，結論が得られた． □

正規分布

確率的に値が定まるような変数を**確率変数**という．確率変数が特定の値をとるときの確率が指定されているとき，変数の値と確率の対応を**確率分布**という．

硬貨（いかさまでない）を 10 回投げて表がでた回数を X を確率変数とみなせば，$X = k$ となる確率は ${}_{10}\mathrm{C}_k/2^{10}$ であることは高等学校で学んだ．このような分布を**二項分布**という（ということが高等学校の教科書にもある）．一般に，確率変数 X が値 x_j をとる確率が p_j (>0) ならば，とりうるすべての値 x_j に関する総和は $\sum p_j = 1$ となる（何かが起こる確率は 1）．ここで，同じ範囲で和をとって

$$\mu := \sum p_j x_j, \qquad \sigma^2 := \sum p_j(x_j-\mu)^2$$

とおき μ を X の**平均**，σ^2 を**分散**，σ を**標準偏差**という [7]．

確率変数が連続的な値をとる場合，それが「特定の値をとる」ということは滅多に起こらない．そこで，確率変数の値が「ある範囲」にある場合の確率を指定し，その指定のしかたを確率分布とする．すなわち，任意の区間 (a,b) に対して $a \leqq X \leqq b$ となる確率 $P_{(a,b)}$ を指定することが確率分布を定めることとする．とくに，この確率が

$$P_{(a,b)} = \int_a^b \rho(x)\,dx \qquad \rho(x) \geqq 0$$

と，積分を用いて表されているとき，考えている確率分布の**確率密度関数**は $\rho(x)$ である，という．確率変数の値がどれかの実数になる確率は 1，任意の区間に対して $P_{(a,b)} \geqq 0$ にならなければならないから，密度関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1, \qquad \rho(x) \geqq 0 \tag{7.12}$$

をみたさなければなならない．さきに述べた離散的な場合との類推で，確率密度関数が

[7] 確率変数：a stochastic variable, a random variable, 確率分布：a probability distribution, 二項分布：the binomial distribution, 平均：the mean, 分散：the variance, 標準偏差：the standard deviation, 確率密度関数：a probability density function.

ρ となるような確率分布に対して，

$$\mu := \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx, \qquad \sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\rho(x)\,dx$$

をそれぞれ平均，分散という．

さて，実数 μ と正の数 σ に対して

$$\rho(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2}\sigma}}$$

とおくと，系 7.16 の式 (7.8) は，ρ が (7.12) をみたしていることを表している．この ρ を確率密度関数にもつような確率分布のことを**正規分布**という [8]．系 7.16 は，この正規分布の平均，分散がそれぞれ μ, σ^2 であることを表している．

高次元の球の体積

ガンマ関数を用いると，高い次元の球の体積を簡単に表すことができる（問題 5-9 参照）．正の整数 n と実数 R に対して $\mathbb{R}^n$ の半径 R の**球**（球体）[9] とは

$$B^n(R) := \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2 \leqq R^2\} \subset \mathbb{R}^n$$

のことで，その体積とは，積分

$$V_n(R) := \int \cdots \iint_{B^n(R)} dx_1\,dx_2 \dots dx_n$$

のことである．とくに

$$\alpha_n := V_n(1)$$

とすると，変数変換 $y_j = Rx_j$ $(j = 1,\dots,n)$ を行うことにより，$V^n(R) = R^n\alpha_n$ がわかる．とくに，小学校・中学校・高等学校で $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$ であることを学んだ．

定理 7.18. $\alpha_n = \dfrac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

証明. 関数 $f(x_1,\dots,x_n) := e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}$ を考えると，

$$\int \cdots \iint_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-\dots-x_n^2}\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \left(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\right)^n = \sqrt{\pi}^n. \tag{7.13}$$

一方，$r = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ とすると $f = e^{-r^2}$ となるので，r から $r+\Delta r$ の区間で f の積分はおよそ

$$\begin{aligned} f(r) \times (\text{半径 } r \text{ から } r+\Delta r \text{ までの球殻の体積}) &= f(r)\bigl(V^n(r+\Delta r) - V^n(r)\bigr) \\ &= f(r)\alpha_n\bigl((r+\Delta r)^n - r^n\bigr) = f(r)\alpha_n \cdot nr^{n-1}\Delta r + (\Delta r)^2(\dots) \end{aligned}$$

[8] 正規分布：the normal distribution. 正規分布は確率分布の単なる例ではなく，重要な意味をもっている．確率や統計の教科書などで「中心極限定理」を調べてみよ．

[9] 球：a ball. 表面だけを表すときは**球面** a sphere という語を用いる．

となる（問題 5-7, 第 5 回の体積密度と質量の関係を参照せよ）．f の $\mathbb{R}^n$ の全体での積分は，この体積の総和だが，Δr^2 の項は，総和をとって $\Delta r \to 0$ としたときに 0 となってしまう項なので [10]，

$$\int \cdots \iint_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n = \int_0^\infty n\alpha_n e^{-r^2} r^{n-1}\,dr$$

となる．この右辺の積分は $r^2 = u$ と置換することで，ガンマ関数の定義から

$$n\alpha_n \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1}\,du = \frac{n}{2}\alpha_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \alpha_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

ここで問題 7-3 を用いた．この式と (7.13) が等しいことから結論が得られる．□

問　題　7

7-1 命題 7.2 を確かめなさい．

7-2 例 7.12 の広義積分 (7.3) が収束することを確かめなさい．(注意：この積分は区間の上端も下端も広義積分なので，たとえば $(0,1]$ での積分と $[1,+\infty)$ での積分の収束を別々に示す必要がある．)

7-3 任意の正の数 s に対して $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを示しなさい．これを用いて，正の整数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを確かめなさい．

