2019 年 1 月 10 日 (2019 年 1 月 17 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 4

■お知らせ　次回 1 月 17 日に定期試験の予告を行いますので，皆様お誘い合わせの上ご出席ください．

■前回までの訂正

- キーワードをお送りしたメイル：「本日の提出課題おキーワード」⇒ 「本日の提出課題のキーワード」
- 教科書 84 ページ：「曲面 $p = (\cos u, \sin u, v)$ は $\mathbb{R}^3$ における xy 平面」
  ⇒ 「曲面 $p = (\cos u, \sin u, v)$ は z-軸を軸とする半径 1 の円柱面」
- 板書の誤り（擬球面の単位法線ベクトル）：$\nu = (\cos u \tanh v, \sin u \tanh v, \operatorname{sech} u)$⇒ $\nu = (\cos u \tanh v, \sin u \tanh v, \operatorname{sech} v)$
- 板書の誤り（球面のガウス曲率と平均曲率）：$K = \pm 1$, $H = 1$ ⇒ $K = 1$, $H = \pm 1$.
- 講義資料 3, 1 ページ，質問 1 の 3 行目：正を得られます ⇒ 正解を得られます．
- 講義資料 3, 1 ページ 1 番下：変動関数 ⇒ 偏導関数
- 講義資料 3, 2 ページ 1 行目：事なのですか du や dv ⇒ 事なのですか. du や dv (ピリオド追加)
- 講義資料 3, 3 ページ，問 3.2 (2)：$\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$ のあとにコンマ，$\varepsilon = \operatorname{sgn}\det\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$ の後にピリオド．
- 講義資料 3, 3 ページ，問 3.2 (3)：$\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|}$ のあとにコンマ．（ここまで，講義資料 2, 3 ページ，問 2.6 も同様の修正）
- 講義資料 3, 4 ページ，問 3.13 (2)：外向き ⇒ 内向き

授業に関する御意見

- ほとんど毎回，講義資料が偶数ページになっていることに気づきました．意図的でしょうか．　**山田のコメント：** はい．
- 12/21 日 PM 1:00 時点で東工大ホームの山田先生のページが更新されていません．ミラーサイトはこうしんされていました．しかし，講義に出て入れば支障はありませんね．
  山田のコメント： 申し訳ありません．東工大ホームの方は学外からの更新に少しだけ手間がかかるので，遅れることがあります．ミラーサイトをご利用ください．
- 先週の宿題の 2 番目の問が解けませんでしたが，解説をきいたら，微分形式を因数分解するところが面白かったです．　**山田のコメント：** なるほど．
- $\widehat{II}$ でわざわざマイナスを付けた理由がわかって感動しました．　**山田のコメント：** マイナスを付けない人もいますが．
- ハイパボリック関数の計算がまだまだおぼつかないなと感じました．$\operatorname{cosech} v$ とか言われてどんな関数か分かっていませんでした．　**山田のコメント：** cosec ならわかりますか？
- 重要なところや板書の多い所の後の話の前に「ここは聞き逃す人が多い」など注意喚起してくれるので，聴き逃しがなくて助かります．　**山田のコメント：** それはよかった．
- 授業の前半（というか前回の課題の解説）の時に話されていた犬のたとえがイマイチよくわからなかったので，教えていただきたいです．　**山田のコメント：** 「イマイチ」(「いまひとつ」の略) ならどこまでわかっているのか明示する必要があります．「xz 平面の曲線で $(1, 0)$ を通り，各点における z 軸におろした接線の長さがつねに 1 である曲線」が犬跡線である，というところまでは大丈夫ですか？
- 今回配布のプリントの質問と回答で，du，dv の扱いは多様体までお預けということがよく分かった．　**山田のコメント：** はい．
- Gauss 写像らへんの理解が追いつきませんでした．　**山田のコメント：** そう？
- 前回の問題で私の解き方が少数派だったことに驚きました．お褒め頂き有難う御座います．　**山田のコメント：** これは「多数派」．直交行列の一般形を陽に用いている方は少数．
- ケーリーハミルトンを使って考えましたが，力尽きました．$/\xi$ は書きづらい．　**山田のコメント：** そう？
- ν，u，v などの記号を読み取るのに少し苦労することがあった．　**山田のコメント：** ごめんなさい．
- 古典的な曲面の幾何学を味わいたいと思います．　**山田のコメント：** どうぞ
- メビウスの輪は「裏表がない」のでポジティブなイメージがあるのだとおもいます．　**山田のコメント：** 「幸せをよぶクラインの壺」もそうかもしれませんね．
- 幸せのクラインの壺を見たら幸せになりました．　**山田のコメント：** よかったです．
- 「〓」(山田注：目偏に寺) この字がどうやってプリントにのるか気になりました．　**山田のコメント：** ？
- 来年も宜しくお願いします．　**山田のコメント：** こちらこそ．

