山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は，**解答用紙**と**持込用紙**を回収します．問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **11 月 30 日**午後から，**数学事務室（本館 3 階 332B）**にて返却いたします.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2018 年 12 月 5 日**までに山田まで**電子メイル**にてお申し出ください．上記期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい．また，返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A [40 点]

次の文中の $\boxed{1}$∼$\boxed{12}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **a** をつけた部分の理由を述べなさい.

xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上のパラメータ付けられた曲線

$$\gamma(t) := \bigl((\cos t - \sin t)^3, (\cos t + \sin t)^3\bigr) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

が正則曲線であるような区間で，0 を含むもののうち最大のものを I と書くと $_{\mathbf{a}}\underline{I = \boxed{1}}$ である．各 $t \in I$ に対して $\gamma(0)$ から $\gamma(t)$ までの弧長 $s(t)$ は $\boxed{2}$ と t の具体的な式で与えられる．弧長関数 $s(t)$ の逆関数は

$$J = \boxed{3} \ni s \longmapsto t(s) = \boxed{4} \in I$$

と，s の具体的な式 $\boxed{4}$ で表されるから，$\tilde\gamma(s) = \bigl(\boxed{5}, \boxed{6}\bigr)$ $(s \in J)$ は，$\gamma(t)$ $(t \in I)$ の弧長パラメータによる具体的な表示を与える．曲線 $\tilde\gamma(s)$ の単位接ベクトル（単位速度ベクトル）は $\boldsymbol{e}(s) = (\boxed{7}, \boxed{8})$，左向き単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n}(s) = (\boxed{9}, \boxed{10})$ なので，$\tilde\gamma(s)$ の曲率関数は $\kappa(s) = \boxed{11}$，パラメータ t で表示された曲線 $\gamma(t)$ の曲率関数は，$\kappa(t) = \boxed{12}$ となる．パラメータ t が区間 I の両端に近づくとき，$\kappa(t)$ は$\boxed{13}$[1].

問題 B [40 点]

次の文中の $\boxed{1}$∼$\boxed{23}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れ，下線 **a** ∼ **c** をつけた部分の理由をそれぞれ述べなさい.

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の，弧長 s でパラメータ付けられた曲線

$$\gamma\colon I = (a,b) \ni s \longmapsto \gamma(s) = \bigl(x(s), y(s), z(s)\bigr) \in \mathbb{R}^3$$

で，加速度ベクトル $\gamma''(s)$ が区間 I 上至る所で零ベクトルでないものを考える．ただし $' = d/ds$ である.

$$\boldsymbol{e}(s) := \gamma'(s), \qquad \boldsymbol{n}(s) := \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}, \qquad \boldsymbol{b}(s) := \boldsymbol{e}(s) \times \boldsymbol{n}(s)$$

とおくと，各 $s \in I$ に対して $_{\mathbf{a}}\underline{\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}\ は\ \mathbb{R}^3\ の正規直交基を与える}$．いま

$$\kappa(s) := \boxed{1}, \qquad \tau(s) := \boxed{2}$$

[1] $\boxed{13}$ は曲率の極限の挙動を表す言葉が入る

とおき，それぞれ γ の**曲率**，**捩率**とよぶ．ここで，$\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ の s に関する微分は

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'(s) &= \boxed{\ 3\ }\,\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 4\ }\,\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 5\ }\,\boldsymbol{b}(s),\\
{}_{\mathbf{b}}\,\underline{\boldsymbol{n}'(s)} &\underline{= \boxed{\ 6\ }\,\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 7\ }\,\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 8\ }\,\boldsymbol{b}(s),}\\
\boldsymbol{b}'(s) &= \boxed{\ 9\ }\,\boldsymbol{e}(s) + \boxed{\ 10\ }\,\boldsymbol{n}(s) + \boxed{\ 11\ }\,\boldsymbol{b}(s),
\end{aligned}
\qquad \left({}' = \frac{d}{ds}\right)
$$

を満たす[2]．いま $s_0 \in I$ を固定すると，テイラーの定理より

$$
(2)\qquad \gamma(s_0+\delta) - \gamma(s_0) = \delta\gamma'(s_0) + \frac{\delta^2}{2}\gamma''(s_0) + \frac{\delta^3}{6}\gamma'''(s_0) + o(\delta^3) \qquad (\delta \to 0)
$$

が成り立つ．ここで $o(\star)$ は “ランダウの小文字の o” である．ここで (1) を用いれば，式 (2) は[3]

