

2018 年 10 月 11 日  
山田光太郎  
kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 2

### お知らせ

- 提出物は講義の際に返却します。なお、返却された用紙に赤字で書かれているコメントは山田用のメモなので、多分読めないと思います。コメント、質問への回答はこの用紙にあるものが正式です。
- 今回から、提出物の締め切りは講義翌日の金曜日 17 時とします。

### 前回までの訂正

- 予定表の第 4 回講義の日程が間違っていました：(誤) 2018 年 10 月 24 日 (正) [2018 年 10 月 25 日](#)。
- メールでキーワードをお送りしましたが、提出期限が間違っていました。(誤) 2018 年 10 月 11 日 (正) [2018 年 10 月 5 日](#)。本日提出されたかたも受け取ります。
- キーワードを送ったメールの本文：樹国 ⇒ [受講](#)
- 講義資料 1, 1 ページ, 「重要なポイント」の最初の 2 つの URL のうち 2017 ⇒ [2018](#)
- 講義資料 1, 6 ページ, 問題 1-1: 正の奇数 ⇒ [正の整数](#)
- 講義資料 1, 7 ページ, 問題 1-3: 一変数関数  $F$  を求めなさい ⇒ [1 変数関数  \$F\$  のうち  \$F\(0\) = \pi, F'\(0\) = 2\$  となるものを求めなさい](#)。

### 授業に関する御意見

- 小林先生の“曲線と曲面の微分幾何”は持っていますが、山田先生の教科書は持っていません。買って山田先生を支援したほうがいいですか？授業は小林先生の本だけで大丈夫ですか？  
山田のコメント：手元に教科書があることを前提に講義します。たとえばページや章を引用します。また、小林先生の本と用語・記号が異なる場合があります。以上のことをご了解の上で購入していただけないのであればしようがないですね。
- 板書の文字が大きくて見やすかった。山田のコメント：そうでしょう。
- 証明をもっと重視してほしいです。不動点定理（逆函数定理の定理の証明に必要）などの証明も教えてほしいです。  
山田のコメント：それは解析学の授業で扱うべきです。
- Web で資料を公開しているのが素晴らしいと思います。山田のコメント：普通なのでは？
- 提出対象問題の解答も公開した方がいいのではないのでしょうか。(毎年問題を変えなければならず大変だとは思いますが)  
山田のコメント：実は毎年変えています。次の回の講義で皆さんの解答を踏まえて解説していますので、書いたものは公開しません。
- 授業のはじめに前回の演習問題の解答を配っていただければ助かります。そして、例題も講義資料に入れてほしいです。  
山田のコメント：解答は配布しません。講義で解説あるいはヒントを出します。例題は講義資料や教科書の問題を見てください。クラスの何人かで共同して解答を作って配布しては？
- 資料末尾の問題が難しく感じた。 $n$ : 奇数の条件を使っていないためとても不安(易くすべき、という意味ではないです)。  
山田のコメント：たしかに奇数は不要ですね。
- キーワードの記されたメールにかかれている提出物締切が 10/11 になっていますが、期日が延長されたのでしょうか。  
山田のコメント：単純にミスです。
- 講義資料がまとまっているので、授業中に理解することに集中することができ、とてもうれしいです。  
山田のコメント：はい、本題に入ると、教科書の引用になるかもしれません。
- 面白い。山田のコメント：そう？
- 1 年時に復習が必要だと感じました。山田のコメント：当たり前では？

## 質問と回答

質問 1:  $A \in O(2)$ ,  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \ni \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2$  なる写像  $f$  に関して  $Ax$  は直線  $l: y = \tan \frac{\theta}{2}x$  に関して  $x$  を対称移動させたものである、と授業中に話だけあったのですが、 $x$ ,  $Ax$  の終点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  において、 $PQ$  の中点  $M$  が  $l$  上にあること、かつ  $PQ \perp l$  であることを示せば、上の主張が明らかになると考えていますが、正しいでしょうか。お答え：正しいです。実行できますか？

質問 2: 直交行列  $A$  行列値 (原文ママ: 行列式の何か?) だと回転って意味であるが、行列式の値が  $(-1)$  だと鏡映になってしまう。それはなぜですか。お答え：一般にはこのようなことは成り立ちません。2 次の直交行列は  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$  の形に表せことから 2 次のときは成り立ちます (と講義で説明した)。

質問 3:  $\mathbb{R}^n$  の合同変換が直交行列を用いた形で表されるが、 $\mathbb{C}^n$  ではどうなるのか。

お答え:  $\mathbb{R}^n$  の合同変換の定義はよいですね。 $\mathbb{C}^n$  の「合同変換」をどう定義しますか? それによって結論が変わります。

質問 4: 図形の合同というのは直交行列で移り得るといことなののでしょうか?