7-4 例 7.13 の広義積分が収束することを確かめなさい．

7-5 $[0,+\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対して

$$\hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \tag{*}$$

で与えられる s の関数 $\hat{f}$ を f のラプラス変換という [11]．つぎを確かめなさい．

(1) 関数 $f(t) = 1$ に対して，(*) は $s > 0$ で収束し $\hat{f}(s) = 1/s$ となる．

(2) 関数 $f(t) = t$ に対して，(*) は $s > 0$ で収束し $\hat{f}(s) = 1/s^2$ となる．

(3) 関数 $f(t) = t^k$ (k は正の整数) に対して，(*) は $s > 0$ で収束し $\hat{f}(s) = k!/s^{k+1}$ となる．

(4) 関数 $f(t) = e^{at}$ (a は定数) に対して，(*) は $s > a$ で収束し $\hat{f}(s) = 1/(s-a)$ である．

(5) 関数 $f(t) = \cos\omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s > 0$ で収束し，$\hat{f}(s) = s/(s^2+\omega^2)$ である．

(6) 関数 $f(t) = \sin\omega t$ (ω は定数) に対して (*) は $s > 0$ で収束し，$\hat{f}(s) = \omega/(s^2+\omega^2)$ である．

[10] ここでは $r = +\infty$ までの積分を考えるので，この議論は少々不正確．有限の範囲で積分しておいて極限をとるのが正しい．

[11] 一般には s は複素変数と考えるべきだが，ここでは実変数と思うことにする．ラプラス変換は線形常微分方程式を解くのに便利なツールだが，この科目では扱わない．「工業数学」などの授業で学ぶはずである．

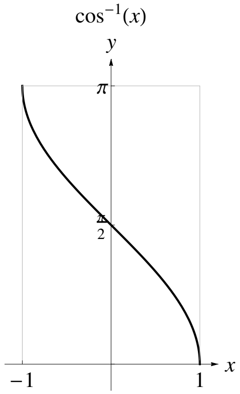
問題の解答とヒント

問題の解答，解答の概略あるいはヒントを与える．これらは完全なものではないので，行間を埋めて完全な解答を作ることを試みよ．誤りを見つけたら指摘してほしい．

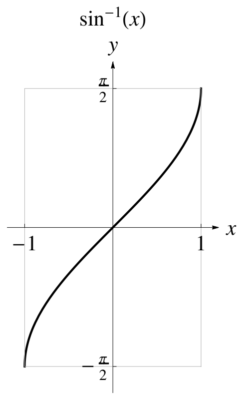
問題 1 (10 ページ)

1-1 (1) Yes; (2) No; (3) $a \neq 1$ のとき Yes, $a = 1$ のとき No; (4) No; (5) Yes.

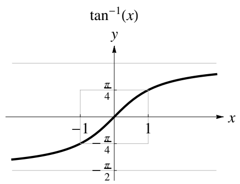
1-2



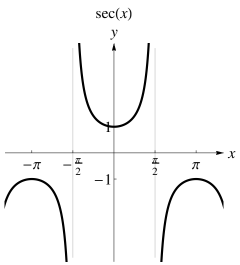
$y = \mathrm{Cos}^{-1}\,x$



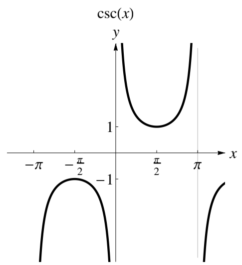
$y = \mathrm{Sin}^{-1}\,x$



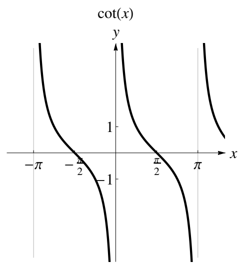
$y = \mathrm{Tan}^{-1}\,x$



$y = \sec x$



$y = \csc x$



$y = \cot x$

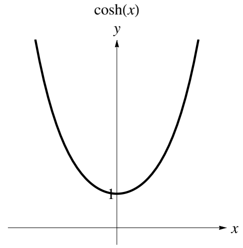
1-3 正接，余接の積分は，それぞれ $\cos x$, $\sin x$ を置換すればよい．

1-4 (1) $\cosh x$ は相加相乗平均の関係式を用いる．$\tanh x$ は次の式変形による：

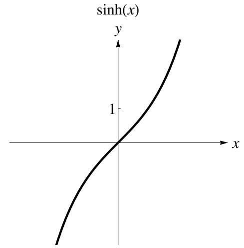
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} = -1 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

(2) $f(-x) = f(x)$ が成り立つ関数 f を偶関数，$f(-x) = -f(x)$ が成り立つ関数を奇関数という．

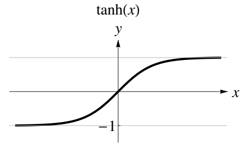
(3)



$y = \cosh x$



$y = \sinh x$



$y = \tanh x$

(4), (5)： 三角関数での対応する公式の作り方をまねなさい．ついでに三角関数の公式を思い出しなさい．

(6) $\cosh u = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\sinh u = \frac{2t}{1-t^2}$, $\tanh u = \frac{2t}{1+t^2}$.

(7) $|A| > |B|$ のとき $\pm\sqrt{A^2-B^2}\cosh(x+\alpha)$, $\alpha = \mathrm{Tanh}^{-1}(B/A)$ ただし符号は A の符号と一致する；$|A| < |B|$ のとき $\sqrt{B^2-A^2}\sinh(x+\alpha)$, $\alpha = \mathrm{Tanh}^{-1}(A/B)$. $|A| = |B|$ のときは指数関数で表される（三角関数の合成公式も思い出しておこう）.

