2019 年 1 月 17 日 (2019 年 1 月 24 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 5

お知らせ

- 本日，定期試験の予告をいたします．欠席された方は，講義 web ページ，OCW から予告（兼持ち込み用紙）をプリントアウトしておいてください．
- 定期試験（1 月 31 日）の翌週，2 月 7 日を補講日としています．この時間は，(1) 定期試験の返却・コメント (2) 講義中からもれた話題の紹介を行います．
- 【広告】理学院主催講演会「太陽系の外の惑星の世界」2019 年 1 月 23 日（水）17:30–19:30；東工大レクチャーシアター．（`https://www.titech.ac.jp/event/2019/043293.html`）

前回までの訂正

- 問題 4-1 で曲線 $\hat{\gamma}$ が曲率線であるための条件が書けない，というご意見がありました：$\gamma(t) = (u(t), v(t))$ の接ベクトル (u', v') が行列 A の固有ベクトルとなる．このこととワインガルテン行列の性質から，$u'\nu_u + v'\nu_v = -\lambda(u'p_u + v'p_v)$ となることが，曲率線であることと同値．ただし λ はこの主方向に対応する主曲率．
- 有界閉集合がコンパクトになる条件について，不十分なことを申し上げました．正確には「完備リーマン多様体の部分集合が有界閉集合であることとコンパクトであることは同値」．完備距離空間の部分集合で，有界閉かつコンパクトでないものの例を挙げてくださった方が 2 名．ありがとうございました．
- 板書で第二基本行列を $\begin{pmatrix} L & M \\ N & N \end{pmatrix}$ と書いたようです．$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ です．
- 講義資料 4, 1 ページ最後の行：証明テキスト ⇒ 証明はテキスト
- 講義資料 4, 2 ページ，質問 11: 鏡面 ⇒ 曲面
- 講義資料 4, 3 ページ，問 4.2 の第一式：前半の式の後にコンマ．

授業に関する御意見

- 主方向が直交するのが不思議です． **山田のコメント：** ワインガルテン行列 A が接平面（に内積を考えたもの）から自分自身への対称作用素の表現行列であることから来ています．線形代数で学んだ「対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する」に対応しています．
- 先生が第三基本形式を使われたのがどういう状況だったのか気になりました．
  山田のコメント： 第一基本形式が退化する（正則性を満たさない）点で，それを補うために第三基本形式を用いました．
- $\boldsymbol{\kappa}_g$ の名前が難しい． **山田のコメント：** そう?
- 4-1 で曲線が主方向を与えることと同値な条件が見つかりませんでした．これから出された問題は理解して解くことができない気がします．それほどに授業が難しいです． **山田のコメント：** ごめんなさい．
- 小林昭七先生の本と山田先生の本をどちらも参照しつつ勉強すると楽しいです．
  山田のコメント： 山田は小林本で勉強しました．学生時代は梅原-山田本がなかったので（当たり前）．

質問と回答

質問 1： 今回の法曲率は内的な量，外的な量にわけるとしたら外的なものですよね． **お答え：** はい．円柱面が例．

質問 2： 教科書では，内的な量は多様体につながったとあったが，外的な量は何かにつながったのか．

お答え： そのまま曲面の不変量．第一基本形式が一致している曲面が合同か否かは「外的な量」で区別する．

質問 3： 単位法線ベクトルの向きを変えると Gauss 曲率はかわらない一方，主曲率と平均曲率の符号はかわります．いま，授業で学んでいる範囲では単位法線ベクトルの向きを区別する必要がなくとも，今後の議論でこれを区別して考えることはありますか． **お答え：** 単位法線ベクトル ν を用いて $p_t = p + t\nu$ で与えられる曲面（平行曲面）を考えます．もし，この ν に対して平均曲率が正ならば，平行曲面の “面積” は t に関して減少，負なら増加します．