お答え: いいえ、合同変換で移り合うことです。

質問 5: 講義中の Jacobi 行列の所で、写像  $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  の  $U$  を連結な開集合としていましたが、連結でないとの点がまずいのでしょうか。お答え: この文脈ではとくにまずいことはありません。

質問 6: 正規直交基とはなんですか。google で調べた結果正規直交基底しかなさそうです。

お答え: Basis を「基底」と訳すか「基」と訳すかだと思います。用例は結構あると思います。少なくとも Google で <http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/h26kogi/141a1-13.pdf> が見つかりました。

質問 7: 問題 1-1 において  $A$  が実行列であると仮定して解いてしまいました。その仮定がないと解けないと思います。しめ切りまでには途中までしか解けませんでした。次回の授業までにとけるようにしておきます。

お答え: 講義ノート 3 ページの直交行列の定義を見よ。

質問 8: \*2 のセミコロンが全角になっています。お答え: 脚注のことですね。日本語横書き欧文・数式混じりの文書での「約物」の選択は悩ましいところ。日本語 (2 バイト文字) のあとは 2 バイトの約物を、1 バイト文字のあとは 1 バイトの約物をとるように努力していますが、混在している可能性があります。

質問 9: 「線形」という語は「線型」という語が元だと思われそうですが、これは「函数」→「関数」の「ように、時代が経つにつれて認められてきた表現でしょうか。

お答え: 多分そうだと思います。「函数」は「函」が戦後の「当用漢字表」に含まれなかったという事情もあるようです。

質問 10: 講義内で山田先生は等長変換を等長写像とおかきになり、変換であることを注意しながらも、訂正はなさいませんでした。これは等長変換でない等長写像の場合も重要であるということでしょうか。

お答え: はい。定義域と像域が同じでないと考えた場合は「変換」でないですね。

質問 11:  $E$  を  $4Q$  でつかうというのは  $p_u \cdot p_u$  のことでしょうか。お答え: はい。

質問 12:  $v \in \mathbb{R}^n$  を列ベクトルとみなすというのは  $v \in \{1 \text{ 行 } n \text{ 列行列全体のなす集合}\}$  と読み替えることだと理解していいでしょうか。お答え: ちょっと違う。(1) 1 行  $n$  列ではなく  $n$  行 1 列。(2) 右辺の中括弧はおかしい。実際、この書き方だと“1 行  $n$  列行列全体のなす集合”という集合ひとつを要素とする集合を表す。

質問 13: 無限回微分できないなら「無限回微分可能」と言っても混乱の余地がないのだから良いのではないか。

お答え: 「1 回微分可能」と同じような意味のとりかたができないのでは?

質問 14: 位相幾何学では位相同型より (弱) ホモトピー同値のほうが重視されるのではないか。

お答え: 大変狭い位相幾何学の解釈ですね。位相幾何学でも微分幾何学でも対象によって様々な同値関係を考えます。

質問 15: 幾何学の説明で代数幾何が抜けてましたが、これは代数に含まれるという認識だからですか。

お答え: はい。科研費の細目でもそうなっているはずですが。

質問 16: 配られたプリントで内積の定義が  $x \cdot y = {}^t x \cdot y$  となっていますが、虚数とかの場合が考えづらいので虚数空間の内積も書いてほしかったです。特に問 1.4 は虚数空間での内積を使うことがあると思います。

お答え: 明示的に使わなくても  $(x, y) := {}^t x \bar{y}$  を証明の内部で用いればよいだけです。この内積は線型代数学で学んでいるはずですし、この講義の他の文脈では使わないのでわざわざ明記はしません。ちなみにこういう文脈で「虚数空間」という語は使いません。「複素ベクトル空間」「複素数体上のベクトル空間」というのが普通だと思います。

質問 17: 線型代数の本などで内積は  $(a, b) = \sum a_k b_k$  の形でよく定義されるが、むしろ  $(a, b) = \sum a_k \bar{b}_k$  ので定義するのが内積の公理を見たす良い定義ではないかと思った。最初に述べた形で定義する理由を教えてください。

お答え: 最初から  $\mathbb{R}^n$  を考えているので、どちらも同じ。

質問 18: 外積はベクトルが見えてわかりやすいのですが, 内積の概念ももう少し分かりやすい見え方はありませんか?

