2018 年 11 月 1 日 (2018 年 11 月 08 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 5

お知らせ

- 定期試験の予告を行います．出席されていない方は講義 web ページにて資料を入手してください．
- 今回の講義は遅くとも 12 時 05 分には終了します．
- 今回の提出物の締め切りは，都合により **2018 年 11 月 5 日（月）14:00** とします．

前回までの訂正

- 黒板での解説で，レムニスケートの定義域 “$-\pi \leqq t \leqq \pi$” を “$-\pi \leqq 0 \leqq \pi$” と書いていたそうです．
- 講義 web ページ，授業日程：2017 年 10 月 11 日版 ⇒ 2018 年 10 月 11 日版
- テキスト 248 ページ，4 行目：$\gamma(t(u)) = \Phi \circ \gamma_0(u)$ ⇒ $\gamma_0(t(u)) = \Phi \circ \gamma(u)$
- 講義資料 3, 4 ページ, 質問 34：“$x = \cos y \wedge 0 \leqq y \leqq x''$ ⇒ “$x = \cos y \wedge 0 \leqq y \leqq x$”
- 講義資料 4, 3 ページ，質問 19 の回答 3 行目：空間重点曲線 ⇒ 空間充填曲線

授業に関する御意見

- この授業のおかげで 11 月 15 日が月曜日だと知りました．ありがとうございます．
  山田のコメント： どういたしまして．
- 黒板の字がたまに読めないです．
  山田のコメント： ごめんなさい．気をつけます．
- 閉曲線あたりの授業のスピードが個人的には速かったです．
  山田のコメント： ごめんなさい．
- ギロンが正則なパラメータか弧長パラメータで進んでいるのかわかりませんでした．
  山田のコメント： Sorry. 発端のところに書いているつもりなんですが．
- 半径 r の円の曲率はどの点でも $1/r$ だと思いますが，常に相似となる円でも r が違うと曲率も変わるのが，直観に反して面白いと感じました．
  山田のコメント： どうして直観に反するのでしょうか．半径をどんどん大きくしていくと円は直線に近づきますが，そのとき曲率は 0 に近づくのでは?
- 先生の授業とても高度で面白いです! 次回も楽しみにしています!
  山田のコメント： 高度なつもりじゃないんですけど...
- 提出用問題が難しすぎて困っております!!
  山田のコメント： そうですか．
- 昨日テキストを読み直して思ったことですが，山田先生の教科書テキスト P2 の図形 (iv) のラッコみたいな形がおちゃめでカワイイですね．
  山田のコメント： 実は英訳版では表紙にも控えめに登場しています．
- 計算力がいらない数学の分野にはどのようなものがありますか．学部レベルだけ見ていると位相空間論は代数・解析に比べて必要なさそうに見えますが，いかがでしょうか．あるいは基礎論なんかもそう見えます．
  山田のコメント： どうでしょうね．全く避けて通ることができるかどうかはわからないのでは？
- フルネの公式の図形的な意味が分かりやすかった．
  山田のコメント： なるほど
- 大域的性質の山手線の例が分かりやすかったです．
  山田のコメント： Thanks. 残念ながら地域限定ですが．

質問と回答

質問 1： 回転数が閉曲線の変形で変化しないとは $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の同相写像で変化しないという意味でしょうか.

お答え： いいえ，正則ホモトピー変形で変わらない．テキスト §3 冒頭に定義があります.

質問 2： 授業中に円はどのように変形しても回転数は 1 であると聞きました．ここでいう "変形" とはなにをさしているのですか?

お答え： 正則ホモトピー変形．テキスト §3 に定義があります.

質問 3： 講義内で曲率（局所的性質）から大域的な性質を理解できる，と言っていたのですが，逆に大域的な性質から局所的な性質が導かれるような具体的な事柄はありますか? 講義とつながる例を教えていただきたいです.

お答え： 各点での局所的な性質，という意味では（大域・局所の厳密な定義があるわけではないのでなんとも言えないが）難しいでしょう．たとえば「回転数 0 の閉曲線には，曲率が正の点と負の点が必ず存在する」「閉曲線には少なくとも 4 つ頂点がある」などは「ある局所的な性質をみたす点の存在」を言っていますが，大域的な性質ですよね.

質問 4： 閉曲線というのは，ある C^∞ 級の周期的なパラメータ γ（山田注：パラメータ表示のことか）が存在するということは，例えば γ が 2 回微分可能だが 3 回微分不可能であるとき，これは閉曲線ですか? このような γ は一見なめらかに思われますので閉曲線と呼んでもよいように思われますが.

お答え： 考える問題によっては，閉曲線をそのように定義してもよいと思います．C^2-級くらいは欲しいところですが．この講義では簡単のために C^∞ 級を仮定します.

質問 5： トポロジーの球の裏返しについての動画を見たことがあります．それによれば，表の球と裏の球の回転数がどちらも $+1$ であるから裏返し可能であるとのことです．このように 3 次元の回転数をどのように求めるかが気になり曲線と同様に曲率を曲面で面積分して 4π（全立体角）で割ればよいのかと考えました．教科書 84 ページに球の曲率は $1/a^2$ と書いてあるので回転数は $1/a^2 \times 4\pi a^2 \div 4\pi = 1$ となり確かに 1 になりました．考え方はあっていますか?