質問 4： 法曲率ベクトル，法曲率は図形の中でどういったものを表していますか．また，これらは現実世界でどういったところにあらわれていますか． **お答え：** 法曲率は，加速度の法成分．曲線の速度ベクトルと曲面の法ベクトルがはる平面で曲面を切った切り口の（平面曲線としての）曲率が法曲率．曲線の加速度ベクトルの法成分が法曲率ベクトル（ということを講義で説明した気がする）．

質問 5： 途中で出てきた，接ベクトルの方向の法曲率が well-defined であることについてですが，曲線によらず値が一意に定まることはわかりましたが，曲線が存在することはどのようにして示すのでしょうか．

お答え： $\boldsymbol{v} = \alpha p_u(u_0, v_0) + \beta p_v(u_0, v_0)$ に対して，$\hat\gamma(t) = p(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta_t)$ とすると $\hat\gamma'(0) = \boldsymbol{v}$.

質問 6： $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ について，ある点 (u_0, v_0) に対して $\boldsymbol{v} = \alpha p_u + \beta p_v$ ($|\boldsymbol{v}| = 1$) を 1 つ定めると，点 (u_0, v_0) において速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ となるような曲線が存在してその時の κ_n を $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ と定める．これは well-defined である，という意味でしょうか． **お答え：** はい，そうです．

質問 7： 曲面の法曲率は，曲面上の曲線 $\gamma(s)$ と ν の内積で与えられ（原文ママ：弧長 s で表したときの加速度），$\kappa_n = \gamma''(s) \cdot \nu =$（略）と表され，曲面以外の要素の u'，v' を α, β とおけば接方向 $\alpha p_u + \beta p_v$ で法曲率が決まるところまでは分かったのですが，「$|\boldsymbol{v}| = 1$，$\boldsymbol{v} = \alpha p_u + \beta p_v$ の法曲率が well-def $\Leftrightarrow \kappa_n = \kappa_n(\boldsymbol{v})$」という記述の κ_n が何を表すのかが分かりませんでした． **お答え：** すこし曖昧でしたね．曲線 γ で決まるという意味で $\kappa_n = \kappa_n(\gamma)$ なのですが，実は接ベクトルの情報のみで決まるという意味で $\kappa_n(\boldsymbol{v})$ と書く，というわけです．

質問 8： $\kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v})$ というのがよくわかりません． **お答え：** この式が成り立つといっているだけです．

質問 9： 曲面の曲率線座標，漸近線座標それぞれの幾何学的意味を教えて頂けますか？

お答え： 幾何学的意味でどんなものを想像していますか．前者：座標曲線が各点で主方向を与えている．とくに座標曲線の法曲率は主曲率．後者：座標曲線の法曲率が 0.

質問 10： 測地的曲率ベクトルにはどんな幾何学的な意味がありますか． **お答え：** 加速度の曲面に接する成分.

質問 11： ある点で主曲率がどちらも 0 となるような曲面として，平面，サルの腰掛け面が考えられますが，これら以外で上の性質を満たすような曲面としてどのようなものがありますか？

お答え： さまざまな作り方があると思いますが，たとえば極小曲面（平均曲率が恒等的に 0 である曲面）の臍点はご質問の性質を持ちます．講義資料 4，質問 18 の図のような曲面の「真ん中」の点がそのような点です．

質問 12： 漸近線座標の例をもっと知りたい． **お答え：** 問：一葉双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ の漸近線座標表示を求めよ．

質問 13： 臍点での曲面の形のイメージができないです． **お答え：** 主曲率 κ が 0 でないときは，半径 $1/|\kappa|$ の球面で "近似" できる．

質問 14： 完備距離空間の有界閉集合であり，コンパクトでない例として，ヒルベルト空間の単位球面が挙げられると思います． **お答え：** Thanks．そのとおりですね（無限次元ヒルベルト空間ですね）．

質問 15： 「完備距離空間において有界閉 $\Leftrightarrow$ コンパクト」という主張で $(0, 1)$ （とユークリッド距離）は完備でないので，関係ありませんでした（すいません）．無限離散空間（と離散距離）X に対して $X \subset X$ が反例になります．

