2018 年 12 月 13 日 (2018 年 12 月 20 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 2

前回までの訂正

- 幾何学概論第一，定期試験報告の得点分布表がおかしかったようです．

得点	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
合計得点	0	0	0	1	1	0	3	4	3	2	3	4	6	2	2	2	0	1	0	0	1
A	1	9	6	6	4	3	1	2	3												
B	1	0	2	2	4	6	6	8	6												
C	11	5	12	5	2																

- 授業日程の最終回：§§10–11 ⇒ §§10/11
- 黒板の番号のうち，“6” が連続して書かれていたそうです．
- 教科書 65 ページ，下から 7 行目：$p_v = 0 \Rightarrow p_v = \mathbf{0}$
- 教科書 285–286 ページ：付録 B-8 の問題の回答番号 **2** –**5** ⇒ **3** –**6**（ひとつずつふえる）
- 教科書 285 ページ，下から 7 行目：$-2(6u^2+v)(1+u^2+u^4) \Rightarrow -2(6u^2+v)\sqrt{1+u^2+u^4}$

授業に関する御意見

- $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ の対応を地図で表現するのはわかりやすいです．　**山田のコメント：** ですね．
- 地図のたとえ，とても分かりやすかったです．　**山田のコメント：** それはよかった．
- ちなみにやっぱしドイツでも Vector はヴェクターみたいですね．恐らく昔の日本人は耳が悪かったのでしょうね...
  山田のコメント： どうでしょう．(1) 発音の規則では “V” は [f] のはずなので, Vektor は外来語かなと．(2) 語尾の “r” を「巻く」のはちょっと古いドイツ語と舞台ドイツ語，と習いました．
- 質問をするにあたり，本の体裁に注意して教科書を改めて見返しましたが，細部まで整っていて，非常に美しいです．数式中のカンマとそうでないカンマに形の区別がなく，非常に驚きました．本文は「源ノ角明朝」ですか？
  山田のコメント： フォントはわかりませんが，プロの組版はやはりきれいだと思います．ちなみに入稿は TEX.
- Als ich “sech s” gelesen have , dachte ich an die 6 im Deutchen.　**山田のコメント：** Ach, so...
- 3Q は iPad でノートをとっていましたが，先生が横断的に黒板をお使いになるので，4Q からは紙でノートを取ろうと思います．
  山田のコメント： iPad だととりにくい？
- 平行四辺形 parallelogram, 台形 trapezoid, 四角形 Quadrangle, 四辺形 Quadrilateral (by Google) なんてこった．
  山田のコメント： ですねぇ．菱形，正方形，長方形は?
- 「船を作るのが大変」のあたりの話が全然聞き取れませんでした．簡単に教えていただけますか．
  山田のコメント： 後半の「ガウスの驚異の定理」のあたりでお話する予定．
- 上の擬球面（山田注：擬球面の画が描いてあった）は正しく描かれてますでしょうか．　**山田のコメント：** はい．
- ユークリッド幾何学について熱く語って欲しかった．最終回でも良いので，できたらお願いします．
  山田のコメント： どうしようか．何を聞きたいんでしょう．

質問と回答

質問 1：　今回はなめらかな 2 変数関数のグラフを曲面としていましたが，3 変数以上の関数の曲面というものはあるのでしょうか．　**お答え：**一般に n 変数関数のグラフ $\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, x_{n+1} = f(x_1,\dots,x_n)\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の**超曲面** hypersurface とよばれる対象の特別な場合です．

質問 2：　$\mathbb{R}^2$ と S^2 が同相でないことを，$\mathbb{R}^2$ はコンパクトでないが S^2 はコンパクトであるというように示されていましたが，これは S^2 にコンパクトな位相（たとえば $\mathbb{R}^3 \supset S^2$ とみたときの相対位相）が入っているときに限った話であって，S^2 にコンパクトでない位相（たとえば離散位相 $(S^2, \mathfrak{P}(S^2))$ が入っているときにはうまくいかないと思いました．　**お答え：**そうすると $\mathbb{R}^2$ にも様々な位相があるので，この問題は無意味になりますね．ここでは（暗黙的ですが）$\mathbb{R}^n$ には標準位相，$\mathbb{R}^n$ の部分集合には $\mathbb{R}^n$ から誘導される相対位相が与えられているとします．