お答え： 違うと思います．$\mathbb{R}^3$ の閉曲面に対する「回転数」に対応する量は，埋め込みの mapping degree (写像度)．これが球面を「向きを保って埋め込んだ」ときと「向きを反転させて埋め込んだ」ときに同じ値になっているということ．このこと「だけ」から裏返しができることは示せないはず．ところで「球面」sphere と「球」ball は使い分けが必要な語です．覚えましょう.

質問 6： 初等函数で表されない函数というのは一般にどうやって扱うのですか? 今回ではもとめるものが曲率の積分であった為，そのような議論なしで良かったですが.... また $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 v}}\,dv$ が初等函数で表されないことはどうやって示されるのか気になりました.

お答え： 前半：「扱う」とはどういうことでしょう．たとえば階段関数 $f(x) = [x] = (x$ を超えない最大の整数$)$ は初等関数ではありませんが，値の計算をしたりグラフを描いたりするのは簡単ですよね．後半：自明でない．Liouville の定理か?

質問 7： $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 v}}\,dv$ が初等関数で表せないことの証明（が乗っている本）を教えてください．それがあまりにも難しいのであれば，何を勉強すれば理解できるようになるか，その勉強に適した本も併せて教えて頂けると幸いです.

お答え： たとえば（ちょっと古い本ですが)，一松信，「初等関数の数値計算 (シリーズ新しい応用の数学 (8))」，1974, 教育出版などはどうでしょう.

質問 8： 授業中での，内積を使ったフルネの公式は，3 次元以上でも通じると思った．3 次元の場合，曲率と捩率が公式の中にでてくると思う．逆にこの公式を成り立たせるものを曲率，捩率...とよべば，n 次元でもそういったものをえられるのかと感じました.

お答え： 次回少しコメントしますが，そうです．「内積を使ったフルネの公式」は「内積を使ったフルネの公式の証明」ですね.

質問 9： 曲率関数 $\kappa(s)$ が与えられたらそれに対応する曲線があり，そのパラメータ表示が $\gamma(s)$ がわかるということですか.

お答え： はい，それがテキスト 23 ページの (2.18) 式.

質問 10： $e(t) = \left(\cos\int_0^t \kappa(u)\,du, \sin\int_0^t \kappa(u)\,du,\right)$ というのはなぜですか.

お答え： 単位ベクトル $\boldsymbol{e}(t)$ を $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ と表すと $\dot\theta(t) = \kappa(t)$ （ということを講義で説明した).

質問 11： なぜ 3-1 $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ とおけるのですか?

お答え： どこですか? 3-1 の解説のなかで別の例を扱っただけですが.

質問 12： 今回の問 3-2 の解説の際，$(\boldsymbol{p}_\delta - \frac{\gamma(s_0+\delta)+\gamma(s_0)}{2}) \cdot (\gamma(s_0+\delta) - \gamma(s_0)) = 0$ の部分の式はどうやって出てきたものですか?

お答え： 円の中心と弦の中点を結ぶ線分はその弦に直交する.

質問 13： 3-3 の最後は加法定理の代わりに左図のような...（略，図形的に説明している；ちなみに図は右側にあった）という説明も楽で分かりやすいのではないかと思いました.

お答え： それが加法定理の説明そのものでは？

質問 14： 4-1 で積分ができなくなってしまったのですが，これは微分方程式をとけばよかったのでしょうか? それとももう少し上手く計算できますか?

お答え： 双曲線関数を指数関数になおしてから計算すると手間がかかることがあります．双曲線関数のままの方が三角関数のアナロジーが使えます.

質問 15： 4-2 の意味は，曲率円の半径以上に平行移動をすると自己交差が生まれる（下図のように；図省略）ということでよいですか？

お答え： だいたいよいです.

質問 16： 解析における爆発の定義を教えてください.

お答え： 文脈にもよりますが，有限の時間で無限大に発散することでは?

質問 17： 放物線の全曲率が π になるのは $y = x^2$ の時ですか.

お答え： 計算せよ.

質問 18： 回転数の話はハンドスピナー等に応用されているのですか?

お答え： ハンドスピナーをいじったことがないのでわかりません.

質問 19： 曲率の示す曲がり具合というのは直線と比べて初めて意味を持つものですか.

お答え： ご質問の意味がわかりません.「曲率の示す曲がり具合」とはなんのことですか? 「曲率の値」とは違うものですか?

質問 20： 何故提出用の問は計算量がとても多いのでしょうか? それともそれは私が計算が下手だからでしょうか? 木曜日の授業の後，金曜日の 5:00PM 提出でこれは重いです.

お答え： そんなに多いですか?

質問 21： 書くことがあまりないので一言．フルネの公式の偉大さが未だ理解できません.

お答え： そうですか（としか言いようがない).

5 空間曲線

■準備：外積

- 基底の正負（教科書 204 ページ）
- 外積（教科書 207 ページ）

■空間曲線の曲率と捩率

- 弧長によってパラメータ付けられた曲線（教科書 51 ページ）
- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$, 曲率 κ, 捩率 τ （教科書 51–52 ページ）
- フルネ・セレの公式（教科書 54 ページ）

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

問題

5-1 半径 a の球面上の曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) の捩率が 0 でないとき，曲率 κ と捩率 τ は

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2+\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2=a^2$$

を満たすことを示しなさい.

5-2 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s=s_0$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s_0)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き，$\gamma(s_0)=0$ となるような座標系をとる．このとき，$s=s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面，yz 平面，zx 平面への正射影はどのような形になるか，図示しなさい．ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする．

2018 年 11 月 1 日 (2018 年 11 月 08 日訂正)