

2018年9月27日(2018年10月11日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 1

お知らせ

- 早速で申し訳ありませんが, 来週10月4日は休講とします. 次回講義は10月11日になります.
- 提出物の締め切り(既定値は講義の翌日)は, 今回に限り10月5日(金)17:00とします.

講義概要

重要なポイント

- <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2018/geom-1/> (この授業の公式ページ)
- <http://www.official.kotaroy.com/class/2018/geom-1/> (この授業のページ; ミラーサイト)
- <http://www.ocw.titech.ac.jp/> (東工大 OCW)
- 本館 2階 231 (山田の部屋; 提出物ポストはここ)
- 本館 3階 332B (数学事務室; 答案返却など)

科目名など 幾何学概論第一 (MTH.B211) (木曜日・3/4時限・理学院数学系)

担当者 山田光太郎 (理学院数学系) kotaro@math.titech.ac.jp

講義の概要 線形代数学, 微分積分学から必要な事項を整理したのち, 以下の事項を学ぶ: 平面曲線のパラメータ表示・弧長・曲率・曲率の幾何学的意味・フルネの公式・平面曲線の基本定理・空間曲線の曲率と捩率・空間曲線の基本定理. 平面・空間曲線の微分幾何学の基本事項を通して, これまでに学んだ線形代数学・微分積分学が使われる場面を体験し, 変換・不変量といった現代幾何学の基本的な概念を知る.

到達目標 平面曲線, 空間曲線の微分幾何学の基本的な事項を学ぶ. (1) 曲線の曲率や捩率を合同変換やパラメータ変換で不変な量としてとらえ, それが曲線を決定すること(曲線論の基本定理)を理解する. (2) 閉曲線の位相幾何学的な性質と曲率の関係を通して, 局所的な概念と大域的な概念の違いを知る. (3) これらの理論を具体例の計算によって確認する. 本講義の続編として「幾何学概論第二」が第4クォーターに開講される.

教科書 梅原雅頭・山田光太郎『曲線と曲面』改訂版(裳華房)

正誤表: <http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html>

成績評価の方法

- 授業日程の項にある定期試験を受験することが単位を得るための必要条件です.(十分条件ではありません). やむを得ない理由で試験を受けられない方は(可能な限り)事前に電子メールにて講義担当者までご連絡ください. 連絡なしに試験に欠席した方は, 原則として単位を得る権利を失います.
- 成績は主として定期試験の得点で決めます. 定期試験の成績が余りよくない場合(とくに定期試験だけでは不合格になってしまう場合)に以下の「提出物」の成績を考慮します.
- 授業後に(1) 講義資料にあげた問題のうち一つの解答(2点); (2) 前回までの授業内容に対する質問あ

- るいは講義・講義資料の誤りの指摘 (3点) を提出してください。これを 1 回 5 点満点で評価します。
- 提出方法 所定の用紙に記入し、授業の翌日 金曜日の 17 時 00 分までに山田の部屋 (本館 2 階 231) の前のポストに提出してください。所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません。
- キーワード 毎回、講義のあとに、OCW に登録したメールアドレス (既定値は m アドレス) にキーワードを送信します。提出用紙の該当欄にキーワードを記入してください。
- 注意 いただいた質問にはできる限り回答します。なお、質問および回答の内容は公開しますのでご了承下さい。とくに質問の文章はできる限り原文を尊重しますので、誤字に気をつけてください。
- おまけ 提出用紙には授業に関する感想、意見の記入欄を設けます。いただいた御意見は個人が特定できない形で公開いたします。なお、ご意見等の内容は成績に一切影響いたしません。
- いわゆる出席点はつけません。したがって出席もとりません。しかし、出席と関わりなく 授業時間中に連絡したことは伝わっている とみなします。
 - 試験後、答案を返却し、成績を確認していただきます。採点、成績に関するクレーム・質問は期間を限って受け付けます。なお、成績に関する議論は、提出されたものにかかれたもののみを材料とします。