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \gamma(s_0+\delta) - \gamma(s_0) = \delta &\Bigl(\boxed{\ 12\ }\,\boldsymbol{e}(s_0) + \boxed{\ 13\ }\,\boldsymbol{n}(s_0) + \boxed{\ 14\ }\,\boldsymbol{b}(s_0)\Bigr)\\
&+ \frac{\delta^2}{2}\Bigl(\boxed{\ 15\ }\,\boldsymbol{e}(s_0) + \boxed{\ 16\ }\,\boldsymbol{n}(s_0) + \boxed{\ 17\ }\,\boldsymbol{b}(s_0)\Bigr)\\
&+ \frac{\delta^3}{6}\Bigl(\boxed{\ 18\ }\,\boldsymbol{e}(s_0) + \boxed{\ 19\ }\,\boldsymbol{n}(s_0) + \boxed{\ 20\ }\,\boldsymbol{b}(s_0)\Bigr) + o(\delta^3) \qquad (\delta \to 0)
\end{aligned}
$$

と書き直すことができる．以下，次を仮定する：

- $\kappa(s_0)$, $\tau(s_0)$ はどちらも零でない．
- $\boldsymbol{e}(s_0) = (1,0,0)$, $\boldsymbol{n}(s_0) = (0,1,0)$, $\boldsymbol{b}(s_0) = (0,0,1)$, $\gamma(s_0) = (0,0,0)$.

このとき，$\gamma(s)$ の xy-平面への正射影 $\gamma_1(s) := \bigl(x(s), y(s)\bigr)$, yz-平面への正射影 $\gamma_2(s) := \bigl(y(s), z(s)\bigr)$, zx-平面への正射影 $\gamma_3(s) := \bigl(z(s), x(s)\bigr)$ を考えると，$_{\mathbf{c}}$ $\underline{\boxed{\ 21\ }\ \text{である}}$[4].

問題 C 次の主張は正しいか．正しいなら○を，そうでないなら×を解答欄の [ ] 内に記し，理由を述べなさい． [20 点]

(1) 閉区間 $I = [a,b]$ で定義された平面正則曲線の列 $\gamma_n\colon I \to \mathbb{R}^2$ $(n = 1,2,\dots)$ と正則曲線 $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ を考える．各 $t \in I$ に対して $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$ が成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \mathcal{L}(\gamma)$ が成り立つ．ただし，正則曲線 σ に対して $\mathcal{L}(\sigma)$ は σ の弧長を表す．

(2) 弧長でパラメータづけられた平面曲線 $\gamma(s)$ $(s \in \mathbb{R})$ の曲率関数 $\kappa(s)$ が周期関数ならば，$\gamma(s)$ は閉曲線を与える．

問題 D [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

おつかれさまでした ♡

[2] $\boxed{\ 3\ }$–$\boxed{\ 11\ }$ には $\kappa(s)$, $\tau(s)$ とその導関数の多項式（定数の可能性もある）が入る．

[3] $\boxed{\ 12\ }$–$\boxed{\ 20\ }$ には κ, τ の s_0 における値およびそれらの s_0 における微分係数の多項式が入る．

[4] $\boxed{\ 21\ }$ には，つぎのいずれかのうち当てはまる方の番号が入る：① γ_1, γ_2, γ_3 のいずれも s_0 において平面正則曲線を与える．② γ_1, γ_2, γ_3 の少なくとも一つは s_0 に特異点をもつ．

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄

1 $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$	2 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin 2t$	3 $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$	4 $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{3}s$
5 $\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}s}^{\,-3}$	6 $\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{3}s}^{\,-3}$	7 $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{3}s}$	8 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{3}s}$
9 $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{3}s}$	10 $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{3}s}$	11 $-\dfrac{1}{\sqrt{18-4s^2}}$	12 $-\dfrac{\sec 2t}{3\sqrt{2}}$

13

負の無限大に発散する

下線 a の理由

$\dot{\gamma}(t) = 3\cos 2t\big(-(\cos t - \sin t), (\cos t + \sin t)\big)$ $|\dot{\gamma}(t)|^2 = 18\cos^2 2t$. したがって $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ となるのは $t = \frac{2k+1}{4}\pi$ (k は整数) のとき.
したがって，原点を含み $\dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ となる最大の区間は $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

1 と a: 5 点；2–4, 5–6, 7–10, 11, 12, 13: 各 5 点

学籍番号									氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄

1 $\lvert\gamma''(s)\rvert$	2 $-\boldsymbol{b}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s)$	3 0	4 $\kappa(s)$	5 0	
6 $-\kappa(s)$	7 0	8 $\tau(s)$	9 0	10 $-\tau(s)$	11 0
12 1	13 0	14 0	15 0	16 $\kappa(s_0)$	17 0
18 $-\kappa(s_0)^2$	19 $\kappa'(s_0)$	20 $\kappa(s_0)\tau(s_0)$	21 ②		