質問 3：　陰関数表示の $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, F(x,y,z) = 0\}$ がなめらかな曲線（原文ママ：曲面のこと？）になる条件って，$(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ と $F \in C^\infty$ ではないのですか？　**お答え：**ここでも C^∞ は暗黙の内に仮定しています．

質問 4：　先生は全ての定義，定理で関数が C^∞ 級であることを仮定されていますが，実際は C^1 級や C^2 級などもう少し弱い仮定で成り立つものもあるという認識でよろしいですか．　**お答え：**認識しなくてもよいので，一つひとつ，どれくらいの微分可能性が必要か確かめてみましょう．それほど難しくありません．

質問 5： 極座標を用いて地球は正確な地図で表せない（北極，南極で問題が生じる）とありました．地球から北極，南極の 2 点を取り除いた物体は正確な地図で表されると言えますか? **お答え：**「正確な地図」の定義が必要．教科書 §7 の定義と考えると，地球上のどんなに小さな領域も正確な地図を持ちません．第 5 回か 6 回で説明します．

質問 6： 1 枚の地図で正確に表すことができるか否か（そのようなパラメータが存在するか）はどうすれば判別できますか? **お答え：**曲面が $\mathbb{R}^2$ の領域と同相かどうか．は，比較的容易に判定できるがここでは扱わない．

質問 7： 一般に球面 $(\subset \mathbb{R}^3)$ と任意の領域（山田注：$\mathbb{R}^2$ の領域？）は同相にはなりませんが，内点を含む閉集合と球面には同相が存在しないのですか？（内点を含む有界閉集合はコンパクトなので，コンパクトか否かという議論で同相写像が存在しないとは言えない）． **お答え：**$\mathbb{R}^2$ の内点有界閉集合は境界点をもつ．この点は $\mathbb{R}^2$ の円板と同相な近傍をもたない．一方，球面上の任意の点は $\mathbb{R}^2$ の円板と同相な近傍をもつ．

質問 8： 教科書 P71 に書いてある「外微分」の定義は，$df(u,v) = f_u(u,v)\,du + f_v(u,v)\,dv$ と表される df を f の外微分という，とありますが，これは全微分ですよね．なぜ微分積分学で馴染みの深い全微分という言葉をつかわないのですか．（外微分と全微分の違いは?） **お答え：**関数の外微分と，全微分は同じもの．単に「微分」ともいいます．ここではあまり扱いませんが，外微分はもう少し拡張があります．

質問 9： 右手系が普通なのが右利きの多さと関係しているようなことを言っていましたが，右手系が普通なのは数学（工学？）における慣習というだけではないでしょうか．たとえば，日本の平面直角座標は，北緯が X で東経が Y というものが使われています． **お答え：**不思議ですよね．地球の内側から見れば右手系かもしれませんが．

質問 10：「横断的に交わる」とありますが，「横断的」以外に交わる時に使う言葉はありますか．（接しながら交わる . . . とかですか？） **お答え：**曲線の場合そう言っている（教科書 §2）．あるいは「横断的でない交わり方をする」．

質問 11： 講義内で紹介されていた擬球はその名前からして球と似た性質をもつと思うのですが，その性質は何ですか?

お答え： ガウス曲率一定．第 3，4 回の講義にて．

質問 12： Schwarz の提灯のようにならないための，ある曲面をいくつかの図形の分割によって近似したときに，その分割した図形の面積の和の極限値が元の曲面の面積の値に収束する条件または十分条件はありますか？

お答え： (1) Schwarz の提灯は滑らかな曲面の “分割” ですか？ (2) 曲線の場合はどうでしょう．

質問 13： 閉領域に特異点が存在すれば，面積分できない場合どうしたらいいですか．

お答え： ここでは正則曲面の面積を取り扱っています．積分が収束しない場合は別の話題．

質問 14： 面積の公式にある $\mathcal{A}$ は何からとったものですか． **お答え：**Area.