FAQ

- Q: なぜ質問を提出してもらいそれを公開するのか
 A: わかったつもりのことも「質問を探す」つもりで思い返すとわかっていない、ということを経験してもらおう。
 A: 意図が伝わるように質問の文章を書く、すなわちプレゼンテーション能力を身につけてもらう。
 A: 受講者に何が伝わっていて、何が伝わっていないかを担当講師が知るための材料とさせてもらう。
 A: クラスメイトの質問を読むことによって、自分の見逃していた点に気がついてもらう。
 A: クラスのコミュニケーションの材料にってもらう。
- Q: 講義資料などの誤りの指摘が評価されるのはなぜ A: 少なくとも講義資料を読んでいることがわかるから
- Q: 提出物の締切が翌日なのはなぜ
 A: (直後でないのは) 授業後の復習の時間を期待しているからです。
 A: (もっと後ではないのは) 提出物の整理の時間の問題、すなわち山田の処理能力の問題です。
- Q: 提出用紙の体裁を指定するのはなぜ
 A: 用紙サイズが異なったり、氏名などがまちまちの箇所に書かれたものを整理したくない。
 A: スキャナで読み込んで保存するのに手間を掛けたくない。
- Q: 全てわかっているので質問はありません。 A: そんなことはありません。
- Q: 質問を言葉にできません A: その訓練が目的のひとつ。
- Q: 質問・ご意見などを講義資料として公開するのはなぜ A: 今流行りの双方向授業。
- Q: 講義資料に掲載される質問・ご意見で、誤字を「原文ママ」としているのはなぜ
 A: 漢字を間違えて書いた方は覚えなおして欲しいからです。「講義」「成績」などという字を書いてはいけません。
- Q: 出席をとらないのはなぜ A: この内容を理解するのに聴講は必須とは思えないので。
- Q: キーワードをメールで送信するのはなぜ
 A: しばしば、講義に関するお知らせを電子メールで送信しますが、見ていない人が多く見受けられるので、メールを見る習慣をつけてもらうためです。
 A: 講義に関するお知らせのうち、重要なのは日程の変更。とくに自然災害などによる休講のお知らせは(教務よりも)早めに送るようになっています。後期は台風・降雪などが予想されますので、メールを確認する習慣をつけてください。

1 準備

内積 この講義では標準的な内積 “ \cdot ” が与えられた \mathbb{R}^n のことをユークリッド空間^{*1}という。ここではとくに $n = 2, 3$ の場合を考える。ベクトル $v, w \in \mathbb{R}^n$ を列ベクトルと見なしたとき $v \cdot w = {}^t v w$ である。ただし右辺の ${}^t v$ は v の転置^{*2}を表し、右辺の積は行列の積を表す。これを用いて、ベクトル v の大きさを $|v| = \sqrt{v \cdot v}$ と定める。また、 \mathbb{R}^n の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|$ で定める。ただし O は座標原点である。

直交行列 実数を成分とする n 次正方行列 A が直交行列^{*3}である、とは ${}^t A A = A {}^t A = I$ ($= n$ 次単位行列) が成り立つことである。

問 1.1. 次数 n の実正方行列 A が直交行列であることと、次の各々は同値であることを示しなさい：

- 任意のベクトル $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対して $(Av) \cdot (Aw) = v \cdot w$.
- 任意のベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対して $|Av| = |v|$.
- A の n 個の列ベクトルが \mathbb{R}^n の正規直交基をなす。

問 1.2. • 直交行列の行列式の値は 1 または -1 であることを示しなさい。

- 次を確かめなさい：
 - 単位行列は直交行列である。
 - 2 つの n 次直交行列の積は直交行列になる。
 - 直交行列は正則でその逆行列は直交行列である。

このことを「 n 次直交行列全体の集合 $O(n)$ は行列の乗法に関して群をなす」という。

$O(n)$ を n 次直交群ということがある。

- n 次直交行列のうち行列式が 1 であるものの全体 $SO(n)$ は群をなすことを確かめなさい。 $SO(n)$ を n 次特殊直交群という。

問 1.3. 次の 2 つの条件をともに満たす 3 次の直交行列の例を具体的に一つあげなさい。

- (1) 9 つの成分はすべて 0 でない。(2) 行列式は 1。

問 1.4. • 直交行列の固有値は絶対値 1 の複素数であることを示しなさい。

- 奇数次の直交行列で行列式が 1 であるものの固有値の 1 つは 1 であることを示しなさい。
- 行列 $A \in SO(3)$ に対して、次をみたく $P \in SO(3)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在することを示しなさい。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- $A, B \in SO(3)$ が、固有値 1 の固有空間を共有するならば $AB = BA$ であることを示しなさい。

2018 年 9 月 27 日 (2018 年 10 月 11 日訂正)

*1 内積：an inner product; ユークリッド空間：the Euclidean space; 列ベクトル：a column vector.

