

2018 年 4 月 17 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論 A (MTH.B401) 講義資料 2

お知らせ

- 提出物は返却いたします。なお、返却した提出物に「判読不能な赤い筆跡」があるかもしれませんが、それは山田の個人用のメモです。ご質問への回答、ご意見へのコメントはこの資料にあります。

前回までの訂正

- 講義ノート 5 ページ, 下から 3 行目: (I) - (II) \Rightarrow (II) - (I)
- 講義ノート 7 ページ, 1 行目: satisfies \Rightarrow satisfies

授業に関する御意見

- とても楽しく聞かせていただいています。 山田のコメント: どうも
- 曲線は旅という考え方が好きです。 山田のコメント: もっともじっくり来ると思うのですが。
- 講義で資料の証明中の計算をていねいに解説していただいたので理解しやすかったです。 山田のコメント: よかった。
- 幾何学概論第一・第二と同じです。 山田のコメント: 何が?

質問と回答

質問 1: $A(f_0) = \min_{f \in \mathcal{S}_c} A(f)$ のとき, $(f_0 \text{ の平均曲率}) = 0$ の証明で, $f^t = f_0 + t\varphi\nu$ は $(f_0 \text{ の変分でしょうか?})$ と書いていましたが, このように書けるのは何故ですか。(授業中に理解できていない)。

お答え: 書けるのではなく, このように置く。あらすじは以下の通り: 面積最小ということから, 任意の変分 $\{f^t\}$ に対して, (1.10) が成り立つ。もし $H \neq 0$ となる点があったら, そこを狙って φ という関数をつくり, それからご質問のように変分をあたえると, 矛盾が生じる。

質問 2: 講義では面積の第 1 変分, 課題では錐の第 1 変分を計算したわけですが, 計算結果を比べてみると,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A(f^t) = -2 \iint_D H\varphi dA, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} V(f^t) = \iint_D \varphi dA$$

錐の方が平均曲率 H がなく, 面積よりも簡単な表示になっています。面積よりも体積の方が次元が高いので, 扱うのが難しいと感じますが, 第 1 変分が簡単になるのはなぜですか。

お答え: 一般に体積の方が簡単と思います。曲面を変形するとき, ν 方向に φ だけ動くと, それだけ体積が増える, しかし面積は(同心球の表面積を想像せよ)増え方にまがり具合が影響します。

質問 3: 例えば $D' = \{x \in \mathbb{R}^2; 1 < |x| < 2\}$ $S'_{C_1, C_2} = \{f: \overline{D'} \rightarrow \mathbb{R}^3; f \text{ は } C^\infty \text{ 級はめ込み, } f(\partial D') = C_1 \sqcup C_2\}$ (C_1 and C_2 are simple closed smooth curves in \mathbb{R}^3 s. t. $C_1 \cup C_2 = \emptyset$) とした場合等でも定理 1.1 と同じような結果は得られているのでしょうか。

お答え: 円板にしたのはたんに「簡単のため」です。実際に境界を気にするのはストークスの定理をつかうところだけなので, ご質問の状況でも大丈夫です。

質問 4: 極小曲面は一般に一意とは限らないとのことですが, 一意性が成り立つような境界の十分条件としてはどのようなものが知られているのでしょうか。(例えば, 境界がある平面内に含まれている場合は一意性が成り立つように思えるのですがこれは正しいですか)。

お答え: たとえば https://www.jst.go.jp/crest/math/ja/suugakujuku/archive/text/3_Koiso_text.pdf

質問 5: 平均曲率 H の幾何学的な意味として何が挙げられますか。

お答え: たとえば今回の定理は平均曲率の幾何学的意味を与えています。

質問 6: 問題 1-1 の $\mathcal{V}(f)$ は値を $-\infty$ にいくらでも近づけられるので、最小値はないわけですが、 $\mathcal{V}(f)$ の値が下に (\Leftrightarrow 上に) 有界になるような C や S_C に関する制約としてどのようなものを考えると面白いでしょうか?

お答え: 錐が「何かを含む」とか? ちなみにここでは \mathcal{V} の極値問題を考えるわけではありません。

質問 7: 石鹸膜が張る曲面と、シャボン玉が囲う曲面の 2 つの曲面について今まで混同していたが、前者が極小曲面で、後者が平均曲率一定曲面で違うものだと認識できてよかったです。

お答え: そうですか。

質問 8: 与えられた表面積を持つ閉曲面が作る 3 次元立体の体積について、それが最大あるいは最小夫々の場合で、ガウス曲率、平均曲率に関する条件は存在するのでしょうか。もし存在するとしたら具体的にどのような形ですか。

お答え: 最小値はない。実際、表面積を保ちつつ、いくらでも薄くできる。最大値は「等周問題」。

質問 9: Lemma 1.5 の $V = \frac{df}{dt}$ (原文ママ: 偏微分記号では?) と $\frac{df}{d\theta}$ が C に直交であるかよくわかりません。

お答え: 直交ではなく平行。

質問 10: 第三変分公式はありますか(やる意義がありますか)?

お答え: 使わないことはないらしいが山田は使ったことがない。

質問 11: f の variation F が定義されていましたが、 $\{f^t\}_t$ は一意に定まらないため、 F が $\{f^t\}_t$ が variation の性質をもつ関数の族のうち 1 つを考えているのか、全体としてとらえているのかよくわかりませんでした。

お答え: ご質問の意味がよくわかっていませんが、 $F: (-\varepsilon, \varepsilon) \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f^t = F(t, *): \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ なので、各 F と族 $\{f^t\}_{|t| < \varepsilon}$ は同じものです。

質問 12: “汎関数” というコトバの定義についての質問です。講義中瀬 s ネイは ∞ 次元多様体のような、いわゆる大きい空間を定義域とする写像とおっしゃいましたが、文献では探すことができませんでした。よろしければソースの提供をお願いします。

お答え: 講義中に述べたのは「そのような場合にとくに「汎関数」とよぶことが多い」ということ。明示的な文献というよりは、多数の用例からの帰納。