2018 年 12 月 20 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 3

前回までの訂正

- 教科書 274 ページ，8 行目：いま，$R(AB)R^{-1} = RR^{-1}R^{-1}BR^{-1} = R^{-1}BR^{-1}$ であるが，R^{-1} も B も
  ⇒ いま，$R^{-1}(AB)R = R^{-1}R^2BR = RBR$ であるが，R も B も
- 講義資料 2, 1 ページ，質問 3 で $(F_x, F_y, F_z) \neq 0$ の右辺が $\mathbf{0}$，というご指摘がありましたが，原文ママです．
- 講義資料 2, 5 ページ，7 行目：$\mathcal{A} := \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ ⇒ $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ （“$\mathcal{A} :=$” を削除）
- 講義資料 2, 6 ページ，問 2.20：正則 曲面 ⇒ 正則曲面（空白が余計）
- 板書で “Jacob 行列” と書いたそうです．“Jacobi 行列” です．

授業に関する御意見

- 急に難易度と速さが上がってついていくのが難しいです．証明の正しさを追うことができていません（意味がわからないので）
  山田のコメント： 意味がわかることと，証明の正しさを追うことは独立な気がします．
- 3 時間くらい詰まってしまいましたが，終わってみれば簡単でした．悲．　**山田のコメント：** 試行錯誤・解決の体験は大事．
- よく意義がわからずやっていた行列の正定値性の話が絡んできて面白かったです．　**山田のコメント：** そうなんです．
- 今回の授業内容は，予習時にはよくわからなかったのですが，「パラメータのとり方に依らない量を定義したい」というモチベーションをしっているところも理解しやすいのかと驚きました．　**山田のコメント：** ちょっとの気持ちの違いなんですけどね．
- 微分同相の部分の解説が分かりやすかったです．　**山田のコメント：** それはよかった．
- うめこみでなくてはめこみでやっているということは，注意をみて気づかされました．
  山田のコメント： この講義の範囲ではあまり気にしなくてよいと思う．
- さすがに計算量が多くて大変です．もうちょっと簡単な問を課題に下さい（涙）　**山田のコメント：** そんなに多くないと思う．
- 金色のベストが格好よかった．絹ですか．　**山田のコメント：** ポリエステル．
- 考えましたが特にありませんでした．　**山田のコメント：** 山田もです．

質問と回答

質問 1： 講義内で「$p(x,y) = p(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$ は実はちょっとまずくて，なぜなら $r = 0$ で特異点となるからです」とおっしゃっていました．しかし，この $\tilde{p}(r,\theta)$ の第一基本量 $\tilde{E}$, $\tilde{G}$, $\tilde{F}$ を用いて計算しても正解を得られます．この特異点の問題を完全に解決するために何をすればよいと講義中に先生がおっしゃっていたと思うのですが，聴き逃してしまいました．実際どうすればいいとおっしゃっていたのか教えていただけますか？

お答え： 問題 1-1 の「回転放物面の面積」の説明のことですね．「極限をとる」．$r = 0$ となる点はパラメータ表示 $\tilde{p}(r,\theta)$ の特異点だが，グラフ表示 $z = x^2 + y^2$ で原点は特異点でないので，範囲 $\{(r,\theta) \mid \varepsilon \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に対応する面積を計算して，$\varepsilon \to +0$ とすれば，$0 \leqq r \leqq 1$ に対応する部分の面積（確定している）に収束するはず．

質問 2： $p(u,v)$ と $\tilde{p}\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ は ˜ が無いと u, v によって定められていて，˜ があると ξ, η によって定められているということですか？　**お答え：** いいえ．$\tilde{p}(\xi,\eta) = p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ と書いたはず．質問の式と少し違う．

質問 3： 曲面を決定することを，あるパラメータを用いて $\bigl(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\bigr)$（山田注：原文では列ベクトル）と表せることとします．一般にどのような “パラメータによらない値や形式” を与えることで，曲面を決定できますか？（違う観点から）曲面の同値関係を，いつもの「合同変換が存在する」として定めます．どのような値や形式を決めれば，それに対応する曲面の同値類が一意に決まりますか．（他の分野のように未解決ですか？特性類？のギ論に似ているような．）　**お答え：**「曲面論の基本定理」（テキスト付録 B-9）．第一基本形式と第二基本形式を与えると曲面の合同類が決まります．ちょっと複雑なのは，これらの基本形式は「何をとってきてもよい」のではなく，ある関係式を満たしている必要があります．これについてはあとで少し言及する予定．