(8) 等式 $x = \cosh y$ は $Y = e^y$ とおけば，Y に関する 2 次方程式となるので，それをとき，2 つの解のうち $y \geqq 0$ となるものを選べばよい．

1-5 (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{5}$, $\beta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{239}$ とおけば，$\tan(4\alpha-\beta) = 1$. したがって $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (n は整数). ここで，Tan^{-1} が単調増加であることに注意すれば，$0 < 4\alpha - \beta < 4\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\pi$ だから $n = 0$. (2) 3.14 （この桁まで正しい）

1-6 (2) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x = (x')\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ として置換積分法の公式を用いる．

1-7 $\cos^n x = (\sin x)'\cos^{n-1} x$ として置換積分法の公式を用いると漸化式が得られる．

1-8 $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \mathrm{Sin}^{-1}\,x\right)$.

1-9 $\frac{1}{36}\left(-\frac{6}{x+1} - 9\log(1-x) + 4\log(2-x) + 5\log(x+1)\right)$ (被積分関数を $-\frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{36(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)^2} + \frac{1}{9(x-2)}$ と部分分数分解する）.

1-10 (1) $-1/(x-a)$, (2) $x^2-2ax+b=0$ の 2 つの実根を α, β とすると $\frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$ (3) $\frac{1}{A}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-a}{A}$. ただし $A = \sqrt{b-a^2}$. ($x^2 - 2ax + b = (x-a)^2 + (b-a^2) = A^2\left(\left(\frac{x-a}{A}\right)^2 + 1\right)$ と変形して $(x-a)/A$ を置換する).

1-14 $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,x + \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$,

$\frac{1}{6}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{3}\log|1-x| + \frac{\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$,

$\frac{-\log\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\log\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)-2\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(1-\sqrt{2}x\right)+2\,\mathrm{Tan}^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)}{4\sqrt{2}}$.

1-15 約 0.74mm.
もとめる長さは $2\left(\sqrt{2R+1} - R\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{\sqrt{2R+1}}{R}\right)$. この R に地球の半径 $4\times10^8/(2\pi)$m を代入すればよい．手計算で値を求めるには，Tan^{-1} の部分を式 (1.8) の $N=1$ の場合で置き換える．

問題 2 (22 ページ)

2-1 どちらも正しくない．4 ページ，14 ページ参照．

2-5 (1) 原点を中心とする円（のいくつかの和集合）; (2) xz 平面上のグラフ $z = F(x)$ $(x \geqq 0)$ を z 軸の周りに回転させて得られる回転面．

2-6 (1) 0, 1, 4/5, 3/5; 4/5, 4/5, 4/5; $2m/(1+m^2)$. (2) 原点を通り傾き m $(m \neq 0)$ の直線から原点をのぞいたものが高さ $2m/(1+m^2)$ の等高線になる．また，高さ 0 の等高線は x 軸と y 軸である．(3) たとえば

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

だから

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)), \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)). \end{cases}$$

2-7 順序交換ができる場合: $\frac{n(n+1)}{2}$ 通り；順序が違う偏微分を区別する場合：n^2 通り．

2-8 順序交換ができる場合: n 種の文字から m 個を重複を許して選ぶ重複組み合わせの数 ${}_n\mathrm{H}_m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$；順序が違う偏微分を区別する場合：$n^m$ 通り．

2-9

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)), \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)), \end{cases}$$

$$f_{xx}(x,y) = \begin{cases} \frac{-4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)), \end{cases}$$

$$f_{yy}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)), \end{cases}$$

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ -1 & ((x,y)=(0,0)), \end{cases}$$

$$f_{yx}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 1 & ((x,y)=(0,0)). \end{cases}$$

2-11 $q = \pm c$; a, b は任意．

2-12 3 次以下の多項式で調和関数となるもの:

$$f(x,y) = a(x^3-3xy^2) + b(y^3-3x^2y) + c(x^2-y^2) + dxy + px + qy + m.$$

ただし a, b, c, d, p, q, m は定数．

2-13 合成関数の微分公式を用いれば，問題に与えられてた f に対して

$$f_x(x,y,z) = \frac{x}{r}F'(r), \qquad f_{xx}(x,y,z) = \frac{(r^2-x^2)F'(r) + rx^2F''(r)}{r^3}$$

$(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ となるから

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{2F'(r)}{r} + F''(r).$$

これが 0 になるような F は $F(r) = (a/r) + b$ (a, b は定数) に限る．

2-14 f の定義域は $\{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$, g の定義域は $\{(x,y) \mid \cos x \cos y > 0\}$, h の定義域はたとえば $\{(x,y) | x > 0\}$.

2-15 (1) $\mathrm{Re}\, e^z = e^x \cos y$, $\mathrm{Im}\, e^z = e^x \sin y$ なので直接計算でわかる．(2) 次から直接計算でわかる：

- $m = 2$ のとき $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2 - y^2$, $\mathrm{Im}\, f(z) = 2xy$,
- $m = 3$ のとき $\mathrm{Re}\, f(z) = x^3 - 3xy^2$, $\mathrm{Im}\, f(z) = 3x^2y - y^3$,
- $m = 3$ のとき $\mathrm{Re}\, f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $\mathrm{Im}\, f(z) = 4x^3y - 4xy^3$.