質問 15： 第一基本量というものは，確かに p のみで決まるものではありますが，その曲面を特徴づけるものではないと思います（パラメータのとり方によって変化してしまう為）．一般に曲面はパラメータとセットで考えるもの（同じ曲面でもパラメータのとり方が異なりその結果第一基本量が異なる 2 つは別の曲面とみなす）なのですか?

お答え： いいえ，パラメータのとり方を変えても同じ曲面とみなします．次回の授業内容です．

質問 16： E, F, G が与えられれば $\gamma(t)$ の情報から実際の長さがわかるとありましたが，$\hat{\gamma}(t) = p(u(t), v(t))$ については決定することはできませんよね．どういう条件があれば決まりますか？

お答え： 曲面が定まる条件そのものになりますね．第二基本形式の情報が必要です．

質問 17： 第 1 基本量を考える意義は何ですか（言っていた気がしますが聞き逃しました）．/第一基本量 E, F, G を定める理由は何がありますか． **お答え：**長さ，角度，面積が求まる．

質問 18： 別解（山田注：問題 1-1 の別解）として書いた解法は，微小面積が (円周) $\times \sqrt{dx^2 + dy^2} \simeq$ (円周) $\times \sqrt{1 + (dx/dy)^2}dy$ と見て計算したものです．今回は計算が合いましたが，これは一般の回転体（山田注：回転面か？）でも成立しますか？ **お答え：**容易に確かめられると思うのでやってみてください．

質問 19： 1-3 (3) で定義される重心は物理学での重心と同じものですか． **お答え：**「針金の」重心として同じ．

質問 20： 問題 1-3 はパップスギュルダンの定理の証明でしょうか． **お答え：**その「面積版」と講義で述べた．

質問 21： 面積などは曲面上の向きを考えないものですが，向きを考えると色々なことが統一的にわかると思っています． **お答え：**具体的には何がどう統一的にわかると思っているのでしょうか．

質問 22： 山田先生の教科書では，曲面を描画した際の，座標軸の記号のフォント（x, z など）が本文中で用いられているフォントと少し異なっています（たとえば p 69 の問題 1 など）．これはこだわりがあるのでしょうか? それとも描画ソフトと組版システムで何か異なっているのでしょうか． **お答え：**出版社の都合だと思います．

質問 23： 面積分と線積分に関連づける（山田注：「を」関連付ける？ ）ストークスの定理を習ったのですが特異点の存在とこの定理を使う条件は関連がありますか？ **お答え：**どういう状況を想定しているか教えてください．

質問 24： nichts Besonderes. . . **お答え：**Ich auch nicht.

2 第一基本形式・第二基本形式

■パラメータ変換（再掲）

定義 2.1. $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^2$ の領域 U への写像

$$\varphi\colon D \ni (\xi,\eta) \longmapsto (u,v) = \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \in U \tag{2.1}$$

が**微分同相写像** diffeomorphism であるとは，[1] φ は全単射．[2] φ と φ^{-1} はともに C^∞-級となること．

問 2.2. 式 (2.1) の φ が微分同相写像ならば，D の各点で次が成立することを示しなさい：

$$\det J \neq 0 \qquad J := \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}. \qquad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列 (Jacobian matrix) という．}) \tag{2.2}$$

問 2.3. 正則曲面 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ と，(2.1) の形の微分同相写像 φ に対して $\tilde{p}(\xi,\eta) := p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ とおくと， $\tilde{p}\colon D \to \mathbb{R}^3$ は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい．この $\tilde{p}$ は「p からパラメータ変換 φ で得られる」という．誤解の恐れがないときは，$\tilde{p}(\xi,\eta)$ を $p(\xi,\eta)$ と書くことがある．

問 2.4. 曲面の面積はパラメータのとりかたによらないことをきちんと述べて示しなさい．

■単位法線ベクトル 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ ($U \subset \mathbb{R}^2$ は領域) に対して $\mathrm{P} := p(u_0, v_0)$ ($(u_0,v_0) \in U$) を一つ固定するとき，$p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ は 1 次独立なベクトルである．