質問と回答

質問 1：　(レポート問題について) H が v を含む答えになっているが，座標変換で変わらないか．もしくは答えが間違っているか．　**お答え：**「パラメータの取り方によらない」とは，次の意味：パラメータ (u, v) で表した曲面 $p(u, v)$ の平均曲率を $H(u, v)$，パラメータ変換 $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ によって同じ曲面を $\tilde{p}(\xi, \eta) = p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ と表したときの平均曲率を $\tilde{H}(\xi, \eta)$ と書くとき，$\tilde{H}(\xi, \eta) = H(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ が成り立つ．

質問 2：　Weingarten 行列の固有値 λ_1, λ_2 が曲面の最大曲率，最小曲率を与えることを示したいのですが，方針を教えていただけますか？　**お答え：**最大**法**曲率ですね．テキスト 97 ページ，命題 9.3.

質問 3：　ワインガルテン行列は微分形式を使って書くとどういう量なのでしょうか．

お答え：　テンソル性が違うので「微分形式」で書くことはできません．強いて書くなら，
$A_1^1 \frac{\partial}{\partial u} \otimes du + A_1^2 \frac{\partial}{\partial v} \otimes du + A_2^1 \frac{\partial}{\partial u} \otimes dv + A_2^2 \frac{\partial}{\partial v} \otimes du$, ただし $A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix}$.

質問 4：　I, II 基本形式を定めるということは，2 次の微分形式の特殊なものを定めるということだと感じました．もし n 次元中の曲面を考えたとき，$(n-1)$ 次の特殊な微分形式を定めれば，曲面は決定できますか．

お答え：　$\mathbb{R}^n$ の**超**曲面のことなら，第一，第二基本形式（これらはともに 2 次の対称微分形式）から曲面が決まります．

質問 5：　第 1，2 基本形式などから曲面を求めるような話ってでてきますか．　**お答え：**お話としてなら．テキスト B-9.

質問 6：　授業で，ワインガルテン行列 A の個有値（原文ママ：固有値のこと？）が実数という事を扱ったが，これは一般次元に拡張できない気がする．（証明が，2×2 行列特有の性質を用いていた為）ただ，一般次元に拡張しても $\det A$ や $\frac{1}{2}\operatorname{tr} A$ の値はパラメータ変換によらない量であるのは変わりがない．個有値が全て実数である，という性質は重要な（この性質があるので 2 次元では上手くいっていた事が高次元になると上手くいかない例が存在する）のですか？　**お答え：**超曲面のワインガルテン行列の固有値は常に実数．講義で紹介した証明の他に一般次元に有効な証明はテキスト 274 ページ（前回の講義資料に訂正あり）もある．

質問 7： 教科書に第三基本量が出てこないのは，第一基本量，第二基本量を使って表せる量以外に有用な量は知られていないということでしょうか． **お答え：**第一基本量，第二基本量から曲面は決まってしまうので，第三基本量も第一基本量，第二基本量から決まる，というのが理由．だからといって有用でない，というわけではない．

質問 8： なぜ第 1, 2, 3 基本形式の間にケーリー・ハミルトンのような式が成り立つのでしょうか．H, K が tr, det であることはわかりましたが，ケーリー・ハミルトンの式と照らし合わせて，$\widehat{I}$ が単位行列，$\widehat{II}$ が A （2 次正方行列），$\widehat{III}$ が A^2 に対応する気がしません... **お答え：**それが対応するんです．

