2019 年 1 月 24 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二（MTH.B212）講義資料 6

お知らせ

- 今回が講義最終回です．ご聴講ありがとうございました．
- 授業評価アンケートにご協力ください．
- 今回は提出課題はありません．
- 定期試験の答案は 2 月 7 日（木）に返却します．

前回までの訂正

- 講義資料 5，1 ページ，お知らせの 3 項目：【広告】] ⇒ 【広告】
- 講義資料 5, 1 ページ，前回までの訂正，第 1 項 3 行目：ととなること ⇒ となること
- 講義資料 5，2 ページ，質問 15 冒頭：完備距離空間の . . . ⇒ 「完備距離空間の . . .
- 講義資料 5，2 ページ，質問 17 回答の最後：をについて計算 ⇒ について計算
- 講義資料 5，2 ページ，質問 18 の 2 行目：せい点が内 ⇒ せい点がない
- 講義資料 5，2 ページ，質問 18 の 3 行目：行列の教内 ⇒ 行列の 固有値
- 講義資料 5，4 ページ 3 行目：与えらえれた ⇒ 与えられた

授業に関する御意見

- (教) の図のように，色々な曲面を自分の PC で描画したいのですが，先生はどのようなソフトウェアを用いていますか? 良ければ教えて頂きたいです．
  山田のコメント： Mathematica. 本学学生なら MatLab が使えますね．フリーソフトだと Gnuplot なども有名．
- 擬球面に関する問題は難しく感じます． **山田のコメント：** そう?
- 5-1 はきれいに消えて気持ち良いですね． **山田のコメント：** ですね．
- 問題文の意図を良く読み取ろうと思った．少し計算に強くなれたので今後もがんばりたい． **山田のコメント：** なるほど．
- 質問してわかったけど正則なパラメータ表示できるもののみを扱っているから，上は曲面じゃない気がする．（もちろん証明はできないです） **山田のコメント：** 質問 1 ですね．原点の周りでは曲面になっていませんね．
- 遅れてしまいもし訳ありません．また問も答えられず申し訳ありません． **山田のコメント：** 謝る必要はないのでは？

質問と回答

質問 1： 注意 5.6 の「U 上の 2 点を結ぶ. . . 」についてですが $p(U) \subset \mathbb{R}^3$ の 2 点ではないでしょうか．また，上の図のような" 曲面" （山田注：穴が無限個空いている平面で，穴が原点に集積している）だとそのような近傍がとれない気がします． **お答え：**前半：ここの書き方が曖昧ですが，$\mathrm{P} \in \mathbb{R}^3$ は曲面上の点，U は $\mathbb{R}^3$ での P の近傍と曲面の共通部分（$\mathbb{R}^3$ から導かれる相対位相での近傍）という意味ととってください．後半：曲面の正則点の周りではとれます．たとえば「穴」の間の点に対しては，穴に当たらないように十分小さい円板を取ればよい．

質問 2： 問 5.11 の設定についてですが，これは球体から平面への合同変換が存在しないということでしょうか．

お答え： いいえ．まず「球体」は 3 次元的な図形（中が詰まっている）だと思うので「球面」と言い換えるべきです．合同変換は $\mathbb{R}^3$ の回転，折り返し，平行移動なので，存在しないのは当たり前．距離や道のりをたもつ球面（の一部）から平面（の一部）への写像が存在しない，ということを確かめる，というのが問題．

質問 3： 測地線であれば 2 点を結ぶ長さが最小であるとは言えないですか．また，言えないのなら，平面以外で任意の 2 点を結ぶ曲線の長さが最小であることとその曲線が測地線であることが同置（原文ママ：同値）となる曲面はありますか． **お答え：**前半：言えません．球面の 2 点を結ぶ大円の弧のうち長い方が反例になっています．後半：たとえば双曲放物面．証明は少し面倒くさい．$\mathbb{R}^3$ の曲面ではないが，双曲平面（今回説明する）もそう．