- $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が生成する 2 次元空間は，曲面 S の P における接平面に平行である．
- 零でないベクトル $p_u(u_0,v_0) \times p_v(u_0,v_0)$ の向きは，S の P における接平面に垂直な方向を与える．

定義 2.5. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，

- $(u,v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u,v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは，P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである．
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が，パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは，各 (u,v) で $\nu(u,v)$ が p の (u,v) における単位法線ベクトルを与えていることである．

問 2.6. (1) 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ に対して $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場である．

(2) $\tilde{p}$ を問 2.3 のように p からパラメータ変換で得られる曲面とするとき，次を示しなさい：

$$\frac{\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta|} = \varepsilon \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$$

ただし，この等式の右辺は $\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ における値を，左辺は (ξ,η) における値を表す．

(3) $\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$) とおくとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \varepsilon\left(\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|}\right) \qquad \varepsilon = \det R.$$

2018 年 12 月 13 日 (2018 年 12 月 20 日訂正)

■曲面の接平面・接ベクトル空間． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ において曲面に接するベクトルは

$$\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0) \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}) \tag{2.3}$$

の形に表される．正則性の条件から (2.3) の形のベクトル全体は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元線形部分空間を与える．これを曲面 $p(u,v)$ の P における**接ベクトル空間・接平面**とよび V_{P} と書く[*1]．ベクトルの組 $\{p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\}$ は，接平面の一つの基底を与える．

問 2.7. 曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ が曲面 $p(u,v)$ からパラメータ変換 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$ で得られるとき，

$$(\tilde{p}_\xi,\tilde{p}_\eta)=(p_u,p_v)J \qquad (J \text{ は (2.2) のヤコビ行列}) \tag{2.4}$$

が成り立つことを示しなさい．ここで p_u, p_v などは列ベクトル，(p_u,p_v) はそれらを並べた 3×2 行列．

■接平面と $\mathbb{R}^2$ との対応． いままでの状況で，曲面の点 P における接平面 V_{P} と $\mathbb{R}^2$ の間に線形同型

$$V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \tag{2.5}$$

が得られる．この第一成分，第二成分をそれぞれ

$$\begin{aligned} du\colon V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\alpha\in\mathbb{R},\\ dv\colon V_{\mathrm{P}}\ni\boldsymbol{v}=\alpha p_u(u_0,v_0)+\beta p_v(u_0,v_0)\longmapsto\beta\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{2.6}$$

と書けば，du, dv は V_{P} から $\mathbb{R}$ への線形写像である[*2]．

問 2.8. 問 2.3 のようなパラメータ変換で曲面を (ξ,η) によってパラメータ表示するとき，同様に V_{P} から $\mathbb{R}$ への線形写像 $d\xi$, $d\eta$ を考えることができる．このとき，次を確かめなさい．

$$\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}d\xi\\ d\eta\end{pmatrix} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases}du=u_\xi\,d\xi+u_\eta\,d\eta\\ dv=v_\xi\,d\xi+v_\eta\,d\eta\end{cases} \qquad (J \text{ は (2.2) のヤコビ行列}). \tag{2.7}$$

問 2.9. 変数 (u,v) に関する C^∞-級関数[*3]$f(u,v)$ を考える．問 2.3 のようなパラメータ変換により $\tilde{f}(\xi,\eta)=f\bigl(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\bigr)$ と定めるとき，次を確かめなさい：

$$\tilde{f}_\xi\,d\xi+\tilde{f}_\eta\,d\eta=f_u\,du+f_v\,dv. \tag{2.8}$$

問 2.9 の状況で，誤解の恐れがないときは $\tilde{f}(\xi,\eta)$ を $f(\xi,\eta)$ と書いてしまうことがある．このとき (2.8) は $f_\xi\,d\xi+f_\eta\,d\eta=f_u\,du+f_v\,dv$ と書ける．いま

$$df:=f_u\,du+f_v\,dv \tag{2.9}$$

とおき，これを f の**微分**，**全微分**または**外微分**とよぶ．すると問 2.9 は「**関数の全微分はパラメータのとり方によらない**」と言い換えることができる．

