2018 年 10 月 18 日 (2018 年 11 月 01 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 3

お知らせ

- 提出用紙を片面 2 ページに印刷して，ステイプラで綴じて提出された方がいらっしゃいます．講義資料 1 の “Q and A” にあるように，提出物はスキャナで読みこんで保存します．上のような提出物があると，
  - 提出物を綴じている針を外す．
  - スキャナのデフォルトである両面読み取りモードを片面読み取りモードに変更する．
  - 該当の答案を読み取る．
  - 他に読み取った答案の束の該当箇所に上で読み取ったファイルの内容を入れ込む．
  - 変更したスキャナの読み取りモードを元にもどす．

  という余計な動作により時間を取られ，ストレスです．様式に合わない答案は無視しますので，ご了承ください．

前回までの訂正

- 講義資料 2 のタイトル：幾何学概論第二（MTH.B212）⇒ 幾何学概論第一（MTH.B211）
- 講義資料 2, 2 ページ質問 16：居すう ⇒ 虚数
- 講義資料 2, 3 ページ質問 25：具体れ ⇒ 具体例
- 講義資料 2, 4 ページ 17 行目：テキスト 200 ページに誤植 ⇒ 第 1 版，第 2 版ではテキスト 200 ページに誤植
- 講義資料 2, 6 ページ，問題 2-1 の 2 行目：$\varepsilon \in [0,1) \Rightarrow \varepsilon \in (0,1)$.
- 講義資料 2, 6 ページ，問題 2-3：$g\colon f(U) \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow g\colon f(U) \to U$.
- 講義中に黒板に描いた「円が局所的になめらかな関数のグラフとなる」説明で，$(-1,0)$ の近くに書いた式が “$y = -\sqrt{1-x^2}$” となってたそうです．“$x = -\sqrt{1-y^2}$” の誤りです．
- テキスト 267 ページ，12 行目：$8/9 \Rightarrow 2\sqrt{2}/3$; • テキスト 267 ページ，14 行目：$\frac{27}{256} \Rightarrow \frac{27\sqrt{2}}{256}$
- テキスト 282 ページ，下から 8 行目：$x\sin t + y\cos t - 2\sin t\cos t \Rightarrow x\sin t + y\cos t - \sin t\cos t$

授業に関する御意見

- もう少しゆっくり話していただけると助かります．　**山田のコメント：** 努力します．
- こんなこと（図省略；$1 = \sqrt{2}$ の絵，講義で紹介したのとちょっとだけ違う）を高校生の時に考えていたので今日しっくりきました．　**山田のコメント：** よかった．そういうことを「考えていた」ということを覚えているのっていいですね．
- 特異点が難しいです．　**山田のコメント：** だからこの講義の範囲では扱わない．
- 「考える範囲を複素数まで拡大して特異点を解消する」とか言う話をこの授業をうけて思い出した．
  山田のコメント： 複素数に拡張しただけでは特異点が解消できない場合が多いです．
- 陰関数定理が中々理解できないので復習が必要だと思った．　**山田のコメント：** そう?
- 孤長と書くと彼女いない歴みたいですね．　**山田のコメント：** そうですか?
- 金曜日提出はキツい．　**山田のコメント：** 月曜日提出だと山田がキツい．
- 最初の講義に教授も仰っていましたが，やはり題出物の期限が短くて困っています．　**山田のコメント：** 「題出物」って何?
- とてもおもしろいです．幾何学サイコー．　**山田のコメント：** どーも．
- $y = \cosh x$ のグラフを中点を意識して書くのは非常に感銘を受けました．　**山田のコメント：** 高等学校の教科書で見ました．
- サスペンダーが良く似合います．　**山田のコメント：** Thanks.
- 質問が長くなってしまいました．申し訳ありません．　**山田のコメント：** スペース内におさめてください．
- Web で資料を公開しているのは普通でないと思います．（実際，解析，位相空間，線形空間，応用解析，代数の講義ではされていたいないため）．それとも幾何系では普通という意味でしょうか．
  山田のコメント： そうですか．OCW は普通だと思っていましたが．
- 「特異点をもつ〜」を執筆されていたのは知りませんでした．今度読んでみます．　**山田のコメント：** ぜひ．

質問と回答

質問 1： この授業では扱える曲線に幅をもたせるために定義しないとされていましたが，それだと“任意の曲線は...”のような命題に答えられないのではないか．むしろ具体的な曲線について調べるのを重視すると捉えてよいか．

