2018 年 11 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一（MTH.B211）講義資料 6

お知らせ

- 今回で講義は終了．ご聴講ありがとうございました．定期試験は 11 月 22 日です．
- 来週 11 月 15 日は，月曜日の時間割ですので，この科目の講義・試験はありません．
- 授業評価アンケートにご協力ください．
- 今回は提出物はありません．

前回までの訂正

- 定期試験予告の日時：2017 年 ⇒ 2018 年
- 空間曲線のブーケの公式で，黒板に $\gamma(s_0+\delta) = \dots$ と書いたようですが，$\gamma(s_0+\delta) - \gamma(s_0)$ のことです．
- テキスト 271 ページ：§5，問題 2 の解答の 4 行目：$\gamma''' = (\dot\gamma, \ddot\gamma$ の一次結合$) + \frac{\ddot\gamma}{|\dot\gamma|^3}$ ⇒ $\gamma''' = (\dot\gamma, \ddot\gamma$ の一次結合$) + \frac{\dddot\gamma}{|\dot\gamma|^3}$
- テキスト 271 ページ：§5，問題 2 の解答の 8 行目：フルネの公式 ⇒ フルネ-セレの公式
- 講義資料 5, 1 ページ，授業に関するご意見の 3 番目へのコメント：ごめんんなさい ⇒ ごめんなさい
- 講義資料 5, 2 ページ，質問 4：塀強 k 線 ⇒ 閉曲線
- 講義資料 5, 2 ページ，質問 8，2 行目：な理立たせる ⇒ 成り立たせる

授業に関する御意見

- 3 次元よりも大きい次元での幾何学は図に表せないので理解も説明も難しいのではないかとふと思いました． **山田のコメント：** だから数式と論理がある．
- 防災訓練はとても大事だと思います． **山田のコメント：** そのとおり．
- 教科書の曲線はラッコなんですか？ネコではなく？ **山田のコメント：** 著者はネコのつもりで（線分とスプラインで）描いた．
- 双曲線関数教に入信するにはどのような本を読めばいいのでしょうか． **山田のコメント：** たくさん計算すればよい．
- 曲面上では，ある点から s だけ離れた点は無数にあるのに s で助変表示できるのは不思議と感じました． **山田のコメント：** だからできません．どこで，こういう助変数表示ができると聞きましたか？
- テストに関する質問です．持込できる用紙には何を書いても不正行為にならないし，その内容が点数に影響することもないということですか．あと時計を使っても良いでしょうか．
  山田のコメント： はい/ いいえ．時計はスクリーンに写します．

質問と回答

質問 1： 曲率は正の値しかとりませんが，捩率は負の値をとることもありえますよね．

お答え： だから，捩率の定義のしかた（符号）にふたとおりの流儀がある，ということを講義で説明しましたね．

質問 2： 教科書 55 ページ，式 (5.6) の導出方法がわからないのでお聞きしたいです． **お答え：** まず $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}$ を先に求めて $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{e}$.

質問 3： 線形常微分方程式の解の存在と一意性の証明はどの本を参照すればよいでしょうか？

お答え： 常微分方程式の教科書では，一般の正規型の常微分方程式の基本定理を示して，それをもとに線形の場合にさらに強い結果を示す，という筋になっていることが多いが，線形方程式だけに限れば，煩雑な議論がそれほど必要ないので，その部分だけ，「2017 年度幾何学特論 B1（2Q，MTH.B406）」の第 1 回講義ノートにまとめています．

質問 4： 曲率は直線から離れていく曲がりぐあい，ハンドルのきりぐあいという直感的なイメージの説明がありましたが，講義内で新たに定義された捩率にも曲率の場合のようなイメージはありますか？ **お答え：** 問題 5-2 がヒント．

質問 5： 曲率がハンドルならば捩率って何ですか？ **お答え：** 飛行機の操縦機構はよく知りません．

質問 6： $\mathbb{R}^n$ 上でも曲率や捩率のようなものは存在しますか．また，あるとすれば $\mathbb{R}^n$ における空間曲線の基本定理のような定理はあるのですか． **お答え：** はい．たとえば，丹野修吉「多様体の微分幾何学」（実教出版）の最初の方．

質問 7： 交代行列と直交行列の相性がいいということをうまく説明する方法はありますか？またフルネ・セレの公式以外で上記のことが確認できる例はありますか． **お答え：** 「直交行列全体がなすリー群に対応するリー環（リー代数）は交代行列全体のなすベクトル空間である」．初等的に述べると $\mathrm{SO}(n)$ に値をとる行列値（可微分）関数 $F(u)$ に対して，$F(u)^{-1}F'(u)$ は交代行列．