[*1] 記号 V_{P} はこの場での一時的なものである．一般的には $dp(T_{(u_0,v_0)}\mathbb{R}^2)$ などと書くべきだが，この記号の構成要素を説明するのが面倒なのでこのような記号を用いた．多様体を学んだあとで「定義域の接空間の，はめこみの微分写像による像」という文が通じると思う．

[*2] 一般に $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V から $\mathbb{R}$ への線形写像を**線形形式**または**一次形式**という．

[*3] ここでは，とくに断らない限り関数などの微分可能性は C^∞ を仮定する．以後，しばしば C^∞-級を省略する．

■2 次形式（線形代数の復習）． 以下 V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元線形空間とする．

定義 2.10. 写像 $b\colon V\times V\to\mathbb{R}$ が**対称双線形形式**または **2 次形式**であるとは (1) 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $b(\boldsymbol{v},\cdot):V\to\mathbb{R}$, $b(\cdot,\boldsymbol{v})\colon V\to\mathbb{R}$ がともに線形写像（双線形性），(2) 任意の $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}\in V$ に対して $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ （対称性）をみたすことである．

例 2.11. 線形空間 V の**内積**とは，V の対称双線形形式 g で，次の性質（正値性）を満たすものである：任意の $\boldsymbol{v}\in V\setminus\{0\}$ に対して $g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$.

問 2.12. 線形空間 V 上の対称双線形形式 b があたえられているとする．V の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$ をひと組とるとき，次を確かめなさい：

$$b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\sum_{i,j=1}^{n}v_iw_jb_{ij}\qquad\left(\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\boldsymbol{a}_i,\quad \boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^{n}w_j\boldsymbol{a}_j,\quad b_{ij}:=b(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)\right).$$

ここに現れる n 次対称行列 $B=(b_{ij})$ を，**対称双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する表現行列**という．

問 2.13. 問 2.12 の状況で，

$$V\ni\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v_i\boldsymbol{a}_i\longmapsto\hat{\boldsymbol{v}}:={}^t(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$$

により V と $\mathbb{R}^n$ を同一視すると $b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})={}^t\hat{\boldsymbol{v}}B\hat{\boldsymbol{w}}$ と書けることを確かめなさい．

問 2.14. 問 2.12, 2.13 の状況で，別の V の基底 $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n\}$ をとると，n 次正則行列 $J=(m_{ij})$（**基底変換行列**）が存在して

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_j=\sum_{k=1}^{n}m_{kj}\boldsymbol{a}_k,\qquad\text{すなわち}\qquad(\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\dots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n)=(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n)J$$

を満たす．このとき，対称双線形形式 b の基底 $\{\boldsymbol{a}_j\}$ に関する表現行列 B と $\{\tilde{\boldsymbol{a}}_j\}$ に関する表現行列 $\widetilde{B}$ は，関係式 $\widetilde{B}={}^tJBJ$ を満たすことを確かめなさい．

■第一基本形式． 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ を 2 変数関数の組 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と考え，全微分

$$dp=(dx,dy,dz)=p_u\,du+p_v\,dv$$

を考える．とくに問 2.9 から dp はパラメータのとり方によらない[*4].

定義 2.15. 次の「式」を曲面 $p(u,v)$ の**第一基本形式**という：

$$ds^2:=dp\cdot dp=(p_u\,du+p_v\,dv)\cdot(p_u\,du+p_v\,dv)=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2=(du,dv)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$$

ただし $E=p_u\cdot p_u$, $F=p_u\cdot p_v$, $G=p_v\cdot p_v$, は第一基本量で，$\widehat{I}:=\left(\begin{smallmatrix}E&F\\F&G\end{smallmatrix}\right)$ （これを**第一基本行列**とよぶ）.