質問 9： 先週欠席して知人にノートを見せてもらったのですが $\int\sqrt{ds^2}$ が曲線の長さを表すというのは（以下略）という解しゃくでよいでしょうか． **お答え：**いいえ，曲線の長さは講義資料 1 の (1.3) 式（ここには何の解釈もない）．積分の中の $\sqrt{\dots}\,dt$ は，曲線の弧長 s の微分 ds と書ける．これが，第一基本形式を ds^2 と書く理由．

質問 10： 曲面論で，曲線論の変曲点に対応するものはあるのでしょうか． **お答え：**はい，主曲率が零になる点が対応物でしょう．主曲率は 2 つあるので，一方のみが 0 の場合，両方が 0 の場合を分けて考えた方がよいかも．

質問 11： 等温座標系の存在のように 2 次元曲面では成り立つが，より高次の次元の曲面では成立するとは限らない定理でおもしろいものを知りたいです． **お答え：**例えば複素構造の存在．ガウス・ボンネ型の定理（一般化はある）．

質問 12： 漸近方向は法曲率が 0 となる接ベクトルの方向のことだと思うが，漸近線座標はどういったものなのかよく分からなかった． **お答え：**テキスト 101 ページ．

質問 13： 平面の曲率（原文ママ：曲面の曲率のことか）は曲線のときと違って，主曲率，ガウス曲率，平均曲率と複数ありますが，複数の曲率を定めることに何か意味があるのですか？ **お答え：**空間曲線には曲率と捩率という 2 つの曲がり具合があります．この 2 つを考えるのにどういった意味があるでしょうか．この理由と比較してください．

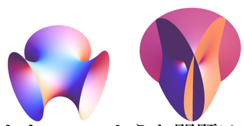
質問 14： 第一基本量や第二基本量で表されるガウス曲率や平均曲率には $K=0$，$H=0$ の時に曲面に関する情報を得ることができますが，$E=1$ や $L=0$ のときなどに，このことから曲面の情報を得ることはできないのでしょうか．（基本量はそれだけでは意味をもたないのでしょうか） **お答え：**E や L はパラメータに依存する量．

質問 15： ガウス曲率，平均曲率と曲面の曲がり具合にはどのような関系（原文ママ：関係のことか）があるのでしょうか． **お答え：**テキスト 86 ページ，定理 8.7，テキスト 82 ページ，102 ページなど参照．

質問 16： やろうと思えばガウス曲率を第一基本量だけで表すことはできますか． **お答え：**テキスト 111 ページ．

質問 17： 2-2 の答えは一つだけですか．$u=\xi+\eta$, $v=\xi-\eta$ でもあっていると思いますが． **お答え：**おっしゃるとおりで答えは無限個あります．(ξ,η) が漸近座標系ならば，単調な一変数関数 f, g によって $\xi=f(X)$, $\eta=g(Y)$ により新しい座標 (X,Y) をとれば，これは漸近座標系である．

質問 18： 任意の閉曲面に対して，その Gauss 写像は全射になると思いますが，その逆は成り立ちますか？ **お答え：**いいえ．下の図（Jorge-Meeks' 3-noid と呼ばれている）は閉曲面でない（非有界な）曲面で，ガウス写像は全射．



質問 19： 今回の 3-1 は僕が計算ミスをしていなければ，かなりきれいな結果だと思います．このような問題はどのように作成（入手）されているのでしょうか． **お答え：**計算ミスあり．今回の問題は擬球面．

質問 20： 先生はとても計算が早いように思われるのですが，何か計算練習などをしている（た）のでしょうか．もしよければ，逆函数や双曲線函数等の演習になれるための本を紹介してもらえると助かります．