お答え: 何と比べてもう少しでしょう. 力学の「仕事」って何でしたっけ.

質問 19: 2変数関数の極座標でのラプラシアンは比較的きれいな形なのに, 3変数の極座標でのラプラシアンが複雑になるのはなぜですか? お答え: 3変数の極座標が複雑だからではないでしょうか.

質問 20: O(2) の例の解説のところですぐに固有値が 1 であることや  $-1$  であることが分かったのが理解できませんでした. なぜですか? お答え: 固有多項式が  $t^2 - 1$  だからです.

質問 21: 一般の  $n$  次直交行列の幾何的な性質がわからなかった. お答え: 何をもって幾何的な性質というのかがわかりませんので, そうですか, とお答えするしかありません. 幾何的な性質がわからなくても定義は大丈夫ですよ.

質問 22: 4 ページ目のヤコビ行列式についての式の  $J_P = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$  の意味がわかりません.

お答え:  $J_P$  を右辺のような記号でも書くということ. 微積分学の教科書にはたいてい書いてあるはず.

質問 23: 解析学概論の講義では, まず陰関数定理 (2 変数の場合) を証明したあと, それを用いて逆関数定理を導くという流れになっていた. ただこの講義では, 逆関数定理を紹介し, それを用いて陰関数定理を示すという形式をとっている. この方式でも上手く証明できるのか (逆関数定理が示せば, そこから陰関数定理が示せそうだが, どうやって逆関数定理を示すか), もし授業等で証明に触れる時間が無いのであれば, そのやり方で証明している本の有名なものを教えて頂けるとありがたいです.

お答え: たとえば, 「多様体入門」(松島興三, 裳華房) の最初 (準備) の章はその形だったと思います.

質問 24: 問 1.3 の問題で 9 つの成分がすべて 0 でないを見つけないことができませんでした. 解答例と解き方をおしえてくれるとありがたいです. よろしくお願いします.

お答え: 3 次正方行列が直交行列であるための必要十分条件は, 3 つの列ベクトルが  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基をなすこと. 適当な  $\mathbb{R}^3$  の基底からグラム・シュミットの直交化をすれば運が良ければ (試行錯誤すれば) 求めるものが見つかる.

質問 25: 問 1.3 の具体例  $x$  はどうやればうまくつくれますか. 私は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

などの積を取って作ったのですが. お答え: よいアイデアだと思います.

質問 26: 問 1.4 は  $ABx = x$ ,  $BAx = x$ ,  $BA \in \text{SO}(3)$  であることから示されますか.

お答え: 1-固有ベクトルについてだけ示してもだめです. 任意の  $x$  に対して  $ABx = BAx$  を示す必要があります.

質問 27: 問 1.12 の右辺の行列の積が意味をもつとはどういうことを確認したらいいんですか.

お答え: 積が定義される型の行列であること.

質問 28: 問 1.14 の解答は以下の様なもので大丈夫でしょうか? 導関数  $f'$  が中間値の定理 ( $I = [a, b]$  として  $f'(a)$  と  $f'(b)$  の間の全ての値に対して  $f'(x)$  がその値となる  $x \in (a, b)$  の存在) を満たすことと  $f'(x) \neq 0$  ということより  $f'(x)$  の符号は区間で一定. よって  $f$  は単調ゆえに逆関数  $f^{-1}$  が存在. これが可微分であることは (中略)  $f^{-1}(x)' = 1/f'(f^{-1}(x))$  と (中略) 帰納的に導ける. お答え: それでよいです.

質問 29: 1-1 で, 線型変換  $A$  で不変な空間  $W$  と  $w \in W$  にたいして  $A(w) \in W$  ということで大丈夫でしょうか. それとも  $w \in W$  にたいして  $A(w) = W$  ということでしょうか.