一般の m についても同様な結論が成り立つ．2 項定理を用いて確かめてみよ．

問題 3 (36 ページ)

3-3 近似値：1.3；計算機で求めた値：1.3027（角度の単位に注意せよ）．

問題 4 (47 ページ)

4-2 $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$ とおくと，$F(s) := f\bigl(\gamma(s)\bigr) = 1 + \frac{1}{2}\sin 2s$ なので，$F'(s) = \cos 2s$．したがって s の区間 $(-\pi/4, \pi/4)$, $(3\pi/4, \pi)$, $(-\pi, -3\pi/4)$ では上り坂，$(-3\pi/4, -\pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4)$ では下り坂．

4-3 $(df)_P(\boldsymbol{v}) = (\mathrm{grad}\, f)_P \cdot \boldsymbol{v}$ なのでコーシー・シュワルツの不等式と $|\boldsymbol{v}| = 1$ から $-|(\mathrm{grad}\, f)_P| \leqq (df)_P(\boldsymbol{v}) \leqq |(\mathrm{grad}\, f)_P|$ が成り立つ．とくに，等号条件から $\boldsymbol{v} = k(\mathrm{grad}\, f)_P$ $(k > 0)$ のときに右側の不等式の等号が成り立つ．

4-4 $\gamma(t)$ は P を通る f の等高線だから，この曲線にそって f の値は一定：$f\bigl(x(t), y(t)\bigr) =$ 定数．この式の両辺を t で微分して命題 3.23 を用いればよい．

4-5 前半は単純計算．後半：$\tilde{f}(\xi,\eta) = f(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})$ とすれば，条件から $\tilde{f}_{\xi\eta} = 0$．とくに f_ξ は η で偏微分すると 0 になるので $f_\xi(\xi,\eta) = H(\xi)$ と ξ だけの関数で書ける．したがって $f(\xi,\eta) = \int H(\xi)\, d\xi + G(\eta)$（$G(\eta)$ は η のみによる 1 変数関数）と書ける．

4-6　写像 $(r,\theta,\varphi)\mapsto(x,y,z)$ のヤコビ行列は

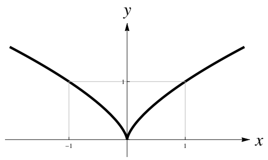
$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

なので，この逆行列を計算すれば問題の式が得られる．
（注）(x,y,z) は，原点を中心とする半径 r の球面上の "経度 θ，緯度 φ の点" である．緯度の代わりに北極からの角度を用いる場合もある（そちらの方が多数派かもしれない）．その場合，極座標は

$$(x,y,z)=r(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)$$

で表される．

4-7　$dF=(2x,3y^2)$ なので，$C:=\{(x,y)|F(x,y)=0\}$ 上の $(0,0)$ 以外の点の近くで C はなめらかな曲線である．また C の $x>0$ $(x<0)$ の部分はグラフ $y=\sqrt[3]{x^2}=|x|^{2/3}$ となるので，グラフは図のようになる．



4-8　命題 4.17 から $\varphi'(x)=-F_x\bigl(x,\varphi(x)\bigr)/F_y\bigl(x,\varphi(x)\bigr)$ なので，これを x で微分する．このとき，　命題 4.17 の証明と同様に

$$\frac{d}{dx}F_x\bigl(x,\varphi(x)\bigr)=(F_x)_x\bigl(x,\varphi(x)\bigr)+(F_x)_y\bigl(x,\varphi(x)\bigr)\varphi'(x)$$

に注意し，$\varphi'(x)$ に命題 4.17 の結論の式を代入すればよい．

4-9
- $F(x,y)=0$ は y^2 に関する 2 次方程式である．この方程式が負でない実数解をもつための必要十分条件は $x^4-2x^2+a\leqq 0$ である．このことから $C\neq\emptyset$ なのは $a\leqq 1$ のとき．とくに $a=1$ のときは $C=\{(1,0),(-1,0)\}$．また，$a<1$ のときは

$$C\subset\begin{cases}\{(x,y)|x\in[-b_1,-b_2] \text{ または } [b_2,b_1]\} & (0<a<1)\\ \{(x,y)|x\in[-b_1,b_1]\} & (a\leqq 0)\end{cases}$$

となる．ただし

$$b_1=\sqrt{1+\sqrt{1-a}},\qquad b_2=\sqrt{1-\sqrt{1-a}}.$$

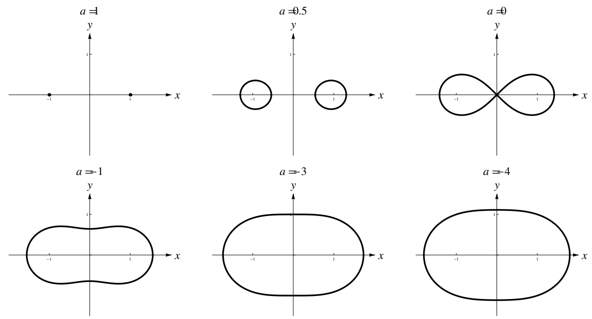
- C の点が $x=\pm b_1$, $\pm b_2$ ($a>0$ のとき) をみたすとき $y=0$ で $F_y=0$．この点の近くで C はグラフ $y=\varphi(x)$ で表せないが，$F_x\neq 0$ なので，$x=\psi(y)$ とグラフ表示され，C の接線は y 軸に平行になることがわかる．
- 区間 $(-b_1,b_1)$ $((-b_1,-b_2), (b_2,b_1)$; $a>0$ のとき) 上の上半平面で C はグラフ表示 $y=\varphi(x)$ をもつ．とくに，

$$\varphi'(x)=\frac{x}{y}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$$

なので，$\varphi'(x)=0$ であるための必要十分条件は $x=0$ または $x^2+y^2=1$．とくに

$$\varphi'(x)=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases} x=0 & (a\leqq -3)\\ x=0,\ \pm\sqrt{\frac{a+3}{4}} & (-3<a<1)\end{cases}$$