[*4] これまでは P を固定して考えていたが，以後，$\omega:=\alpha\,du+\beta\,dv$ の α, β は (u,v) の関数と考える．このとき ω を**曲面上の 1 次微分形式**とよぶ．

問 2.16. 点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を一つ固定し，第一基本量などはその (u_0,v_0) での値を考えるとする．このとき，

- 第一基本行列 $\widehat{I}$ は，接平面 $V_{\mathrm{P}}\subset\mathbb{R}^3$ の内積（$\mathbb{R}^3$ の標準内積 “$\cdot$” の制限）の，V_{P} の基底 $\{p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\}$ に関する表現行列である．
- 問 2.3 のパラメータ変換によるパラメータ表示 $p(\xi,\eta)$ の第一基本行列を $\widetilde{\widehat{I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I}}={}^tJ\,\widehat{I}\,J$ である．ただし J は (2.2) のヤコビ行列である．
- 接平面 V_{P} 上のベクトル $\boldsymbol{v}=\alpha\,p_u+\beta\,p_v$, $\boldsymbol{w}=\alpha'\,p_u+\beta'\,p_v$ に対して

$$|\boldsymbol{v}|^2=E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2=(\alpha,\beta)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\alpha\alpha'E+(\alpha\beta'+\beta\alpha')F+\beta\beta'G=(\alpha,\beta)\,\widehat{I}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}.$$

問 2.17. パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ に対して，$\hat{p}(u,v)=Rp(u,v)+\boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$) とするとき，$p$ の第一基本量と $\hat{p}$ の第一基本量が一致することを示しなさい．

■第二基本形式． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ をとる．このとき

$$\begin{aligned}I\!I:&=-dp\cdot d\nu=-(p_u\cdot\nu_u)\,du^2-(p_u\cdot\nu_v+p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv-(p_v\cdot\nu_v)\,dv^2\\&=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=(du,dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}\qquad\left(\widehat{I\!I}:=\begin{pmatrix}L&M\\ M&N\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

を**第二基本形式**，L, M, N を**第二基本量**，$\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**という．

問 2.18. 上の状況で $-p_u\cdot\nu_u=p_{uu}\cdot\nu$, $-p_u\cdot\nu_v=-p_v\cdot\nu_u=p_{uv}\cdot\nu$, $-p_v\cdot\nu_v=p_{vv}\cdot\nu$ となることを示しなさい．とくに，$M=-p_u\cdot\nu_v=-p_v\cdot\nu_u$.

問 2.19. 正則曲面 $p(u,v)$, $\tilde{p}(\xi,\eta)$ が問 2.3 のようなパラメータ変換で移り合うとき，$\tilde{\nu}(\xi,\eta)=\nu(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトルを与える．この単位法線ベクトルに対して $\tilde{p}$ の第二基本行列を $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I\!I}}={}^tJ\,\widehat{I\!I}\,J$ が成り立つことを確かめなさい．ただし J は (2.2) のヤコビ行列である．

問 2.20. 正則曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ とする．直交行列 R と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}(u,v):=Rp(u,v)+\boldsymbol{a}$, $(\hat{\nu}:=R\nu)$ とおくと $\hat{\nu}$ は $\hat{p}$ の単位法線ベクトルで，$\hat{\nu}$ に対する $\hat{p}$ の第二基本形式は p の第二基本形式と一致することを示しなさい．

問題

2-1 曲面 $p(u,v)$ のパラメータ (u,v) が等温座標系であるとは，第一基本量が $E=G$, $F=0$ を満たすことである．このとき，さらにこのパラメータ表示からパラメータ変換で得られる同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ において (ξ,η) が等温座標系ならば，座標変換 $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$ はともに座標 (ξ,η) に関する調和関数であることを示しなさい．

2-2 パラメータ表示された曲面 $p(u,v)=(\operatorname{sech}v\cos u,\operatorname{sech}v\sin u,v-\tanh v)$ $(-\pi<u<\pi, v>0)$ に対して，第二基本形式が

$$I\!I=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2=2\widetilde{M}\,d\xi\,d\eta$$

となるような座標変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ を求めなさい．さらに，そのとき (ξ,η) に関する第一基本量を求めなさい．