お答え： おっしゃるとおりですね．Thanks（「すいません」は不要）．

質問 16： 4-1 に関して $\hat\gamma(t)$ が曲率線という仮定はいらないと思うのですが．

質問 17： 4-1 の答案が曲率線の仮定を（少なくとも表面上は）使わずに書けたんですが，暗にどこかで使っているんでしょうか．証明に誤りがあるのでしょうか． **お答え：** 曲率線であることは必要です．関数のグラフ $p(x, y) = (x, y, f(x, y))$ 上の曲線 $\hat\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ について計算してみましょう．

質問 18： 問題 4-1 において，s に何かしらの条件を加えないと $q(t)$ が曲面の正則パラメータ表示にならない気がする．この場合，$(1 - \lambda s)$ が 0 になってはならない．またこの問題の条件で，せい点がないことから t に対してワインガルテン行列の固有値の最大値を当てる写像は well-defined され，t に関して連続である（写像 κ_n の連続性）が，一般に写像 $t \to \mathbb{R} \to \{a_{ij}(t)\} \in \{$ 実対称行列 $\}$ （C^∞-級）が与えられたとき，固有値の最大値および最小値は一般には局所的に t における連続関数になるのでしょうか． **お答え：** はい，大丈夫です．（2 次行列の場合は簡単）

質問 19： この曲面の臍点を求めよ，などの問題が出ることはないんですか？ **お答え：** 文脈不明．

質問 20： キーワードが漢字の練習なら臍点なんてよかったと思うのですが，なぜ選ばれなかったのですか？

お答え： (1) メイルでは「漢字を間違えないように」といっていますが，授業では「漢字の練習」とは明確に言っていないと思います．むしろ別の目的をお話したはずですが，出席してなかったようですね．(2) 今回，授業ではとくに臍点に注目しませんでした．やはり出席していなかったようですね．

質問 21： 「曲線と曲面の微分幾何」がとても面白いです．「その本が好きならこの本も好きだろう」と山田先生が思うような本はなにかありますか．

お答え： 小林昭七先生の学部生向けの本がいくつかあるので検索してみましょう．Osserman の本も面白いかも．

5 ガウスの定理

■接成分，法成分（復習）． パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ 上の点 $\mathrm{P}=p(u_0,v_0)$ を固定する．

(5.1) $$\mathbb{R}^3=V_{\mathrm{P}}\oplus\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}}\qquad (V_{\mathrm{P}}\ \text{は}\ \mathrm{P}=p(u_0,v_0)\ \text{における曲面の接平面},\ \nu_{\mathrm{P}}=\nu(u_0,v_0))$$

と直和分解できる．ただし $\nu(u,v)$ は p の単位法線ベクトル．したがって任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ は

(5.2) $$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}+[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}}\qquad ([\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\in V_{\mathrm{P}},[\boldsymbol{x}]^{\mathrm{N}}\in\mathbb{R}\nu_{\mathrm{P}})$$

と一通りに分解することができる．

■測地線．

定義 5.1. 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上のパラメータづけられた曲線

$$\hat\gamma(t)=p\circ\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)\qquad \bigl(\gamma(t)=(u(t),v(t))\bigr)$$

が**測地線** geodesic であるとは

$$\Bigl[\ddot{\hat\gamma}(t)\Bigr]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$$

が成り立つことである．

問 5.2. 曲面上の曲線 $\hat\gamma(t)$ が測地線ならば，その速さ $|\dot{\hat\gamma}(t)|$ は一定であることを確かめなさい．このことから，測地線の概念は曲線のパラメータのとり方に依存する．

問 5.3. 曲面 $p(u,v)$ 上の正則曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ が，パラメータを適切に取り替えると測地線になるための必要十分条件は，

$$\hat\nu(t)\cdot\bigl(\ddot{\hat\gamma}(t)\times\dot{\hat\gamma}(t)\bigr)=0\qquad \bigl(\hat\nu(t)=\nu\bigl(u(t),v(t)\bigr)\bigr)$$