質問 4： du, dv 等の記号はプリントでは線形写像と書かれていますが，双対空間としてスカラー倍や和を定めているのでしょうか．正直なところ dp を求めよ等の問が出ても何をしたらいいのかわかりません．

お答え： 前半：そうです．講義ではいまのところ「記号」と思っていただけば良いと思います．正体は「多様体」の授業で出てくるはず．後半：$dp = p_u\,du + p_v\,dv$．すなわち p の変導関数を求める．

質問 5： 講議（原文ママ：講義です．前回のキーワード参照）ででてきた du や dv は微分形式の事なのですか du や dv にはどのような性質があるのか知りたいです． **お答え：**はい．「多様体」を学ぶときにもう少し深入りします．

質問 6： 基本形式の辺りのラフな議論を正当化するには曲面を M として $T_p(M)$ の交代 2 次形式を考えるのでしょうか（テンソル場や k 次形式の定義を知って間もないので全く自信はないです）．又 $\mathcal{L} = \int \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \int ds$ というところもテンソルを使って正当化されるのでしょうか．こちらは見当もつきませんでした．

お答え： 前半：ここでは交代 2 次形式ではなく，対称 2 次形式を考えます．後半：はい，積分をどう考えるかですね．

質問 7： 講義資料 2, 4p の *1 において，「定義域の接空間の，はめこみの微分写像による像」とありますが，これは $M = \mathbb{R}^3$ を 3 次元可微分多様体, $N = \mathbb{R}^2$ を 2 次元可微分多様体とみて, $U \in \mathcal{O}_N$ を N からの相対位相をもって 2 次元可微分多様体とみるときに, 正則にパラメータ表示された曲面, すなわち C^∞ 写像 $p\colon U \to M$, $\operatorname{rank}(dp)_{\boldsymbol{x}} = 2$ ($\boldsymbol{x} \in U$) が与えられたとする．$\operatorname{rank}(dp)_{\boldsymbol{x}} = 2$ ($\boldsymbol{x} \in U$) より，各点 $\boldsymbol{x} \in U$ で $(dp)_{\boldsymbol{x}}\colon T_{\boldsymbol{x}}(U) \to T_{p(\boldsymbol{x})}M$ は単射であるので p ははめ込みである．$\mathrm{P} = p(\boldsymbol{x}_0)$ とするとき，$V_{\mathrm{P}} = (dp)_{\boldsymbol{x}_0}(T_{\boldsymbol{x}_0}(U))$ $(\subset T_{p(\boldsymbol{x}_0)}(M))$ ということでしょうか． **お答え：**はい．

質問 8： 第一基本形式は線素を表しますが，第二基本形式は何を表しているのでしょうか．

お答え： 今回説明する曲面の曲がり具合．「第一基本形式は線素を表す」という文の意味はきちんと説明できますか？

質問 9： 第二基本形式を定める時，曲面の単位法線ベクトル場の向きをどちらか一方任意にとる，という形で定めたと思うのですが，その場合，各点ごとに第二基本形式の符号が変わってしまうと思うのですが，符号の向きの取り方を各点に対して統一する，すなわち，曲面に内側，外側のような向きを定める事はできないのですか．

お答え： できる時，曲面は「向き付け可能」という．メビウスの輪やクラインの壺は向き付け不可能な曲面の例．

質問 10： $I\!I$ がパラメータの取り方に依るかどうかがすぐには分からなかった．

お答え： 単位法線ベクトル場 ν はパラメータの取り方に「よらない」．したがって $d\nu$ もパラメータの取り方によらない微分形式．すなわち $I\!I = -dp \cdot d\nu$ もパラメータの取り方によらない．

質問 11： 等温座標系の "等温" とはどういういう意味でしょうか．物理学的意味を含んだ物理学に由来する概念なのですか． / $E = G$, $F = 0$ となるような座標系をなぜ "等温" と呼ぶのですか． / 2-1 の問題ですが，等温座標系の「等温」には何の意味が込められているのですか？

お答え： Isothermal coordinate system の訳語．一様な板を熱が伝わるとき，熱の "流線" と "等温線" が直交することから，座標曲線が直交するようなパラメータを等温座標系というようです（が本当かどうかしらない）．物理学で使う用語ではなさそうです．共形座標系 conformal coordinate system ということもあります．

質問 12： 等温座標系が問題 2-1 のように定義されるのはなぜですか？（$E - G$, $F = 0$） **お答え：**質問がおかしい．「直角三角形が，一つの角が直角である三角形，と定義されるのはなぜか？」という質問に意味があるか．