質問 4： 曲面上では長さのような距離は常に定まるとはかぎらないのですか．（地測線（原文ママ）が存在すると，その長さが距離のように考えられそうだと思ったので） **お答え：**「長さのような距離」とは? 測地線のあるなしにかかわらず，曲面上の 2 点を結ぶ曲線の長さの下限を 2 点間の距離とよべば，それは距離の公理を満たします．

質問 5： $\boldsymbol{\kappa}_n = \mathbf{0}$ の場合は運動としてはどのような意味があったりしますか． **お答え：**漸近曲線．

質問 6： ガウス曲率が第一基本量のみにかけることに “驚異” とついていることが不思議です．第一基本量はパラメータ変換で変化するので，第一基本形式のような曲面の不変量として使いにくい気がします． **お答え：**ガウス曲率の定義 $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ はどうでしょう．右辺はパラメータ変換で変化する量でかかれていますが．

質問 7： 最短線は単位法線ベクトルの取り方によりますか？ **お答え：**弧長は単位法線ベクトルの取り方によりますか？

質問 8： 測地線がパラメータによることの例として，飛行機の最速ルートと地上の最短ルートが違うことを挙げるのは適切でしょうか． **お答え：**この 2 つは違うものなのでしょうか．飛行機は地表 10Km 程度を飛んでいるのでほぼ地表にいるものと思ってよいはず．

質問 9： 変分法のところで「始点と終点が固定された曲線全体の空間」にはどのような位相または距離が入っているのでしょうか． **お答え：**とくにここでは考えていないですね．曲線の「変分」がもとの曲線の近くにある，という位相を入れればよいわけですが，どういう位相がよいでしょう（問）．

質問 10： 2 点を結ぶ曲線の内，長さが最小となるものが準測地線であるという主張の証明の際，2 点を通る曲線全体の集合を考え，それに対して曲線を連続に変化させるという方針だったのですが，2 点を通る全ての曲線は，ある 1 つの曲線から連続的に変化させることができるのでしょうか． **お答え：**いいえ．「ホモトピー同値」でない曲線の例はたくさんあります．ここでは「最短線ならば，連続変形できる曲線のうちでも最短」を使っています．

質問 11： 曲面の 2 点の最短距離が存在しない例は穴が空いている平面以外にありますか?

お答え：「最短距離」って何ですか？距離空間の 2 点の距離は最短も何も一つに決まるはずですが（というのが位相で習った距離の定義）．講義では「2 点を結ぶ最短線」と述べたはずです．

質問 12： 測地線であることを証明するためには，測地的曲率ベクトルが恒等的に 0 であること以外にありますか? $\ddot{\hat{\gamma}} \cdot \dot{\hat{\gamma}} = 0$ だけだと弱いですね． **お答え：**弱すぎます．ご質問の式は「速さが一定」ということと同値です．

質問 13： 5-1 の解法で $\ddot{\hat{\gamma}}(t) = k\dot{\hat{\gamma}}(t) + \kappa_n \nu \leftrightarrow \ddot{\hat{\gamma}}(t)$ が $\dot{\hat{\gamma}}(t)$ と ν の張る平面にのる $\Leftrightarrow (\dot{\gamma}(t) \times \nu) \cdot \gamma(\ddot{\hat{t}}) = 0$ を示す，という方法を思いついたのですが，この解法で問題ないですか？（自信がなかったので答案は測地線の方程式を解く方針でやりました）． **お答え：**問題ないです．

質問 14： 5-1 の結果の式（原文ママ：5-2 のことだと思う）は I (原文ママ；ds^2 のこと？), II を問いのような形であたえたときにこれをみたす曲面が存在することの条件ですか． **お答え：**はい．少々コメントが必要ですが．

質問 15： 問題 5-2 について，一見かなり非自明な式が出てきたのですが，これはガウスの定理が非自明な関係式であるという事が分かる例ということなのでしょうか． **お答え：**そうだと思います．