となる．
- $a=0$ のとき，原点の近くで C はなめらかな曲線にならない．区間 $(0,b_1)$ 上で C の上半平面の部分は $y=\varphi(x)$ とグラフ表示できるが $\varphi(0)=0$ とすると φ は $[0,b_1)$ で微分可能で $\varphi'(0)=1$ となる．図形は x 軸，y 軸に関して対称であることに注意すると下図のような絵が描ける．



4-10　$(-1)^3=-1$ と次からわかる．

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x},\qquad \frac{\partial\eta}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y},\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}.$$

問題 5 (59 ページ)

5-1　講義で解説した内容を復習せよ．とくに「どんな関数に原始関数が存在するか」という問いにはこのノートの定積分の定義なしには答えられない．

5-2　(1) 上半分は，グラフ $y=b\sqrt{1-(x^2/a^2)}$ と x 軸とで囲まれる部分だから，求める面積は

$$2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=4ab\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du=4ab\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}+\sin^{-1}u\right]_0^1.$$

(2) $(x,y)=(a\cos t,b\sin t)$ $(-\pi\leqq t\leqq\pi)$ とパラメータ表示すると，対称性から長さは

$$\begin{aligned}
4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt &= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin^2 t+\frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt\\
&= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\cos^2 t+\frac{b^2}{a^2}(1-\cos^2 t)}\,dt\\
&= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du.
\end{aligned}$$

最後の等式は $t=\frac{\pi}{2}-u$ とおいた.
(3) k が小さいとき,

$$4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \fallingdotseq 4a\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{k^2}{2}\sin^2 t\right)dt = 4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k^2}{8}\pi\right).$$

ここで,問題の a, b を代入すると,$k=8.16965\times 10^{-2}$ となるので,40003.5km が求める近似値となる.この値については,1 メートルが定義された経緯を参照せよ.

5-3 考えている双曲線の第一象限の部分は $x=\sqrt{1+y^2}$ で表されているので,求める面積は

$$\left(\int_0^y\sqrt{1+u^2}\,du\right)-\frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2}=\frac{1}{2}\log\bigl(y+\sqrt{1+y^2}\bigr)=\frac{1}{2}\sinh^{-1}y$$

なので,$y=\sinh t$, $x=\sqrt{1+y^2}=\cosh t$.すなわち $P=(\cosh t,\sinh t)$.

5-4 $\frac{1}{4}\left(2a\sqrt{1+4a^2}+\log(2a+\sqrt{1+4a^2})\right)$.

5-5 面積は 3π, 長さは 8.この区間で与えられた曲線は $y=f(x)$ とグラフ表示できるから,面積は

$$\int_0^{2\pi}y\,dx=\int_0^{2\pi}y\,\frac{dx}{dt}dt=3\pi.$$

ここで,$x=x(t)=t-\sin t$ という置換を行った.

5-6 $1/6$, $28\log 2-6$, $\frac{1}{24}\pi(2\pi^2-3)$, $1/45$, $1/20$

5-7 $\displaystyle\int_0^R 4\pi r^2\rho(r)\,dr.$

理由(いい加減バージョン): 区間 $[0,R]$ の分割 $0=r_0<r_1<\dots<r_N=R$ に対して,小区間 $[r_{j-1},r_j]$ に対応する球殻,すなわち内径 r_{j-1},外径 r_j となる,球体の一部分を考える.この球殻の体積は $\frac{4}{3}\pi(r_j^3-r_{j-1}^3)$ 一方,密度は,およそ $\rho(r_j)$ くらいなので,球殻の質量はおよそ

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{3}\pi\rho(r_j)\bigl(r_j-r_{j-1}\bigr)\bigl(r_j^2+r_jr_{j-1}+r_{j-1}^2\bigr)\\
&\qquad\fallingdotseq\frac{4}{3}\pi\rho(r_j)(3r_j^2)\bigl(r_j-r_{j-1}\bigr)=4\pi r_j^2\rho(r_j)\Delta r_j\qquad(\Delta r_j=r_j-r_{j-1}).
\end{aligned}$$

この総和をとって,分割をどんどん小さくしていけば,解答の積分に収束する.

理由(少し正確バージョン): まず,区間 $[0,R]$ で ρ は連続であるから,その区間で最大値をとる.これを m とする.区間 $[0,R]$ の分割 $\Delta: 0=r_0<r_1<\dots<r_N=R$ の小区間 $I_j:=[r_{j-1},r_j]$ を考えると $|\Delta|\geqq r_j-r_{j-1}$ である.関数 ρ はこの区間で連続だから,最大値 $\bar\rho_j$ をとる.とくに $\bar\rho_j=\rho(\xi_j)$, $r_{j-1}\leqq\xi_j\leqq r_j$ となる ξ_j が存在する.このとき,区間 I_j に対応する球殻の質量 M_j は

$$\begin{aligned}
M_j&\leqq\frac{4}{3}\pi\bar\rho_j(r_j^3-r_{j-1}^3)=\frac{4}{3}\pi\rho(\xi_j)(r_j-r_{j-1})(r_j^2+r_jr_{j-1}+r_{j-1}^2)\\
&=\frac{4}{3}\pi\rho(\xi_j)(3\xi_j^2)(r_j-r_{j-1})+\mu_j
\end{aligned}$$

である.ただし,

$$\mu_j:=\frac{4}{3}\pi(r_j-r_{j-1})\rho(\xi_j)\bigl(r_j^2+r_jr_{j-1}+r_{j-1}^2-3\xi_j^2\bigr)$$

となる.ここで

$$\begin{aligned}
|\mu_j|&\leqq\frac{4}{3}\pi(r_j-r_{j-1})M(r_j^2-\xi_j^2)\leqq\frac{4}{3}\pi(r_j-r_{j-1})M(r_j^2-r_{j-1}^2)\\
&=\frac{4\pi m}{3}(r_j-r_{j-1})^2(r_j+r_{j-1})\leqq\frac{8\pi mR}{3}(r_j-r_{j-1})^2\\
&\leqq\frac{8\pi mR|\Delta|}{3}(r_j-r_{j-1})
\end{aligned}$$