質問 13： 2-1 で調和関数が出てきましたが，複素関数の微分可能条件と同じことを考えると複素数を使った見方などもできたりしますか？ **お答え：**はい，実はそのとおり．複素関数論を学ぶのがこの科目の後なので深入りしません．

質問 14： 曲面全体の集合を同相という同値関係で割ったときの完全代表系は何でしょうか．

お答え： 問題の設定によってかわります．$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた閉曲面に対してなら「閉曲面の分類定理」(調べてみよう)．

質問 15： 回転面の面積はなぜ $2\pi \int_0^{\mathcal{L}} x(s)\,dx$ なのですか? **お答え：**文脈が不明だが，実はこれを講義で説明した．以下，不明な文脈のまま説明すると，曲面 $p(s,t) = (x(s)\cos t, x(s)\sin t, z(s))$ の面積を公式どおりに計算する．

質問 16： 平面を曲面に移す例で，地図を世界に移すと挙げていますが，世界というのは地球儀のことですか．

お答え： $\mathbb{R}^3$ の曲面のことを（地球になぞらえて）世界といっています．

質問 17： tractrix の説明が分からなかった（どことどこが等しい？） **お答え：**xz-平面上の曲線で，曲線上の各点 P におけるその曲線の接線が z-軸と交わる点を Q とするとき，PQ の長さが P によらず一定．

質問 18： $\begin{pmatrix} {}^t p_u \\ {}^t p_v \end{pmatrix} (p_u, p_v) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ と書かれていた部分が何を意味しているのかよく分かりませんでした．

お答え： 言葉どおりに質問をとれば「左辺と右辺が等しいことを意味している」が回答となります．ヒント：p_u, p_v を列ベクトルと思うと，左辺は 2×3 行列と 3×2 行列の積．

質問 19： ds^2 がパラメータのとり方によらないというのは ds^2 が du と dv についての恒等式になるということですか？ **お答え：**ds^2 自体は等式ではないので「恒等式である」という言葉は意味を持たないように思います．

質問 20： $p(u,v) = (u,v,0)$ と $q(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ がなぜ同じ基本形式をもつ必要があるのかわからなかった．

お答え： 「同じ基本形式をもつ必要がある」のではなく「同じ第一基本形式をもつ」です．計算すれば明らかですね．

質問 21： 第二基本形式の定義に出てくるマイナスは「習慣」とのことですが「慣習」のほうがしっくりきます．これらを使い分けていますか． **お答え：**いいえ，意識して使い分けていません．

3　主曲率・ガウス曲率・平均曲率

■単位法線ベクトル（再掲）

定義 3.1. 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p\colon U \to \mathbb{R}^3$ に対して，

- $(u,v) \in U$ における（または $\mathrm{P} = p(u,v)$ における）S の**単位法線ベクトル**とは，P における曲面の接平面に垂直な単位ベクトルのことである．
- なめらかな写像 $\nu\colon U \to \mathbb{R}^3$ が，パラメータ表示された曲面 p の**単位法線ベクトル場**であるとは，各 (u,v) で $\nu(u,v)$ が p の (u,v) における単位法線ベクトルを与えていることである．

問 3.2. (1) 曲面の助変数表示 $p(u,v)$ に対して $\nu(u,v) := \frac{p_u(u,v)\times p_v(u,v)}{|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|}$ は単位法線ベクトル場である．
(2) $\tilde{p}$ を p からパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で得られる曲面とするとき，次を示しなさい：

$$\frac{\tilde{p}_\xi\times\tilde{p}_\eta}{|\tilde{p}_\xi\times\tilde{p}_\eta|} = \varepsilon\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|} \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta\end{pmatrix}$$

(3) $\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{q}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^3$) とおくとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|} = \varepsilon\left(\frac{\hat{p}_u\times\hat{p}_v}{|\hat{p}_u\times\hat{p}_v|}\right) \qquad \varepsilon = \det R.$$

■第二基本形式（再掲）． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル $\nu(u,v)$ をとるとき，

$$\begin{aligned} I\!I &:= -dp\cdot d\nu = -(p_u\cdot\nu_u)\,du^2 - (p_u\cdot\nu_v + p_v\cdot\nu_u)\,du\,dv - (p_v\cdot\nu_v)\,dv^2 \\ &= L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (du,dv)\,\widehat{I\!I}\begin{pmatrix} du \\ dv\end{pmatrix} \qquad \left(\widehat{I\!I} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

を**第二基本形式**，L, M, N を**第二基本量**，$\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**という．

問 3.3. 上の状況で $-p_u\cdot\nu_u = p_{uu}\cdot\nu$, $-p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u = p_{uv}\cdot\nu$, $-p_v\cdot\nu_v = p_{vv}\cdot\nu$ となることを示しなさい．とくに，$M = -p_u\cdot\nu_v = -p_v\cdot\nu_u$.