質問 16： 4-1 の条件の使い方が分かりませんでした． **お答え：**講義で説明しましたが，どの部分が？

質問 17： 計算してたまたま合ったという感じだったのですが，一般の回転面の準測地線も問題 5-1 のように回転面を $(\cos u\sigma(v), \sin u\sigma(v), z(v))$ として σ と z （とその微分など）の式を係数にした方程式の解という形でかけるのでしょうか． **お答え：**微分を含むならそのとおりですね．ここでは微分を含まない形になっていますね．

質問 18： (教) p83 によると，任意の区分的になめらかな空間単純閉曲線について，それを境界にもつ極小曲面の存在が知られていて，一意性は必ずしも成立しないみたいですが，そのような例を教えて頂けますか？（反例教えてシリーズが多くてすいません．） **お答え：**`https://www.jst.go.jp/crest/math/ja/suugakujuku/archive/text/3_Koiso_text.pdf` の 3 ページの写真．

質問 19： 授業内で「$p(u,v)$ が全臍的なら $p(u,v)$ の像は球面か平面の一部」の証明で「$p + \lambda\nu = q$ とすると $q_u = q_v = \mathbf{0}$ より $q = \text{const}$」とあるのですが，$q_u = q_v = \mathbf{0}$ はどこから出ましたか? ここの説明を聞き逃しました．

お答え： λ が定数であることとワインガルテンの公式．

質問 20： 定義域が連結のとき，主曲率関数が定数となる部分が分かりづらかったです．講義で話された議論以外にもなにか考え方はありませんか？ **お答え：**全臍的な場合ですね．「微分が 0 なら定数」はわかりづらいですか？

質問 21： 測地線ベクトルの向きは $\gamma'(s)$ の向きと同じですか． **お答え：**「測地線ベクトル」とは?

質問 22： 測地線はどういった考えから生まれたんですか． **お答え：**曲面上の「直線」

質問 23： $p_{uuv} \cdot p_v$ や $p_{uvu} \cdot p_v$ といった面倒なものを計算する理由が $0 = (p_{uuv} - p_{uvu})$ を p_u, p_v, ν で表したいから，というのがわかり納得したような気がした．

お答え： そうですね．これは「感想，ご意見，ご希望」などの欄に書いていただく内容だと思います．

6 ガウス・ボンネの定理

■ガウス・ワインガルテンの方程式． パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν，第一，第二基本量をそれぞれ E, F, G; L, M, N とする．このとき，各点 (u,v) に対して $\{p_u, p_v, \nu\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与える（正規直交とは限らない）．とくに $\mathcal{F} := (p_u, p_v, \nu)$ は各 (u,v) に対して 3 次正則行列を与える．この $\mathcal{F}$ を曲面の**ガウス枠**ということにする．

命題 6.1 (ガウス・ワインガルテンの方程式)**.** 上の状況で

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} = \mathcal{F}\Lambda$$

が成り立つ．ただし

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & -A_1^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & -A_1^2 \\ L & M & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & -A_2^1 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & -A_2^2 \\ M & N & 0 \end{pmatrix},$$

Γ_{jk}^i はクリストッフェルの記号（テキスト 108 ページ，式 (10.6)），$A = (A_j^i)$ はワインガルテン行列（テキスト 82 ページ，式 (8.4)) である．

証明. テキスト 108 ページ (10.7) 式（ガウスの公式）とワインガルテンの公式（テキスト 85 ページ，命題 8.5）からすぐにわかる． □

系 6.2. 命題 6.1 の状況で,

$$\Omega_v - \Lambda_u - \Omega\Lambda + \Lambda\Omega = O$$

が成り立つ.