1,2, 3–11, 12–20, 21, **a**, **b**, **c**: 各 5 点

下線 a の理由

パラメータ s が弧長であることから $|\boldsymbol{e}(s)| = |\gamma'(s)| = 1$.
このことから，$\gamma'(s)\cdot\gamma'(s) = 1$ が成り立つので，両辺を s で微分すると $2\gamma''(s)\cdot\gamma'(s) = 0$ を得る．
したがって $\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = \frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}\cdot\gamma'(s) = 0$. 定義から $\boldsymbol{n}(s)$ は単位ベクトルなので $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ は互いに直交する単位ベクトルである．
さらに，外積（ベクトル積）の定義から $\boldsymbol{b}(s)$ は $\boldsymbol{e}(s)$ と $\boldsymbol{n}(s)$ に直交する単位ベクトルなので，$\{\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s)\}$ は正規直交基を与える．

下線 b の理由

下線 **a** より $\boldsymbol{n}'(s) = p(s)\boldsymbol{e}(s) + q(s)\boldsymbol{n}(s) + r(s)\boldsymbol{b}(s)$ となる関数 $p(s)$, $q(s)$, $r(s)$ が存在する．
$\boldsymbol{n}(s)$ は単位ベクトルなので，$\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{n}(s) = 1$. 両辺を s で微分すると $\boldsymbol{n}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s) = 0$. したがって $q(s) = \boldsymbol{n}'(s)\cdot\boldsymbol{n}(s) = 0$.
また，$p(s) = \boldsymbol{n}'(s)\cdot\boldsymbol{e}(s) = (\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{e}(s))' - \boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{e}'(s) = -\boldsymbol{n}(s)\cdot(\kappa(s)\boldsymbol{n}(s)) = -\kappa(s)$.
最後に $r(s) = \boldsymbol{n}'(s)\cdot\boldsymbol{b}(s) = (\boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{b}(s))' - \boldsymbol{n}(s)\cdot\boldsymbol{b}'(s) = \tau(s)$.

下線 c の理由

yz 平面への射影 $\gamma_2(s)$ は

$$\gamma_2(s_0+\delta) = \left(\frac{\kappa(s_0}{2}\delta^2 + \frac{\kappa'(s_0)}{6}\delta^3 + o(\delta^3), \frac{\kappa(s_0)\tau(s_0)}{6}\delta^3 + o(\delta^3)\right)$$

なので，$\gamma_2'(s_0) = \left.\frac{d}{d\delta}\right|_{\delta=0}\gamma_2(s_0+\delta) = \mathbf{0}$. したがって γ_2 は s_0 に特異点をもつ．

学籍番号									氏名	

山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 各 10 点

(1) [×]

区間 $I = [0, \pi]$ 上で定義された曲線 $\gamma(t) = (t, 0)$, $\gamma_n(t) = \left(t, \frac{1}{n}\sin nt\right)$ $(n = 1, 2, \dots)$ を考えると，$|\sin nt| \leqq 1$ から $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = (t, 0) = \gamma(t)$．一方，

$$\mathcal{L}(\gamma_n(t)) = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 nt}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \cos^2 u}\,du$$
$$= \frac{1}{n}\cdot n \int_0^\pi \sqrt{1 + cos^2 u}\,du = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 u}\,du.$$

なので，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(\gamma_n) = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 u}\,du > \pi = \mathcal{L}(\gamma)$.

(2) [×]

周期関数 $\kappa(s) = \cos s + \frac{1}{3}$ に対して，平面曲線の基本定理より，s を弧長パラメータ，κ を曲率関数とする平面曲線 $\gamma(s)$ が存在する．とくに $\gamma'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ と書くと $\theta'(s) = \kappa(s)$ なので

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = \int_0^{2\pi} \left(\cos u + \frac{1}{3}\right) du = \frac{2\pi}{3}$$

なので $\boldsymbol{e}(2\pi) \neq \boldsymbol{e}(0)$．速度ベクトルが周期的でないので γ は閉曲線ではない．

学籍番号									氏名	

幾何学概論第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D [0 点] この科目の講義，教材，試験などに関する意見，希望，誹謗，中傷などをお書きください．何を書いても怒りません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 4 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

幾何学概論第二受講者の皆様へ：11 月 29 日（木）は休講にさせていただきます

学籍番号									氏名	