なので,

$$\left|\sum_{j=1}^n\mu_j\right|\leqq\frac{8\pi mR|\Delta|}{3}\sum_{j=1}^n(r_j-r_{j-1})=\frac{8\pi mR^2|\Delta|}{3}.$$

一方,$f(r):=4\pi r^2\rho(r)$ とおき,$\bar f_j$ を区間 I_j での f の最大値とすると,

$$\frac{4}{3}\pi\rho(\xi_j)(3\xi_j^2)(r_j-r_{j-1})\leqq\bar f_j(r_j-r_{j-1})$$

なので

$$\sum_{j=1}^N M_j\leqq S_\Delta(f)+\left|\sum_{j=1}^N\mu_j\right|\leqq S_\Delta(f)+\frac{8\pi mR^2|\Delta|}{3}.$$

である.$|\Delta|\to 0$ すると,この右辺第 1 項は,f の積分可能性から $\int_0^R f(r)\,dr$ に収束する.また第 2 項は 0 に収束するので,球体の質量 M は

$$M\leqq\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)\,dr.$$

同様に M_j を ρ の最小値と比較することで,

$$M\geqq\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)\,dr.$$

となるので結論が得られた.

5-8

$$\begin{aligned}\iint_D F_{xy}(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b dx \int_c^d (F_x)_y(x,y)\,dy = \int_a^b \bigl[F_x(x,y)\bigr]_{y=c}^{y=d} dx \\ &= \int_a^b F_x(x,d)\,dx - \int_a^b F_x(x,c)\,dx \\ &= \bigl[F(x,d)\bigr]_{x=a}^{x=b} - \bigl[F(x,c)\bigr]_{x=a}^{x=b} \\ &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).\end{aligned}$$

5-9 $(3/4)\pi$, $\pi^2/2$, $8\pi^2/15, \ldots$

5-10 $(4/3)abc\pi$, $(8/5)abc\pi$.

5-11

$$\begin{aligned}\iint_D G_x(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} G_x(x,y)\,dx \\ &= \int_{-1}^1 \bigl[G(x,y)\bigr]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}\,dy \\ &= \int_{-1}^1 G(\sqrt{1-y^2},y)\,dy - \int_{-1}^1 G(-\sqrt{1-y^2},y)\,dy = (\star)\end{aligned}$$

ここで，第一の積分は $y=\sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2})$, 第二の積分は $y=\sin u$ $(\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{3\pi}{2})$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\star) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(\cos t,\sin t)\,dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} G(\cos u,\sin u)\,du \\ &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} G(\cos t,\sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} G(\cos t,\sin t)\,dt.\end{aligned}$$

最後の等式は，被積分関数が周期 2π をもつことによる．F_x の積分も同様にして求めることができるので，結論が得られる．

問題 6 (70 ページ)

6-1

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\right) dz\right] dy = \int_{-1}^1 4(1-y^2)\,dy = \frac{16}{3},$$

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\right) dy\right] dz \\ &\quad = 8\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx\right) dy\right] dz = \frac{16}{3}.\end{aligned}$$

6-2 (1) 北緯 $\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$ の緯線．

(2) $2\pi R \sin \frac{r}{R}$.

(3) $4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R}$. 考えている部分を関数 $f(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ （$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2\pi R\sin(r/R)$) のグラフと考えて，式 (6.1) を用いる．

(4) いずれも 1．このことは，球面上の半径 r の円の周，面積は，平面上の半径 r の円の周，面積より小さいが，半径が十分小さければほぼ一致することを表している．

6-3 (1) D の，点 (x,y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ を向かい合う頂点とする小さな長方形を x 軸の周りに回転させて得られる図形は，外径 $y+\Delta y$，内径 y の円環を底面とする高さ Δx の柱であるから，その体積は

$$\bigl(\pi(y+\Delta y)^2 - \pi y^2\bigr)\Delta x = \bigl(2\pi y + \pi\Delta y\bigr)\Delta x\Delta y$$

である．とくに右辺の括弧内の第 2 項は Δx, Δy を小さくしていくと 0 に近づく．求める体積は，これらの総和をとって，分割を小さくしていった極限だから，

$$\iint y\,dx\,dy$$

となる．

(2) 重心をきちんと定義していないが，質量 $m_1, \ldots, m_n$ の n 個の質点が，位置ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ にあるとき，それらの重心の位置ベクトルは

$$\frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + m_n\boldsymbol{x}_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

であることから出発する．いま D は一様な面密度（1）をもっている板として，D を (x_k,y_l), $(x_k+\Delta x_k, y_l+\Delta y_l)$ を頂点とする微小な長方形に分割しておく．この一つひとつの長方形を質点とみなすと，その質量は $m_{kl} := \Delta x_k\Delta y_l$ である．また，点の位置ベクトルは $\boldsymbol{x}_{kl} := (x_k,y_l)$ で近似できる．すると，分割をどんどん細かくしていったとき

$$\sum_{k,l} m_{kl} = \sum_{k,l} \Delta x_k\Delta y_l \to \iint_D dx\,dy = |D|,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} m_{kl}\boldsymbol{x}_{kl} &= \left(\sum_{kl} x_k\Delta x_k\Delta y_l, \sum_{kl} y_l\Delta x_k\Delta y_l\right) \\ &\to \left(\iint_D x\,dx\,dy, \iint_D y\,dx\,dy\right)\end{aligned}$$