となることである．このことを示しなさい．

問 5.4. 次を示しなさい．

- 平面の測地線は，弧長に比例するパラメータで表した直線である．
- 球面と，その中心を含む平面との共通部分（**大円** a great circle と呼ばれる）は，弧長に比例するパラメータで表示すると測地線になる．

■曲面上の最短線． 正則にパラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ 上の 2 点 P, Q を結ぶ曲線 $\hat\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さは次で与えられる：

$$\mathcal{L}(\hat\gamma):=\int_a^b|\dot{\hat\gamma}(t)|\,dt=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

定理 5.5 (テキスト 104 ページ，定理 10.5)**.** 曲面上の 2 点 P, Q を結ぶ滑らかな曲線のうち，最短のものは適切にパラメータを取り替えれば測地線になる．

2019 年 1 月 17 日 (2019 年 1 月 24 日訂正)

注意 5.6. 定理 5.5 の逆は次の意味で正しくない：(1) 曲面上の 2 点を結ぶ，最短線でない測地線が存在することがある（球面上の，中心に関して対称でない 2 点を考えよ）．(2) 曲面上の 2 点を結ぶ測地線が存在しない場合がある．しかし，曲面上の与えられた点 P に対して，「U 上の 2 点を結ぶ U 内の最短線がただ一つ存在する」ような P の近傍 U をとることができる（凸近傍）．

問 5.7. 平面上の 2 点を結ぶ最短線は，それらの点を端点とする線分であることを確かめなさい．

■ガウスの公式とクリストッフェル記号

定理 5.8 (テキスト 108 ページ，(10.7) 式)**.** パラメータ付けられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトル ν をとり，第一基本量を E, F, G, 第二基本量を L, M, N と表すとき，

$$p_{uu} = \Gamma_{11}^1 p_u + \Gamma_{11}^2 p_v + L\nu, \qquad p_{uv} = \Gamma_{12}^1 p_u + \Gamma_{12}^2 p_v + M\nu, \qquad p_{vv} = \Gamma_{22}^1 p_u + \Gamma_{22}^2 p_v + N\nu \tag{5.3}$$

が成り立つ．ここで Γ_{ij}^k は**クリストッフェル記号**（テキスト 108 ページ，(10.6) 式で与えられる）である．

注意 5.9. クリストッフェル記号は第一基本量とその偏導関数のみからきまる．

系 5.10 (測地線の方程式，テキスト 109 ページ (10.8))**.** 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ が測地線であるための必要十分条件は

$$\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0, \qquad \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0$$

が成り立つことである．

■驚異の定理　等式 (5.3) とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）を用いて，p_{uuv}, p_{uvu} を p_u, p_v, ν の線型結合で表し，ν の係数を比較すると，**ガウス方程式**（テキスト 123 ページの定理 11.2；驚異の定理）が得られる．これは**ガウス曲率 K を第一基本量で表す式** である．

問 5.11. ガウスの驚異の定理を用いて，正確な地図がつくれない理由を説明しなさい．

問題

5-1 曲面
$$p(u,v) = \bigl(\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v\bigr) \qquad (v > 0)$$
上の曲線 $\hat{\gamma}(t) = p \circ \gamma(t)$ $(\gamma(t) = (u(t), v(t)))$ が
$$u(t)^2 + \cosh^2 v(t) = a^2 \qquad (a > 1 \text{ は定数})$$
を満たしているならば，パラメータ t を適切にとれば $\hat{\gamma}(t)$ は測地線となることを示しなさい．

5-2 曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式，第二基本形式がそれぞれ
$$ds^2 = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2), \qquad II = (e^{2\sigma} + 1)\, du^2 + (e^{2\sigma} - 1)\, dv^2$$
と表されているとする．ただし $\sigma = \sigma(u,v)$ は (u,v) のなめらかな関数とする．このとき，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）を σ とその偏導関数の関係式として具体的に表しなさい．