お答え： 問題をたくさん作るのがよいかも．計算練習なら，米国の calculus の教科書をいくつか探してみるとよい．

質問 21： 前回の質問を読んで曲面のベクトル場としては（原文ママ：単位法線ベクトル場？）裏か表しか存在しないことがわかりました．しかし，曲面 p に対してそのベクトル場が必ず 1 つになるとは思えないのですが，ベクトル場が異なるときはガウス曲率はどうなるのでしょうか （一致しますか？）．また，曲面は正則な曲面の貼り合わせとして考えるしかないと思うのですが，このときベクトル場も貼り合わせであらわされると思います．このとき，ベクトル場に条件がないとうまくいかないのではないでしょうか． **お答え：**ベクトル場と単位法線ベクトル場では指しているものが違う．前半：一致すると説明した．後半：単位法線ベクトル場が曲面全体で定義されるとき，曲面は「向きづけ可能」という．

質問 22： $\widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ の行列式はひょっとしてパラメータによらず必ず同じ値になりますか？ **お答え：**と講義で説明した．

質問 23： $\operatorname{cosech} v$ って何ですか？ **お答え：**$1/\sinh v$.

質問 24： 【前回の掲載漏れ】「『うつり方』がはっきりしているから不変量を取り出したい」と仰ったと思いますが，“うつり方”をみて不変量を定めるのに統一的な手法はありますか? 微分形式という高次の概念が定義されるのを見て，これを自然と見なす見方があるのか疑問に思いました． **お答え：**前半と後半は異なる疑問ですね．前半：いくつかの手法があるが，統一的とはいえない．後半：いま自然に思えなくっても，慣れてくると自然に思えます．

4　主方向・漸近方向

■接成分，法成分．　パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．

$$\mathbb{R}^3 = V_{\mathrm{P}} \oplus \mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}} \qquad (V_{\mathrm{P}} \text{ は } \mathrm{P}=p(u_0,v_0) \text{ における曲面の接平面}, \nu_{\mathrm{P}}=\nu(u_0,v_0)) \tag{4.1}$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} \qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\in V_{\mathrm{P}}, [\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}}\in\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}) \tag{4.2}$$

と一通りに分解することができる．

問 4.1. 式 (4.2) において $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}} = (\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$, $[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}\cdot\nu_{\mathrm{P}})\nu_{\mathrm{P}}$ であることを示しなさい．

■曲面上の曲線．　パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ と，uv-平面上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ に対して，空間曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ は曲面上の曲線を与える．

問 4.2. 次を確かめなさい．

- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の $\mathrm{P}:=\hat\gamma(t_0)$ における速度ベクトルは次で与えられる．
$$\dot{\hat\gamma}(t_0) = \dot u(t_0)p_u(u_0,v_0) + \dot v(t_0)p_v(u_0,v_0), \qquad (u_0,v_0)=\bigl(u(t_0),v(t_0)\bigr).$$
- 曲面上の曲線 $\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ のパラメータ s が弧長であるための必要十分条件は
$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$
である．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u,v)=\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

■法曲率．　曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．$\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ を，$\mathrm{P}=\hat\gamma(s_0)$ となる曲面上の曲線で s はその弧長パラメータとする．このとき，

$$\hat\gamma''(s_0)=\boldsymbol{\kappa}_g+\boldsymbol{\kappa}_n, \qquad \boldsymbol{\kappa}_g := [\hat\gamma''(s_0)]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\kappa}_n := [\hat\gamma''(s_0)]^{\mathrm{N}} = \kappa_n\nu_{\mathrm{P}}, \qquad \kappa_n = \hat\gamma''(s_0)\cdot\nu_{\mathrm{P}}$$

とおき，$\boldsymbol{\kappa}_g$，$\boldsymbol{\kappa}_n$，κ_n をそれぞれ曲線 $\hat\gamma$ の P における**測地的曲率ベクトル**，**法曲率ベクトル**，**法曲率** という．

問 4.3. 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\hat\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ の $\mathrm{P}=\hat\gamma(s_0)$ における法曲率は

$$\kappa_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \tag{4.3}$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量の $(u,v)=\bigl(u(s_0),v(s_0)\bigr)$ での値とする．また，弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(\mathrm{P}=\hat\gamma(t_0))$ の P における法曲率は次で与えられる：

$$\kappa_n = \frac{L(\dot u)^2+2M\dot u\dot v+N(\dot v)^2}{E(\dot u)^2+2F\dot u\dot v+G(\dot v)^2}. \tag{4.4}$$