証明. $\mathcal{F}$ が正則行列に値をとる関数であることと，$\mathcal{F}_{uv} = \mathcal{F}_{vu}$ から従う． □

注意 6.3. 曲面 $p(u,v)$ が与えられれば，第一基本量，第二基本量が定まる．逆に，与えられた関数 E, F, G, L, M, N に対してそれらを第一，第二基本量にもつ曲面を求めることを考えよう．命題 6.1 の Ω, Λ は第一基本量，第二基本量から定まることに注意して，与えられた E, F, G, L, M, N に対して形式的に Ω, Λ を作り，命題 6.1 の $\mathcal{F}$ に関する偏微分方程式を解けばよいだろう．このような $\mathcal{F}$ が存在するための必要条件が系 6.2 である．実は (u,v) が動く範囲が単連結領域であれば，この条件は十分条件にもなっていていて，対応する曲面が存在することがわかる（曲面論の基本定理；テキスト 179 ページ， 定理 16.2).

注意 6.4. 曲面論の基本定理から，第一・第二基本形式が曲面を定めるが,「第一基本形式・ガウス曲率・平均曲率」の組では曲面が定まらないことがある．これらの量を保ちながら変形できるような曲面を Bonnet 曲面とよぶ.

2019 年 1 月 24 日

問 6.5. 実数 α に対して

$$p_\alpha(r,\theta)=\left(r\cos(\theta+\alpha)+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{r}, r\sin(\theta+\alpha)+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r}, 2\cos\alpha\log r-2\theta\sin\alpha\right)$$

と定めると，p_α の第一基本量，平均曲率は α によらないことを確かめなさい．（注：第一基本量が α によらないこととと，ガウスの方程式（テキスト 123 ページ，定理 11.2）から，ガウス曲率が α によらないことは明らか）．

■面積要素と曲面上の関数の積分． パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ $\bigl((u,v)\in D\bigr)$

$$dA := \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

を曲面上の**面積要素**という．(u,v) の関数 $f(u,v)$ に対して

$$\int_\Omega f(u,v)\,dA := \int_\Omega f(u,v)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{6.1}$$

と定める．ただし Ω は D の領域で，$\overline{\Omega}$ がコンパクトなものとする．

問 6.6. 積分の定義 (6.1) が曲面のパラメータのとり方によらないことを確かめなさい．

■ガウス・ボンネの定理 曲面上の測地線で囲まれた単連結領域 ΔABC 上で

$$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=\pi+\int_{\triangle\mathrm{ABC}} K\,dA$$

が成り立つ（テキスト 110 ページ，定理 10.6）．さらに，閉曲面 S のオイラー数（テキスト 112 ページ）を $\chi(S)$ とおくと

$$\int_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ（テキスト 112 ページ，定理 10.7）．

問題

6-1 ガウス曲率が負であるような曲面上の 2 点 P, Q を通る測地線が 2 本あるとする．このとき，この 2 つの測地線分は円板と同相な領域を囲まないことを示しなさい．

6-2 回転トーラス（テキスト 69 ページ，問題 6-1）の全曲率を求め，それがオイラー数の 2π 倍になっていることを確かめなさい

6-3 曲面 $p(u,v)=\bigl(\operatorname{sech}v\cos u, \operatorname{sech}v\sin u, v-\tanh v\bigr)$ $(v>0)$ を考える．uv 平面上の曲線

$$u^2+\cosh^2 v=2,\quad (u+1)^2+\cosh^2 v=4,\quad u=0$$

に対応する曲面上の曲線は準測地線を与えるが，これらで囲まれる三角形に関してガウス・ボンネの定理が成り立つことを確かめなさい．

6-4 陰関数

$$\bigl((x-2)^2+y^2-1\bigr)\bigl((x+2)^2+y^2-1\bigr)\bigl(x^2+y^2-4^2\bigr)+z^2=0$$

で与えられる図形 S はなめらかな閉曲面を与える．この曲面のオイラー数を求め，ガウス・ボンネの定理が成り立つことを確かめなさい．