*2 転置：transposition; (ベクトルの) 大きさ：the length (norm) of the vector; 距離：the distance; 座標原点：the origin.

*3 直交行列：an orthogonal matrix; 単位行列：the identity matrix; 正規直交基：an orthonormal basis.

等長変換 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ が等長変換であるとは、各 $P, Q \in \mathbb{R}^n$ に対して次が成り立つことである*4：

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q).$$

問 1.5. ベクトル x を \mathbb{R}^n の点 (原点を起点とする位置ベクトル) とみなすとき、

$$(1.1) \quad f: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + b \in \mathbb{R}^n \quad (A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n)$$

であたえられる f は \mathbb{R}^n の等長変換である。このことを示しなさい。

定理 1.6. \mathbb{R}^n の等長変換は (1.1) の形に限る。

定義 1.7. \mathbb{R}^n の等長変換を合同変換ということもある。とくに (1.1) の形をした合同変換のうち $A \in SO(n)$ となるものを向きを保つ合同変換、そうでないものを 向きを反転する合同変換という。

問 1.8. \mathbb{R}^n の等長変換は $f: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax + b \in \mathbb{R}^n$ ($A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$) の形となることを次により示しなさい：(1) 等長変換 f に対して $b := f(0)$, $g(x) = f(x) - b$ とおくと $g(0) = 0$ である。(2) $|g(x)| = |x|$, $|g(y) - g(x)| = |y - x|$ が成り立つ。(3) $g(x) \cdot g(y) = x \cdot y$ が成り立つ。(ヒント： $2x \cdot y = |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2$.) (4) g は線形写像である。(ヒント： $g(x + y) - g(x) - g(y)$, $g(\alpha x) - \alpha g(x)$ の大きさ.) (5) 線形写像 g の表現行列を A とおくと $A \in O(n)$ 。

多変数関数の微分法 ユークリッド空間 \mathbb{R}^m の領域 (連結な開集合) U から \mathbb{R}^n への写像 f を考える：

$$(1.2) \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

問 1.9. とくに $n = 1$ のとき、(1.2) の f が C^r -級 ($r = 0, 1, 2, \dots, \infty$) であることの定義を述べなさい。

この講義では、簡単のため C^∞ -級のことをなめらか、あるいは可微分という*5。

定義 1.10. 写像 (1.2) を $f: (x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ と成分表示したとき、 f が C^r -級 ($r = 0, 1, \dots, \infty$) である、とは $j = 1, \dots, n$ に対して $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$ が C^r -級であること、と定める。

定義 1.11. 写像 (1.2) が C^1 -級であるとき、点 $p \in U$ における f の微分またはヤコビ行列を*6

$$df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

なる $n \times m$ 行列と定める。とくに $n = m$ のとき、

$$J_p := \det(df_p) \left(= \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right)$$

を f の p におけるヤコビ行列式という。

*4 等長変換：an isometry; 合同変換：a congruence; 向きをたもつ (反転する)：orientation preserving (reversing)

*5 なめらか：smooth; 可微分：differentiable.

*6 微分：the differential; ヤコビ行列：the Jacobian matrix; ヤコビアン：the Jacobian.

合成関数の微分法 (チェーン・ルール) 写像 $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow \mathbb{R}^l$ ($f(U) \subset V$) がいずれも C^1 -級るとき, 合成写像 $g \circ f$ の微分は次で与えられる:

$$(1.3) \quad d(g \circ f)_p = (dg_{f(p)})(df_p)$$

問 1.12. • 式 (1.3) の右辺の行列の積が意味をもつことを確かめなさい.

- これらの写像を

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)), \\ g(y_1, \dots, y_n) &= (z_1(y_1, \dots, y_n), \dots, z_l(y_1, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

と書くとき (1.3) は次のように書き換えられることを確かめなさい:

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, l).$$

陰関数定理

定理 1.13 (逆関数定理). 領域 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された C^∞ -級写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ が, 点 $p \in U$ において $J_p = \det(df_p) \neq 0$ を満たしているとする. このとき, U における p の近傍 V が存在して

$$f|_V: V \rightarrow f(V) \subset \mathbb{R}^n$$

は全単射, かつその逆写像 f^{-1} が C^∞ -級となる.