お答え： 「命題に答えられない」は「命題を述べられない」という意味だろうか．(「命題に答える」という言い方はあまり聞かない)．ここでは「一般の曲線について」という命題は述べません．「正則にパラメータづけられた曲線について」という形で述べますので，曲線自体の定義は不要です．

質問 2： 曲線の定義について，講義ではいろいろなものを曲線として扱いたい為，敢えて定義しない，と抑って（原文ママ：仰ってのことか？）いたが今回扱った曲線は $[0,1]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続単射の像，もしくは $(0,1)$ から $\mathbb{R}^2$ への連続単射の像のような形で曲線を定義してしまえばすべての曲線の定義を満たすように思えるのですが，そのような定義では献目（原文ママ：駄目のこと？）でしょうか？

お答え： 講義で扱ったレムニスケート（のパラメータ表示）は単射になっていませんね．テキスト §3 の回転数の議論などを考えると，自己交叉をもった曲線を扱うのが自然だと思うので，ご提案のような定義は駄目（献目ではない）です．

質問 3： 本講義では曲線を定義しないと聞いて，（個人的には曲線の定義として自然だと思った）$\mathbb{R}^2$ の部分集合で定式化しない理由を考えてみたのですが，レムニスケートが陰関数表示では原点が特異点になるが，パラメタ表示ではそうならないことはその一つでしょうか．そうだとすると，陰関数表示によるレムニスケートとパラメタ表示によるレムニスケートを違う対象とみなすことが帰結されますが正しいですか．それならば，陰関数表示による曲線全体のなす集合を $\{\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x})=0\} | f\in \mathrm{Map}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\}$，パラメタ表示による曲線全体の集合を $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$，$y=f(x)$ のグラフ全体の集合を $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ とし，曲線とはこれらの和集合であるといえば，一応定義できたことになっているでしょうか．

座標変換は幾何的性質を保存しなければならないと（直観的に）思うのですが，上のような定義だと $\mathbb{R}^2$ の部分集合が全ての幾何学的情報をもつと仮定してしまっていないでしょうか．

お答え： 4 つ質問がありますね．順番に，はい，はい，いいえ，質問の意味がわからない．3 番めは，関数の定義域が $\mathbb{R}$ 全体などである必要がないのでは? 4 番目：「幾何学的情報」とはなんの情報でしょうか．

質問 4： プリントや教科書にあるような現在有名な曲線を調べる中で都合の良い量や道具が整備され一般論ができあがったという認識でよいか？

お答え： 双方向的だと思います．ところで「という認識でよいか？」は「と考えてよいか？」と同じ意味ですか？よく「認識」という語を使う人がいますが，単に難しげな語を格好つけて使っているのか，それとも特別な意味を込めているのか，知りたいところです．

質問 5： 助変数を連続的に動かし，$x(t)$, $y(t)$ が滑らかでも，サイクロイドに特異点が現れるのはなぜでしょうか．各点収束と一様収束のようにさらに強い仮定を満たせば特異点は消えるのでしょうか．

お答え： だからパラメータ表示に正則性 “$\dot\gamma\neq\mathbf{0}$” をの条件を仮定する（ということを講義で説明した）．

質問 6： 授業中での特異点の十分条件があったが，これは曲線の場合，必要条件にもなりませんか？というのもヤコビの判定条件（$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) \leqq n-\dim X$，$X$ は曲線のことで，曲線なので $\dim X=1$，また $n=2$ より $\mathrm{rank}(F_x(x),F_y(x))=1$ となり，点 x は非特異だからです．

お答え： 陰関数表示された曲線の特異点の定義は，（この講義では）(F_x,F_y) が零になる点ですから，必要十分は当たり前では?

質問 7： 講義内で陰関数表示での特異点でもパラメータ表示の特異点となりえないことがあると言っていました（例えば $y^2-x^3-x^2=0$ 上の原点は前者の立場では特異点だが，後者で $(t^2-1,t(t^2-1))$ としてパラメータ表示すれば特異点とはならない)．しかし，なぜこのような事が起きるのでしょうか．

お答え： 特異点の定義が違っているから．

質問 8： 自己交叉することの定義とは何ですか?