2019 年 1 月 10 日 (2019 年 1 月 17 日訂正)

式 (4.4) から，点 P における曲線の法曲率は $(\dot{u}(t_0), \dot{v}(t_0))$ の方向のみ，すなわち $\hat{\gamma}$ の接線の方向のみに依存する．したがって，次の $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は well-defined である：

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) := \text{点 P で速度 } \boldsymbol{v} \text{ をもつ曲面上の曲線の P における法曲率} \qquad (\boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\}). \tag{4.5}$$

命題 4.4 (テキスト 94 ページ，定理 9.1)**.** 曲面 p の $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における接ベクトル $\boldsymbol{v} \in V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して，P を通り，ν_{P} と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v}, \nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

問 4.5. 式 (4.5) の写像 $\kappa_n \colon V_{\mathrm{P}} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}$ は，次を満たすことを確かめなさい：

$$\kappa_n(\tau\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v}) \qquad (\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}); \qquad \text{とくに} \quad \kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v}). \tag{4.6}$$

命題 4.6 (テキスト 97 ページ，命題 9.3)**.** 法曲率 $\kappa_n \colon V_{\mathrm{P}} \to \mathbb{R}$ の最大値・最小値は P における主曲率である．

点 P における 2 つの主曲率が一致するとき，P を**臍点**（せいてん）という．点 P が臍点でないとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v}_j) = \kappa_j$ $(j = 1, 2)$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_j \in V_{\mathrm{P}}$ の方向を，P における主曲率 κ_j に対応する**主方向**と呼ぶ．

命題 4.7 (テキスト 97 ページ)**.** 曲面 $p(u, v)$ の臍点でない点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における主曲率 κ_j に対応する主方向 $\boldsymbol{v}_j$ を $\boldsymbol{v}_j = \alpha_j p_u(u_0, v_0) + \beta_j p_v(u_0, v_0)$ と表すと，${}^t(\alpha_j, \beta_j)$ は P におけるワインガルテン行列 A_{P} の，固有値 κ_j に対応する固有ベクトルである．

■漸近方向．

問 4.8. 曲面上の点 $\mathrm{P} = p(u_0, v_0)$ における曲面のガウス曲率が負であるとき，次を確かめなさい：

- $\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ がちょうど 2 つ存在する（**漸近方向**; テキスト 99 ページ，命題 9.8）．
- 曲面の接平面（点 P を通る平面と見なす）と曲面との共通部分は P の近くで P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる（テキスト 100 ページ，定理 9.9）．
- 2 つの漸近方向は，主方向で 2 等分される（テキスト 101 ページ，命題 9.10）．

問題

4-1 曲面 $p(u, v)$ 上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ の各点 $\hat{\gamma}(t)$ が臍点でなく，その点における速度ベクトル $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ が主方向をあたえているとき，**曲率線**という．$\hat{\gamma}(t)$ が p の曲率線であるとき，曲面

$$q(t, s) := p\bigl(u(t), v(t)\bigr) + s\nu\bigl(u(t), v(t)\bigr)$$

のガウス曲率を求めなさい．ただし $\nu(u, v)$ は曲面 p の単位法線ベクトル場である．

4-2 曲面 $p(u, v)$ のガウス曲率が一定で -1 とする．(u, v) が漸近座標系ならば，$E(u, v)$ は u のみの関数，$G(u, v)$ は v のみの関数になることを示しなさい．さらに，パラメータ変換 $(\xi, \eta) \mapsto (u, v)$ をうまくとれば，

$$ds^2 = d\xi^2 + 2\cos\theta\, d\xi\, d\eta + d\eta^2, \qquad I\!I = 2\sin\theta\, d\xi\, d\eta$$

とできることを示しなさい．ただし $\theta = \theta(\xi, \eta)$ は (ξ, η) の実数値関数で，$\theta_{\xi\eta} = \sin\theta$ を満たす．