となる．重心は第 2 式を第 1 式で割ったベクトルとみなせるから，結論が得られた．(もちろんこれは「証明」ではない．一般に重心をこのように「定義」すると，直感的な重心の概念とはずれたものにならない，ということだと思って欲しい)．

以上より D を x 軸の周りに回転させて得られる図形の体積は，重心を回転させて得られる円の周長と D の面積の積，となることがわかる（パップス-ギュルダンの定理）．

6-4 考えている曲面は方程式 $y^2+z^2=f(x)^2$ $(a \leqq x \leqq b)$ で表されているので，とくに $z>0$ の部分（曲面の丁度半分）は

$$z = F(x,y) = \sqrt{f(x)^2 = y^2} \qquad ((x,y) \in D := \{(x,y)|a \leqq x \leqq b, -f(x) \leqq y \leqq 1\})$$

と，関数のグラフで表される．したがって，式 (6.1) から求める面積 S の半分は

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \iint_D \sqrt{1-F_x^2-F_y^2}\,dx\,dy = \iint_D \frac{f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\,dx\,dy \\ &= \int_a^b \left[f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}\right] dx \\ &= \pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.\end{aligned}$$

この 2 倍が結論である．

6-5 (1) 区間 $[a,b]$ を，C が $y=f(x)$ のグラフで表される区間と $\dot{x}=0$ となる区間（この区間で C は x 軸に垂直な線分）に分ける．いま $I=[a',b']$ で曲線 C が $y=f(x)$ とグラフ表示されるなら，問題 6-4 から，その区間に対応する回転面の面積は

$$2\pi\int_{x(a')}^{x(b')} f(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}(x)\right)}\,dx = 2\pi\int_{a'}^{b'} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

となる．ただし $\dot{}=d/dt$ で，置換 $x=x(t)$ を行い，$y(t)=f\big(x(t)\big)$ であることに注意した．

一方，区間 $[a'',b'']$ で $\dot{x}=0$ のとき，必要なら区間を分割して，この区間で $\dot{y}$ が符号を変えないとしてよい．この範囲で曲面は平面上の円環になるので，面積は

$$\begin{aligned}\pi|y(b'')^2-y(a'')^2| &= \pi\left|\int_{a''}^{b''}\frac{dy^2}{dt}\,dt\right| = 2\pi\left|\int_{a''}^{b''} y\dot{y}\,dt\right| \\ &= 2\pi\int_{a''}^{b''} y|\dot{y}|\,dt = 2\pi\int_{a''}^{b''} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt\end{aligned}$$

となる．ここで $\dot{x}=0$, $y>0$ と $\dot{y}$ が定符号であることを用いた．

これらの総和をとれば結論が得られる．

(2) 曲線 C を線密度 1 の針金とみなす．区間 $[a,b]$ を分割し，各小区間を質点とみなすと，その質量 m_j, 位置ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ はそれぞれ

$$m_j = \Delta t_j, \qquad \boldsymbol{x}_j = \big(x(t_j), y(t_j)\big)$$

なので，問題 6-3 と同様にして，結論が得られる．

以上より，回転面の面積は，曲線の長さと，その重心の軌跡の長さの積である（パップス・ギュルダンの定理）ことがわかる．

6-6

(1) $$\iint_{D'} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/(\cos\theta+\sin\theta)} r^3\,dr = \frac{1}{6},$$
$$D' = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, r(\cos\theta+\sin\theta) \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

(2) $$\begin{aligned}\iint_{D'} uv\,du\,dv &= \int_{\frac14}^{\frac12} u\,du\int_{\frac{1}{u^2}}^{\frac4u} v\,dv \\ &+ \int_2^{\frac12} u\,du\int_{\frac2u}^{\frac4u} v\,dv + \int_2^4 u\,du\int_1^{\frac4u} v\,dv = 28\log 2 - 6,\end{aligned}$$
$$D' = \left\{(u,v)\,\middle|\, v \geqq 1, \frac{2}{u} \leqq v \leqq \frac{4}{u}, v \geqq \frac{1}{u^2}\right\}.$$

(3) $$\iint_{D'} u^2 v\sin^2 u\,du\,dv = \int_0^\pi u^2\sin^2 u\,du\int_0^1 v\,dv = \frac{1}{24}\pi(2\pi^2-3),$$
$$D' = \{(u,v)\mid 0 \leqq u \leqq \pi, 0 \leqq v \leqq 1\}.$$

(4) $$\iint_{D'} \sqrt{\cos\theta\sin\theta} r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\,d\theta\int_0^{\frac{1}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^2}} r^2\,dr$$
$$= \frac{1}{45}, \qquad D' = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq \frac{1}{(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta})^2}\right\}$$

(5) $$\iint_{D'} r^4\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi}} r^4\cos\varphi\,dr = \frac{1}{20},$$
$$D' = \left\{(r,\theta,\varphi)\,\middle|\, 0 \leqq \theta, \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, r(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\cos\varphi+\sin\varphi) \leqq 1\right\}.$$

6-7 問題のパラメータ変換のヤコビ行列式は $r^2\cos\varphi$, 考えている球体 D は

$$D' = \left\{(r,\theta,\varphi)\,\middle|\, 0 \leqq r \leqq R, -\pi \leqq \theta \leqq \pi, -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

に対応するので，求める質量は

$$\begin{aligned}\iiint_D \rho(r)\,dx\,dy\,dz &= \iint_{D'} \rho(r) r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^R r^2\rho(r)\,dr = 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^R r^2\rho(r)\,dr.\end{aligned}$$

6-8 （これは一変数関数の置換積分の問題である）問題に与えられた置換積分を行うと，

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(u)\,du = \int_0^1 \varphi'(tx)x\,dt = x\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$$

となる．ここで

$$\psi(x) := \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$$

とすると，これが求める ψ である．

問題 7 (84 ページ)

7-1 (1) 正の数 ε に対して

$$\int_\varepsilon^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\varepsilon^{\alpha+1}\right) & (\alpha \neq -1) \\ -\log\varepsilon & (\alpha = -1) \end{cases}$$

である．$\varepsilon \to +0$ で右辺が収束するための必要十分条件は $\alpha + 1 > 0$.