お答え: 前者. 線形代数学の教科書で「不変部分空間」を調べてご覧ください.

質問 30: 問題 1-1 の 2 つ目の問の「 $\mathbb{R}^n$  の  $(n-1)$  次元部分空間で, 線型空間  $f_A: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$  によって不変なものが存在する」とは具体的にどういうことですか.

お答え: 書いてあるとおりのことです.

質問 31: 授業プリントの末尾の問いの 1-1 の 2 つめの  $\bullet$  についてですが, 「 $\forall A$  に対し  $\exists V$  が存在し  $f_A$  は不変」なのか, 「 $\forall V$  に対し  $\exists A$  が存在し  $f_A$  は不変」なのか分かりづらかったので, 任意や存在というひょうげんをつけ足していただきたかったです. お答え: 問題をちゃんと読みましょう. 行列  $A$  は箇条書きの前に与えられています. したがって, 箇条書きの中の言明は, その与えられた行列  $A$  に関するものです. 曖昧さはありません.

質問 32: 資料の中の問いに模範解答はありますか? お答え: 何が模範かの定義がないので存在しえません.

質問 33: この提出用紙は返ってくるのですか? 「問題」の答えは公開されるのですか? お答え: はい/いいえ.

質問 34: 4Q の木曜日ヒマだと言っていた数理計算の友人に幾何学 (原文ママ: これは誤りだと講義時間に説明したはずだが) を進めてみようかと思ったのですが, 第二だけとることは可能ですか. 第一の内容を理解しないと第二は厳しいでしょうか. お答え: 履修は可能. 理解できるかどうかは人による.

## 2 平面曲線の表示

復習 (陰関数定理)

定理 2.1 (逆関数定理, 教科書 199 ページ, 定理 A-1.5 の前半). 点  $a$  を含む数直線の区間上で定義された  $C^\infty$  級関数  $f(x)$  が  $\dot{f}(a) \neq 0$  をみたすならば,  $f(a)$  を含む区間で定義された  $C^\infty$ -級関数  $g(y)$  で  $g(f(x)) = x$ ,  $f(g(y)) = y$  をみたすものがただ 1 つ存在する. さらに,  $g$  の導関数  $\dot{g}$  は

$$\dot{g}(y) = \frac{1}{\dot{f}(g(y))}$$

をみたす.

定理 2.2 (陰関数定理, 教科書 200 ページ, 定理 A-1.6 の特別な場合). 領域  $U \subset \mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}$  への可微分写像

$$F: U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$$

と  $(x_0, y_0) \in U$  が

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たしているとき,  $(x_0, y_0)$  の近傍  $V$  と  $x_0$  を含む  $\mathbb{R}$  の区間  $I$  と, その区間  $I$  上で定義された可微分関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して,  $V \cap \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$  が成り立つ. とくに  $F(x, f(x)) = 0$  が成り立つ.

さらに  $f(x)$  の導関数  $\dot{f}(x)$  は次をみたす:

$$\dot{f}(x) = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)).$$

注: 第 1 版, 第 2 版ではテキスト 200 ページに誤植あり. 正誤表参照.

陰関数表示

- 「曲線  $F(x, y) = 0$ 」という文の意味.
- 曲線  $F(x, y) = 0$  が, 点  $(x_0, y_0)$  のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件 (テキスト 4 ページ)
- 陰関数表示の特異点 (テキスト 4 ページ)
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること (テキスト 3 ページ)

パラメータ表示

- パラメータ表示  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  (テキスト 4 ページ)\*<sup>1</sup>
- パラメータ表示の正則性と特異点 (テキスト 6 ページ)
- 自己交叉: パラメータ表示では特異点でない場合がある (テキスト 6 ページ)
- パラメータ変換 (テキスト 5 ページ)

2018 年 10 月 11 日

\*<sup>1</sup> パラメータ表示: parametrization; 正則点: a regular point; 特異点: a singular point; 極座標系: the polar coordinate system; 直交座標系 (デカルト座標系): the Cartesian coordinate system.

- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること (テキスト 4 ページ)
- 極座標表示された曲線 (テキスト 8 ページ)

### 弧長

- 曲線の長さの定義 (テキスト 7 ページ)\*2
- 弧長の不変性 (テキスト 9 ページの問題 2)

問 2.3. 区間  $I = [a, b]$  上で定義された  $C^\infty$ -級関数  $f$  のグラフを  $C$  とする:  $C = \{(x, f(x)) | x \in I\}$ .  $I$  の任意の分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  に対して

$$\mathcal{L}_\Delta := \sum_{j=1}^N d(P_{j-1}, P_j) \quad \left( P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, N \right)$$

とおく. ただし,  $d$  は  $\mathbb{R}^2$  のユークリッド距離を表す. このとき,

$$(*) \quad \sup\{\mathcal{L}_\Delta | \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

となることを示しなさい. (ヒント: 平均値の定理, 積分の定義, 連続関数の積分可能性.)

### 例

- 楕円 (テキスト例 1.1, 例 1.3 の最初の例)\*3

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

ただし  $a > 0, b > 0$ .

- レムニスケート (テキスト例 1.1, 例 1.3 の 3 番目の例の  $a = 1$  の場合)\*4

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

$$\gamma(t) = \left( \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

$$r^2 = \cos 2\theta.$$

問 2.4 (Cassinian oval カッシニの橙線と呼ばれる) の  $a = 1/\sqrt{2}, c = 1/2$  の場合.

問 2.4. 正の定数  $a, c$  に対して,  $\mathbb{R}^2$  全体で定義された 2 変数関数

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - c^2$$

を考える.

- ある正の数  $y_0$  が存在して  $F(0, y_0) = 0$  となるための, 定数  $a$  と  $c$  の条件を求めなさい.

\*2 曲線: a curve; 弧長: the arclength.

\*3 楕円: an ellipse; 放物線 (抛物線): a parabola; 双曲線: a hyperbola; 二次曲線 (円錐曲線): a conic.

\*4 レムニスケート: the lemniscate; カッシニの橙線: the Cassinian oval;

- さらに, ある関数  $f$  が存在して,  $(0, y_0)$  の近傍  $V$  で  $C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \cap V$  は  $y = f(x)$  のグラフでかけるための, 定数  $a$  と  $c$  の条件を求めなさい.
- さらにそのとき  $f'(0)$  の値を求めなさい.

さらに, 一般の  $a, c$  に対して, 集合  $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$  を, 関数のグラフで表されるような区間に分け, その関数の増減を調べることによって, この図形を図示しなさい.

- 標準的な 3/2-カスプ (テキスト付録 B-8)\*5

$$x^3 - y^2 = 0$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

## 問題

2-1 原点をひとつの焦点にもち, もうひとつの焦点が  $x$  軸の負の部分にあるような楕円は, 極座標  $(r, \theta)$  を用いて  $r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta}$  と表示されることを示しなさい. ただし  $\varepsilon \in [0, 1)$  は離心率\*6,  $a$  は正の定数である.  $\varepsilon = 1, \varepsilon > 1$  の場合にこの式は何を表すか.

2-2 原点を中心とする半径  $R$  の円  $C_0$  に半径  $r$  の円  $C_1$  が点  $P = (R, 0)$  で外接している. 円  $C_0$  はそのままにして,  $C_1$  を  $C_0$  の回りに滑らないように転がすとき, 点  $P$  はどのような軌跡を描くか. 2つの円の接点の座標を  $(R \cos t, R \sin t)$  ( $0 \leq t < 2\pi$ ) として,  $t$  によるパラメータ表示  $\gamma(t)$  をあたえ,

- $\gamma$  のおよその形を図示しなさい.
- $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$  となるための条件を求めなさい.
- $\gamma$  の特異点はどこか.
- なめらかなベクトル値関数  $e(t)$  となめらかな関数  $\rho(t)$  で,

$$|e(t)| = 1 \quad \text{かつ} \quad \dot{\gamma}(t) = \rho(t)e(t)$$

となるものを求めなさい.

2-3 次は正しいか:  $\mathbb{R}^2$  の領域  $U$  上で定義された可微分写像  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  のヤコビ行列式が  $U$  の各点で 0 でないとき, 可微分写像  $g: f(U) \rightarrow U$  で,  $f \circ g, g \circ f$  がともに恒等写像となるものが存在する.

\*5 カスプ: a cusp.

\*6 離心率: the eccentricity; 焦点: the focal point.