お答え： 曲線のパラメータ表示 $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ (I は $\mathbb{R}$ の区間) が単射でないときに，$\gamma^{-1}(\mathrm{P}):=\{t\in I \mid \gamma(t)=\mathrm{P}\}$ の要素の個数が 2 以上なら，P （または $t\in\gamma^{-1}(\mathrm{P})$） で曲線 γ は自己交叉を持つ，という．

質問 9： 同じものを陰関数表示したときとパラメータ表示したときで特異点が別のものになりますが，異なるパラメータ表示をすることで特異点が異なった場合は曲線をどちらでとればよいかの指針はありますか？

お答え： これだけの状況では，ありません．「指針」は考えたい問題，目標があって初めて決まるものです．

質問 10： 特異点の種類を知りたいです．そして特異点はどんな特徴があるのか教えてほしいです．

お答え： 教科書 6–7 ページ，247–249 ページ．

質問 11： 特異点がわかることによって，そのグラフの概形のイメージがつかみやすくなると思うのですが，その他にうれしいことはありますか？

お答え： 「その他」の前の部分がどういうことを指しているのかわかりません．具体的にはなにがわかりやすくなるのでしょう．

質問 12： サイクロイド曲線はボールを転がしたときにもっとも早くゴールにつく曲線と聞きましたがただの直線の滑り台とどのくらい滑り終わるのに差がありますか？

お答え： 教科書，付録 B-1 (213 ページ以降) に必要な事項がすべて書いてありますので，実際に計算してごらんなさい．

質問 13： グラフの長さは C^1 上で収束するとのことですが，これが積分するときに一様連続であれば極限と積分が交換可能な事と似ていると感じました．これらに共通点はありますか．

お答え： 「C^1 上で収束」とはどういうことでしょう．「積分と極限の交換可能定理」のステートメントをきちんとしらべましょう．仮定は「一様連続」でしたっけ．

質問 14： 問題 2-1 で ε は離心率であると示されているが，自分で ε とおいたものを離心率であると証明すべきなのかわからなかった．

お答え： 「離心率」を用いて問題のような表示ができる，ということなのでさきに表示ができてしまったら ε が離心率であることを示す必要があります．

質問 15： 問題 2-1 について $\varepsilon \in [0,1)$ とありますが，$\varepsilon = 0$ のとき $r = a$，すなわち円を表します．これは 2 つの焦点が原点で一致する楕円とみなせますが，問題では片方の焦点が x 軸の負の部分にあると設定しています．細かいですが，どちらかをなおすべきではないでしょうか．

お答え： おっしゃる通りですね．

質問 16： 問題 2-1 に関して，離心率が 0 の場合も考えることがあるのか．楕円をどういうもの（例えば $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と表される曲線，2 定点からの距離の和が一定である点 P の軌跡，離心率 ε が $0 < \varepsilon < 1$ であるもの，など）として解けば良いのかと困った．「ただし $\varepsilon \in [0,1)$ は離心率」と書かれると，ε が $\varepsilon \in [0,1)$ であることに加え，ε が離心率であることを使う方が良いのだろうかとも思ったが，実際は準線を考えなくても解けるので ε が離心率であることは使わなくても解けるだろうし...

お答え： で，何がいいたいのか？離心率の定義はいろいろありますが，準線は必須でしょうか？ところで，楕円の特徴づけのうち「離心率 ε が $0 < \varepsilon < 1$ であるもの」だけは文として意味がありせんね．「もの」が何か特定されていませんから．

質問 17： 2-2 •1 は “$r = \ldots$ の時の例” と書くべきでしょうか．

お答え： r ってなんですか? ひょっとして γ?

質問 18： 2-3 は正しくないと思いますが，理由は「あくまで f は任意の点で可逆なだけで，f は一般に単射とは限らず大域的には逆写像が存在するとは限らないから」でよろしいですか．

お答え： よろしくありません．「点で可逆」とは通常の数学では用いない言葉と思います．「f が点 P で可逆」とはどういうことですか？

質問 19： 6 ページ目にある問 2-3 において，仮定された写像 f に対して，その逆写像 f^{-1} は存在するが f^{-1} が回微分でないような反例はありますか? ヤコビ行列式が 0 にならないということから逆写像 f^{-1} も可微分になってしまいそうですが.