(2) 正の数 M に対して

$$\int_1^M x^\beta\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\beta+1}\left(M^{\beta+1}-1\right) & (\beta \neq -1) \\ \log M & (\beta = -1) \end{cases}$$

である．$M \to +\infty$ で右辺が収束するための必要十分条件は $\beta + 1 < 0$.

(3) 正の数 M に対して

$$\int_0^M e^{-ax}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1-e^{-aM}\right) & (a \neq 0) \\ M & (a = 0) \end{cases}$$

である．$M \to +\infty$ で右辺が収束するための必要十分条件は $a > 0$.

7-2 まず，区間 $[0,1]$ で $0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ だから

$$0 \leqq e^{-x}x^{s-1} \leqq x^{s-1} \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

ここで $s > 0$ だから，命題 7.2 (1) から右辺の $(0,1]$ での広義積分は収束する．したがって，事実 7.5 から

$$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,dx \qquad \text{は収束する．}$$

一方，区間 $[1,+\infty)$ での広義積分は，命題 7.9 から収束する．

7-3 まず例 7.1 の (3) から $\Gamma(1) = 1$ であることがわかる．さらに，部分積分法の公式から，正の数 M に対して

$$\begin{aligned}\int_0^M e^{-x}x^s\,dx &= \int_0^M \left(-e^{-x}\right)' x^s\,dx = -\left[e^{-x}x^s\right]_0^M + s\int_0^M e^{-x}x^{s-1}\,dx \\ &= -e^{-M}M^s + s\int_0^M e^{-x}x^{s-1}\,dx\end{aligned}$$

となるが，$M \to +\infty$ のとき右辺第 1 項は，系 7.8 より 0 に収束するので，$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つ．とくに，正の整数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = (n-1)!.$$

7-4 区間 $(0, \frac{1}{2}]$ で

$$0 \leqq (1-x)^{q-1} \leqq M, \qquad M = \begin{cases} 1 & (q \geqq 1) \\ 2^{1-q} & (0 < q < 1) \end{cases}$$

であるから，

$$0 \leqq x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqq Mx^{p-1} \qquad \left(0 < x\frac{1}{2}\right).$$

ここで $p > 0$ だから，命題 7.2 (1) から右辺の $(0, 1/2]$ での広義積分は収束する．したがって，事実 7.5 から

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

は収束する．$1-x$ を t とおいて置換積分を行えば，

$$\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

も収束するので結論が得られる．

7-5 (1) 命題 7.2 の (3) から収束するための必要十分条件は $s > 0$ で，

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{M\to+\infty}\left(\frac{1}{s}\left(e^{-sM}-1\right)\right) = \frac{1}{s}.$$

(2) 収束は命題 7.9 から言える．さらに

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt \\ &= 0 + \frac{1}{s}\times\frac{1}{s}.\end{aligned}$$

(3) 同様に部分積分法の公式から

$$\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}t^k e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \frac{k}{s}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-st}\,dt \\ &= \frac{k}{s}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-st}\,dt\end{aligned}$$

なので，数学的帰納法が使える．

(4) 命題 7.2 の (3) から

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt$$

は $a - s < 0$ のとき収束する．

(5)　$\omega = 0$ のときは，(1) なので，$\omega \neq 0$ の場合を考える．正の数 M に対して

$$\begin{aligned}
\int_0^M e^{-st}\cos\omega t\,dt &= \int_0^M e^{-st}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)' dt \\
&= \left[\frac{1}{\omega}e^{-st}\sin\omega_t\right]_0^M + \frac{s}{\omega}\int_0^M e^{-st}\sin\omega t\,dt \\
&= \frac{1}{\omega}e^{-sM}\sin\omega M - \frac{s}{\omega}\int_0^M e^{-st}\left(\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)' dt \\
&= \frac{1}{\omega}e^{-sM}\sin\omega M - \frac{s}{\omega^2}(e^{-st}\cos\omega M - 1) - \frac{s^2}{\omega^2}\int_0^M e^{-st}\cos\omega t\,dt.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{s^2+\omega^2}{\omega^2}\int_0^M e^{-st}\cos\omega t\,dt = \frac{1}{\omega}e^{-sM}\sin\omega M - \frac{s}{\omega^2}(e^{-st}\cos\omega M - 1)$$

だが，

$$e^{-sM} \leqq e^{-sM}\sin\omega \leqq e^{-sM}, \quad e^{-sM} \leqq e^{-sM}\cos\omega \leqq e^{-sM}$$

だから，$s > 0$ のときは $M \to +\infty$ とすると，$e^{-sM}\cos\omega M \to 0$, $e^{-sM}\sin\omega M \to 0$．このことから，

$$\frac{s^2+\omega^2}{\omega^2}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt = \frac{s}{\omega^2}$$

となり，結論が得られた．

(6)　問題 (5) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
\int_0^M e^{-st}\sin\omega t\,dt &= -\int_0^M e^{-st}\left(\frac{\cos\omega t}{\omega}\right)' dt \\
&= -\left[\frac{1}{\omega}e^{-st}\cos\omega t\right]_0^\infty - \frac{s^2}{\omega}\int_0^\infty e^{-st}\cos\omega t\,dt \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{s^2}{\omega(s^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$