問 3.4. 曲面 $p(u,v)$, $\tilde{p}(\xi,\eta)$ がパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で移り合うとき，$\tilde{\nu}(\xi,\eta) = \nu(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta))$ は $\tilde{p}$ の単位法線ベクトルを与える．この単位法線ベクトルに対して $\tilde{p}$ の第二基本行列を $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ とすると $\widetilde{\widehat{I\!I}} = {}^tJ\,\widehat{I\!I}\,J$ が成り立つことを確かめなさい．ただし J はパラメータ変換のヤコビ行列である．

問 3.5. 曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu(u,v)$ とする．直交行列 R と定ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\hat{p}(u,v) := Rp(u,v) + \boldsymbol{a}$, $\hat{\nu} := R\nu$ とおくと $\hat{\nu}$ は $\hat{p}$ の単位法線ベクトルで，$\hat{\nu}$ に対する $\hat{p}$ の第二基本形式は p の第二基本形式と一致することを示しなさい．

■ワインガルテン行列　曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル ν をとり，第一・第二基本行列を $\widehat{I}$, $\widehat{I\!I}$ とする．

問 3.6. (1) $\widehat{I}$ は正則であることを示しなさい．(2) $\widehat{I}$ の固有値は正の実数であることを示しなさい．

定義 3.7. $A := \widehat{I}^{-1}\,\widehat{I\!I}$ を**ワインガルテン行列**という．

定理 3.8 (ワインガルテンの公式，テキスト 85 ページ，命題 8.5)**.** $(\nu_u,\nu_v) = -(p_u,p_v)A$.

2018 年 12 月 20 日

■ガウス曲率・平均曲率．

問 3.9. 曲面 $p(u,v)$ からパラメータ変換 $(\xi,\eta)\mapsto(u,v)$ で得られる曲面 $\tilde{p}(\xi,\eta)$ のワインガルテン行列 $\widetilde{A}$ は $p(u,v)$ のワインガルテン行列 A とパラメータ変換のヤコビ行列を用いて $\widetilde{A}=J^{-1}AJ$ と表されることを確かめなさい．さらに A の固有値はパラメータのとり方によらないことを示しなさい．

問 3.10. 問 3.5 の状況で $\hat{p}$ のワインガルテン行列は p のワインガルテン行列と一致することを示しなさい．

定理 3.11 (テキスト 86 ページ，定理 8.7; 90 ページ，問題 1)**.** ワインガルテン行列の固有値は実数である．

定義 3.12. ワインガルテン行列 A の固有値 κ_1, κ_2 を曲面の**主曲率**，$K:=\kappa_1\kappa_2=\det A$, $H:=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}A$ をそれぞれ**ガウス曲率**，**平均曲率**という．

問 3.13. (1) 平面の主曲率は 2 つとも 0 で，ガウス曲率，平均曲率はともに 0 になることを示しなさい．
(2) 半径 r $(r>0)$ の球面の単位法線ベクトルを内向きにとると，ガウス曲率は $1/r^2$，平均曲率は $1/r$．
(3) 正の定数 r に対して $p(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v)$ は半径 r の円柱面を与える．この曲面の主曲率，ガウス曲率，平均曲率はそれぞれ $\pm1/r$ と 0，0，$\pm1/(2r)$ である．

問題

3-1 区間 $(1,\infty)$ 上で定義された C^∞-級関数
$$f(v):=\log\left(v+\sqrt{v^2-1}\right)-\frac{\sqrt{v^2-1}}{v}$$
に対して，曲面
$$p(u,v)=\left(\frac{\cos u}{v},\frac{\sin u}{v},f(v)\right)\qquad(|u|<\pi, v\in(1,\infty))$$
のガウス曲率と平均曲率を求めなさい．

3-2 パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν とするとき，$\widehat{III}:=\begin{pmatrix}\nu_u\cdot\nu_u & \nu_u\cdot\nu_v\\ \nu_v\cdot\nu_u & \nu_v\cdot\nu_v\end{pmatrix}$ を第三基本行列，その各成分を第三基本量という．次を示しなさい：
(1) $\det\widehat{III}=K^2(EG-F^2)$. ただし K はガウス曲率，E, F, G は第一基本量である．
(2) $\widehat{III}-2H\,\widehat{II}+K\,\widehat{I}=O$. ただし H は平均曲率，$\widehat{I}$, $\widehat{II}$ はそれぞれ第一基本行列，第二基本行列である．