問 1.14. • $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ の開区間 I 上の可微分関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が $f'(x) \neq 0$ を I 全体で満たしているならば, $f(I)$ 上で定義された f の可微分な逆関数 $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ が存在する. このことの原因を述べなさい.

- \mathbb{R}^n の領域 U 上で定義された可微分写像 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ のヤコビ行列式が U の各点で 0 でなかったとしても, $f(U)$ 全体で定義された逆写像が存在しないことがある. そのような例を一つ作りなさい.

定義 1.15. 領域 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ の間の写像 $f: U \rightarrow V$ が微分同相写像であるとは, 次を満たすことである^{*7}:

- f は全単射である.
- f は U で可微分 (C^∞ -級) である.
- f^{-1} は V で可微分 (C^∞ -級) である.

この言葉を用いればヤコビ行列式が 0 でない可微分写像は局所的に微分同相写像であるといえる.

問 1.16. 微分同相写像 $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ に対して $d(f^{-1})_q = (df_p)^{-1}$ ($q = f(p)$) を示しなさい.

定理 1.17 (陰関数定理の特別な場合). 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への可微分写像 $F: U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$ と $(x_0, y_0) \in U$ が

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たしているとき, (x_0, y_0) の近傍 V と x_0 を含む \mathbb{R} の区間 I , I 上で定義された可微分関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $V \cap \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ が成り立つ. とくに $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つ.

^{*7} 微分同相写像: a diffeomorphism; 逆関数定理: the inverse function theorem; 陰関数定理: the implicit function theorem

問 1.18. 写像 $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$ に逆関数定理を適用することにより, 定理 1.17 を示しなさい.

問 1.19. 定理 1.17 の関数 f の微分は次を満たすことを確かめなさい:

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (y = f(x)).$$

問 1.20. \mathbb{R}^2 の領域 U 上で定義された可微分関数 $f(x, y)$ に対して

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を対応させる作用素 Δ をラプラシアンあるいはラプラス作用素という*8. いま, 極座標 $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ で f を表示するとき Δf を (r, θ) に関する偏導関数で表すと

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

となることを示しなさい. さらに, 3 変数関数で同じことを試みなさい.

いくつかの初等関数

三角関数と逆三角関数

- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.
- $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$ かつ $0 \leq y \leq \pi$.
- $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$ かつ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
- $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$ かつ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

双曲線関数

- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$: hyperbolic cosine; 双曲的余弦 (そうきょくてきよげん)
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$: hyperbolic sine; 双曲的正弦 (そうきょくてきせいげん)
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$: hyperbolic tangent; 双曲的正接 (そうきょくてきせいせつ)

問 1.21. • 逆三角関数の微分公式を作りなさい.

- $\cosh x$ は x の偶関数, $\sinh x, \tanh x$ は奇関数であることを示し, これらの関数のグラフを描きなさい.
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ ($\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$).
- 逆関数: $x = \sinh y$ なら $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.
 $x = \cosh y, y \geq 0$ なら $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
 $x = \tanh y$ なら $y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$.
- 高等学校で学んだ三角関数の公式に対応する双曲線関数の公式を作りなさい.

問題

1-1 正の整数 n に対して行列式が -1 となる n 次直交行列 A をとる.

*8 ラプラシアン: the Laplacian

- A の固有値のうち一つは -1 であることを示しなさい。
- \mathbb{R}^n の $(n-1)$ 次元部分空間 V で, 線形変換 $f_A: \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ によって不変なものが存在することを示しなさい。

1-2 正の定数 a と C^∞ -級の 2 変数関数 $f(x, y)$ が

$$e^{az} \cos 2x = \cos 2y \quad (z = f(x, y))$$

を満たしているとする。さらに, 関数 f が

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$$

を満たすとき, a の値を求めなさい。

1-3 なめらかな 1 変数関数 $F(t)$ に対して $f(x, y) := F(x + y)$ とおく。この関数 f がさらに

$$f_{xy} = \sin f$$

を満たすような 1 変数関数 F のうち $F(0) = \pi$, $F'(0) = 2$ となるものを求めなさい。