質問 8： $F(x,y,z) = 0$ と表せるものを曲面と呼んでいましたが，例えば $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ とすると $F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$ と一点になってしまうのですが，こういうものも曲面とみなすのですか？

お答え： 「陰関数表示された曲線」ですでにこういう例を見ましたね．同じ「ノリ」で曲面も定義しません．

質問 9： 今回の空間曲線では，弧張（原文ママ：弧長）パラメータ付けられた関数 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ で $\dot\gamma$ および $\ddot\gamma$ が消えていないものを考えていましたが， $\ddot\gamma(s) = 0$ となってしまう s がある場合にはその点での曲率は定義しないでいいのでしょうか．その場合でも曲率・捩率が空間曲線を一位に決めると言えるのでしょうか． **お答え：** $\ddot\gamma(s) = 0$ となる点で曲率は 0，捩率は定義されない．「この講義では，加速度が消えないもののみを考える」と宣言をしているので，空間曲線の基本定理もその枠内で考えています．

質問 10： 曲率はフルネ枠における曲線の $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ 平面上の情報で，捩率はその平面を基準とした高さの情報になるのでしょうか．また授業の中で，κ, τ を定めると曲線が定まるように言われましたが，κ の選び方が自由なら τ に制限がかかるのではないですか？
お答え：前半：定量的な議論がないので，はいともいいえとも言えません．後半：いいえ．どうしてそう考えたのでしょうか．

質問 11： 問題 5-1 で曲線 $\gamma(s)$ を求めようとしたのですが，$|\gamma(s)|^2 = a^2$ という条件があること以外何も思いつかなかったのですが，ここからどのようにして $\gamma(s)$ の式を求めるのですか？ **お答え：**$\gamma(s)$ をフルネ枠で表す．

質問 12： 5-2 を解くときに「変化した $\boldsymbol{n}$ によってさらに $\boldsymbol{e}$ が変化するから」などと考えて混乱しました．近くという言葉が指す範囲はどれくらいですか？ **お答え：**「十分小さい ε が存在して」という，1 年次に学んだ極限の議論．このときに ε はどれくらい小さいのですか，という質問には一般に答えられないことはご存知のはずですね．

質問 13： 5-2 は螺旋の一部のような形になりますか？ **お答え：**曲線はそうですが，その射影は？

質問 14： そろばんは外部と通信せず，電源を必要とせず，生き物でもないですが，どう考えても筆記用具ではないですよね．

お答え： そろばんで筆記する方法を考えつけば筆記用具になりますね．

質問 15： 教科書 P29 ～ 51 はテスト範囲ですか? **お答え：**講義で扱いましたか?

質問 16： 試験にむけてどのようなことを勉強したらいいですか． **お答え：**復習.

質問 17： 難しかったです． **お答え：**そうですか.

6 空間曲線の基本定理

■今回用いる事実 以下の事実（付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結）を用いる：

定理. 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する．区間 I で定義され，n 次正方行列に値をとる C^∞-級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}$ で，次を満たすものがただ一つ存在する：

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列}. \tag{6.1}$$

証明は，常微分方程式論の教科書，あるいは「2017 年度幾何学特論 B1（2Q，MTH.B406）」の第 1 回講義ノート `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2017/geom-b/index-jp.html` を見よ．

系. 上の定理の状況で，さらに n 次正方行列 A が与えられているとする．このとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}_A$ で，次を満たすものがただひとつ存在する．

$$\frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A\Omega, \qquad \mathcal{F}_A(t_0) = A \tag{6.2}$$

証明： (6.1) を満たす $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば，それが求めるものである．

問題

6-1 空間曲線 γ の曲率を $\kappa\ (>0)$，捩率を τ とする．空間曲線 $\tilde\gamma$ の曲率が κ，捩率が $-\tau$ であるならば，$\tilde\gamma$ と γ は向きを反転する $\mathbb{R}^3$ の等長変換で移り合う，すなわち

$$\tilde\gamma = A\gamma + \boldsymbol{c}, \qquad (A \in \mathrm{O}(3); \det A = -1, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3)$$

となる A, $\boldsymbol{c}$ が存在する．このことを示しなさい．
ヒント：$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\kappa & 0\\ \kappa & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\kappa & 0\\ \kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}$.

6-2 曲率が零点をもたない空間曲線の像が $\mathbb{R}^3$ のある平面に含まれるための必要十分条件は捩率が恒等的に 0 となることである．このことを示しなさい（ヒント：従法線ベクトルが一定であることを示す）．

2018 年 11 月 8 日