お答え： おっしゃるとおりで，逆写像が存在すれば自動的に可微分になります．この問題では「逆写像が存在しない」例を求めています．

質問 20： 問 2-3 で反例があるならば，その f は非単射ゆえ，x 成分や y 成分が 2 回ある値をとる関数となるが，私が思いついた例では Jacobian が 0 となる点が $\mathbb{R}^2$ に線をかき，同じ値をとる点を分断してしまった．これは陰関数定理から理解できると考えて良いですか?

お答え： 最後の「これ」は何をさしていますか．あなたの考えた例がなにかわからないので「これ」がその現象を表しているのなら，お答えできません．前半の部分もおかしい：一般に $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が全単射なら x 成分は同じ値を無限回とるのでは？

質問 21： n 次固有多項式の λ^{n-2} 以降の係数はどうやって表されますか? 3 次の場合をやってみてもよくわからなかったです.

お答え： n 個の固有値の基本対称式になります．

質問 22： t での微分をドットで書くのは物理のノリですか？ $\frac{\partial F}{\partial y}$ は F_y で，$\frac{\partial x}{\partial t}$ は $\dot{x}$ になるのは微分のイメージの違いで使い分けている感じでしょうか?

お答え： この講義や教科書では $\frac{\partial x}{\partial t}$ を $\dot{x}$ と書いてはいないはずです．$\dot{x}$ と書くのはあくまでも $\frac{dx}{dt}$．微分記号 d と ∂ の違いは理解していますね．

質問 23： 関数と写像はどのように使い分ければ良いのでしょうか?

お答え： 文脈による．どちらも同じ意味で使うこともありますが，値域が数の集合（$\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$）となるような写像のことをとくに関数ということが多いような気がします．

質問 24： 数学の用語で「正則」と付くものはいくつかあると思いますが，何か共通する意味はあるのでしょうか．

質問 25： 正則空間，正則なパラメータ表示等いろいろ使われるが，「きれいな」みたいなイメージでしょうか？

お答え： regular の訳語．

質問 26： 滑らかな曲線の定義は特異点のない曲線というような理解でよいでしょうか？

お答え： 特異点はどう定義しますか．ご質問にはパラメータ表示とも陰関数表示とも書いていないので「特異点のない曲線」というフレーズが意味を持ちません．したがって，これでは「理解」になっていません．

質問 27： 曲線って何ですか．

お答え： この講義では定義しない，と述べましたね．あなたはどう定義したいですか?

質問 28： nbd って何の略ですか． **お答え：** neighborhood

質問 29： レムニスケートだけ “the lemniscate” となぜ ‘the’ がついているのでしょうか．相似をのぞいてきまっているからと思ったのですが，それなら放物線もそうですし．

お答え： ただ一つだからです．放物線も「ただ一つ」と考える文脈では the parabola．回転や拡大・縮小をしたものは異なるものである，という立場なら a parabola ということもあります．

質問 30： なめらかな曲線の定義として C^∞ 級の関数のグラフを挙げていらっしゃいましたが，この定義に従うと $y = 7x + 65$ などの直線もなめらかな曲線として扱っても良いということですか．

お答え： そうです．正三角形は二等辺三角形ですし，正方形は平行四辺形ですね．

質問 31： 位相の授業では平面は $\mathbb{R}^2$ の元の集合とみなしていて，図などは本質的には関係ないことと考えていたのですが（少なくとも自分はそう考えてました）幾何学では図から得られることを数式（$\mathbb{R}^2$ の世界）に落とし込んでいるのかなって感じたのですが，イメージ的にはそれで大丈夫ですか？

お答え： 「平面は $\mathbb{R}^2$ の元の集合」の意味がわかりません．$\mathbb{R}^2$ が平面なのでは? その後の文も意味がとれません．数学学習における「イメージ」は学習者個人によるものなので「イメージ的には大丈夫ですか」という質問は意味がないと思います．

質問 32： $\left\{\begin{smallmatrix} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta\end{smallmatrix}\right.$ とは以下の略記でしょうか：

$$f\colon \big((0,\infty),(-\pi,\pi)\big)\cup\{(0,0)\}\}\to\mathbb{R}^2 \qquad :\text{全単射}$$
$$\begin{cases} \binom{r}{\theta}\mapsto\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta} & (r,\theta)\neq(0,0)\text{ のとき}\\ \binom{r}{\theta}\mapsto\binom{0}{0} & (r,\theta)=(0,0)\text{ のとき}\end{cases}$$

お答え： こう書くと全単射ではないですね．極座標を正確に書くことにこだわってもしようがないような気がします．$(r,\theta)\in(0,\infty)\times S^1$ （S^1 は単位円周）と考えるのが自然ですが．

質問 33： 講義資料はシンプルにまとめてありますが，復習や予習をする上では教科書を使った方がいいですか?

お答え： はい．

質問 34： $y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow$ “$x=\cos y\wedge 0\leqq y\leqq x$” とは $\cos^{-1}x$ の定ギですか? $\Rightarrow$ は一般 (?) にはなり立たないとおもいますが．この質問による 3 点は内容によって点数がかわるのですか?

お答え： 前半：あなたが 1 年生のとき使った微積分の教科書では逆三角関数をどう定義しましたか？後半：はい．変わります．今回は様式違いで 0 点です．

質問 35： 授業内容に関する質問がありません．しかし 3 点がほしいです．その場合はどうしたらよろしいのでしょうか?

お答え： もちろん「講義資料などの誤りを指摘して正しいフォーマットで提出する」という道がありますが，それも嫌というのであれば，「試験問題がとけません．しかし単位がほしいのです．その場合はどうしたらよろしいのでしょうか」という問と同じで門前払い．

3 弧長パラメータと曲率 (テキスト §2)

■弧長パラメータ表示

- 速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという（12 ページ）. *1

■曲率・曲率円

- 曲率の定義（13 ページ (2.5) 式），計算法（13 ページ (2.6) 式；弧長パラメータ，13 ページ (2.7) 式；一般のパラメータ）.
- 曲率のパラメータ変換による不変性：定義から直接わかる.
- 曲率の回転・平行移動による不変性：(21 ページ 系 2.7).
- 曲率円（15 ページ），これが「曲線をもっともよく近似する円」であること（17 ページ，定理 2.4）

問 3.1. 懸垂線 $y = \cosh x$ に対して

- その弧長パラメータ表示を求めなさい.
- 曲率の定義から，弧長パラメータ s の関数として曲率を求めなさい.
- 上の結果とパラメータ変換の式を用いて曲率を x の関数で表しなさい.
- 一般の助変数表示に対する曲率の公式（テキスト 13 ページの式 (2.7)）を用いて懸垂線の曲率を求め，上の結果と一致することを確かめなさい.

■曲率が平面曲線を定めること

■フルネ

- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s)$，左向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s)$*2
- フルネ枠 $\mathcal{F} := (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})$
- フルネの公式（テキスト 21 ページ）

■曲線論の基本定理

- 平面曲線の基本定理（テキスト 22 ページ，定理 2.8）*3

2018 年 10 月 18 日 (2018 年 11 月 01 日訂正)

*1 弧長：arclength；曲率：the curvature；曲率円：the oscilating circle

*2 単位接ベクトル：the unit tangent vector; 単位法線ベクトル：the unit normal vector; フルネ枠：the Frenet frame.

*3 平面曲線の基本定理：the fundamental theorem for plane curves

問題

3-1 レムニスケート

$$\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

の $t=0$ を始点とする弧長関数を $s=s(t)$ とし，弧長パラメータでの表示を $\gamma(s)$ $(s(-\pi) \leqq s \leqq L = s(\pi))$ とする．$\gamma(s)$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき積分 $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)\,ds$ の値を求めなさい．さらに，同様のことを，楕円

$$(a\cos t, b\sin t) \qquad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

について行いなさい.

3-2 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s=s_0$ における曲率が 0 でないとする．このとき， 3 点 $\gamma(s_0)=\mathrm{P}$, $\gamma(s_0+t)=\mathrm{Q}_t$, $\gamma(s_0-t)=\mathrm{R}_t$ を通る円 C_t は $t\to 0$ とすると s_0 における γ の曲率円になることを示しなさい.

3-3 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ の曲率 $\kappa(s)$ が周期 L をもつ周期関数であるとき次の問いに答えなさい.

(1) 平面曲線の基本定理を用いて，行列 $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすようなものが存在することを示しなさい：

$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{b} \qquad \text{が任意の } s \in \mathbb{R} \text{ に対して成り立つ.}$$

ただし，$\gamma(s)$, $\boldsymbol{b}$ は 2 次の列ベクトルとみなしている.

(2) さらに $\gamma(0)=(0,0)$, $\gamma'(0)=(1,0)$ とするとき，(1) の A, $\boldsymbol{b}$ を κ を用いて表しなさい.